4° Math. a
177 b. (1,1

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

AUSFÜHRLICHES SYSTEM

DER

MASCHINEN-KUNDE

MIT

SPECIELLEN ANWENDUNGEN BEI MANNICHFALTIGEN GEGENSTÄNDEN DER INDUSTRIE

FÜR DEN PRAKTIKER BEARBEITET

VON

KARL CHRISTIAN VON LANGSDORF,

der Philosophie Dr.; Grossherzoglich-Badischem geheimen Hofrathe und erstem ordentlichen Lehrer der Mathematik zu Heidelberg; Professor Honorarius der Russisch-Kaiserlichen Universität zu Wilna; der Kaiserlich-Leopoldinischen Akademie der Naturforscher; der Königlichen gelehrten Societäten zu Göttingen, zu Erfurt, zu Harlem, zu München und zu Stockholm; der ältern physikalisch-ökonomischen, und der neueren Grossherzoglich-Badischen Gesellschaft für Naturwissenschaft und Heilkunde zu Heidelberg; der mathematisch-physikalischen Gesellschaft zu Erfurt; der Gesellschaft zur Beförderung der Physik und Naturgeschichte zu Lausanne; des Niederrheinischen Vereins zur Natur- und Heilkunde zu Bonn; der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaft zu Marburg; des Baierischen Vereins zur Beförderung der Industrie; der Gesellschaft zur Beförderung der nützlichen Künste zu Frankfurt am Main Mitgliede, und der Grossherzoglichen mineralogischen Gesellschaft zu Jena Assessor.

ERSTEN BANDES ERSTE ABTHEILUNG.

MIT EINEM ATLAS VON KUPFER- UND STEINTAFELN UND EINEM VOLLSTÄNDIGEN REPERTORIUM ZUM GANZEN ERSTEN BANDE.

HEIDELBERG UND LEIPZIG.

IM VERLAGE DER NEUEN AKADEMISCHEN BUCHHANDLUNG VON KARL GROOS.

1826.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

SEINER MAJESTÄT

DEM

ALLERDURCHLAUCHTIGSTEN GROSSMÄCHTIGSTEN

UND

ALLERGNÄDIGSTEN

KAISER UND SELBSTHERRSCHER

ALLER REUSSEN

KÖNIG VON POLEN

ALEXANDER DEM ERSTEN

WIDMET

WIDMET DIESE

ANLEITUNG ZUR MASCHINENKUNDE

ZUR

B E Z E U G U N G

DER ALLERTIEFSTEN EHRFURCHT UND DER ALLERSCHULDIGSTEN

D A N K B A R K E I T

DER VERFASSER.

VORERINNERUNGEN.

Man erwarte hier weder ein Theatrum Machinarum, wie das von Leupold, *noch eine Architectura Hydraulica, wie die von* Belidor, *noch eine technologische Kupfersammlung, wie die von* Borgnis. *Was wird nun mit diesem Werke eigentlich bezweckt?*

Die Wichtigkeit einer Zusammenstellung von Lehren, die zur industriellen Mechanik *gehören und mit dieser in unmittelbarem Zusammenhange stehen, ist allgemein anerkannt, und darf nicht hier erst erwiesen werden. Aber hat dann die industrielle Mechanik andere Grundsätze als die Mechanik überhaupt? und haben wir nicht Anleitungen zu letzterer, selbst in unserer Muttersprache zum Ueberflusse? Man nehme* Eulers *Theor. corpor. rigid. oder la Grange Mécanique analitique, oder* Kästners *höhere Mechanik und ähnliche Werke zur Hand, und betrachte daneben die mannichfaltigen zur* industriellen *Mechanik gehörigen mechanischen Anstalten, welche die Arbeiten des Handwerkers, des Künstlers, des Fabrikanten, des Landmanns etc. theils möglich machen, theils erleichtern, theils vervollkommnen, so wird man kaum einen Uebergang aus jenen wissenschaftlichen Werken in den Bau und den Betrieb solcher Anlagen bemerken. Dennoch haben wir nur* eine *Mechanik. Die Bewegung des durch einen Wind oder durch Schütteln von einem Zweige losgerissenen und herabfallenden Apfels ist denselben Gesetzen unterworfen, nach welchen die Weltkörper ihre unermeſslichen Bahnen durchlaufen. Die Mechanik der Maschinen und La Place's Mechanik des Himmels beruhen auf einerlei Gründen. Das Weltgebäude ist ja gleichfalls nur eine Maschine im gröſseren Maaſsstabe. Eine Kraft bestimmter Art wirkt immer auf dieselbe Weise, sie mag vorkommen wo man will. Aber unendlich mannichfaltig ist das Zusammentreffen, das Zusammen- und das Einanderentgegenwirken zusammentreffender Kräfte, daher, unendlich mannichfaltig die Systeme gleichzeitig wirkender Kräfte, und unendlich mannichfaltig ihre Resultate in Bezug auf Richtung der Bewegung, auf Gröſse der Geschwindigkeit und auf Art und Gröſse der Wirkung. Von besonderen Zwecken der Bewegung ist in der allgemeinen Mechanik nicht die Rede, daher auch nicht von Anordnungen zur Erreichung*

bestimmter Zwecke; diese werden durch theils nothwendige, theils gewohnte und eingebildete, auch nur zum Vergnügen und zum Glanze herbei gerufene Bedürfnisse des Lebens bedingt, und mit ihnen geht die Wissenschaft in die Technik über, die der reinen Wissenschaft, und oft genug auch dem Subjekte, das sie besitzt, ganz fremd ist.

Die mathematische Konstruktion des Rades an der Welle *ist rein geometrisch, die Lehre von dem gegenseitigen Verhalten der daran angebrachten Kräfte ist rein mechanisch. Aber die Konstruktion des oberschlächtigen Wasserrades sowohl als die Art, Kräfte (Kraft und Last) daran anzubringen, ist technisch. So ist die Lehre von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen oder in offenen regulären Kanälen in Bezug auf das Verhältniſs der verschiedenen Abmessungen und der abflieſsenden Wassermenge theils geometrisch, theils rein- theils hypothetisch-mechanisch; aber die wirkliche Herstellung einer Röhrenleitung oder eines offenen Kanals gehört zur Technik. So sind überall auch bei allen Maschinen die mechanischen und technischen Lehren von einander zu unterscheiden. Man könnte hiernach den allgemeinen Namen* Mechanik *beibehalten und sie in die* mathematische *und* technische *eintheilen. Die mathematische zerfällt in den* allgemeinen *und den* speciellen *Theil. Ersterer, welcher die allgemeine Lehre von den Kräften, von Bewegung und vom Gleichgewicht in sich begreift, muſs vorangehen. Der Ingenieur muſs ihn wohl gefaſst haben, bevor er zum* speciellen *Theile schreitet; in diesem wird jener zum Grunde gelegt; er hat Zusammensetzungen von Massen und Bewegungen zu bestimmten Zwecken zum Gegenstande, wobei die Nothwendigkeit der Bewegungen auf den allgemeinen Lehren beruht, die besonderen* Formen *der Massen aber und die besonderen* Arten *von Bewegungen als gegeben vorausgesetzt werden. Beide werden durch den Zweck der ganzen Vorrichtung gegeben, und ihre Bestimmung ist ganz technisch. Daher ist der specielle Theil der mathematischen Mechanik mit dem technischen unzertrennlich verbunden und läſst sich nur in dieser Verbindung mit Nutzen für die Ausübung befriedigend abhandeln. Aber auch die Vollkommenheit der technischen Einrichtungen hängt wiederum von Verhältniſsbestimmungen ab, die auf dem allgemeinem Theile der mathematischen Mechanik beruhen. Darum kann dann auch der specielle Theil der mathematischen Mechanik vom technischen in einem Systeme hierher gehöriger Kenntnisse so wenig als der technische vom speciellen mathematischen getrennt werden. Unsere Lehrbücher lassen sich selten tief und mit einiger Verbreitung in den speciellen mathematischen Theil ein; und wie wenig man sich in solchen einlassen könne, ohne den technischen zu berühren, kann man z. B. aus der Untersuchung über die Wasserräder, über die Druckwerke* und *noch einige hierhergehörige Gegenstände in* Kästners *übrigens trefflicher* höheren Mechanik *ersehen.*

Karsten *gieng ungleich weiter als* Kästner; *er betrachtet schon mannichfaltige Maschinen, die für das bürgerliche Leben von groſser Wichtigkeit sind. Ich glaube aber den groſsen Verdiensten dieses trefflichen scharfsichtigen und gründlichen Mathematikers unbeschadet bemerken zu dürfen, daſs er, ich möchte sagen, zu sehr Mathematiker d. h. der*

mathematischen Schärfe zu sehr gewohnt war, um ein Feld zu bearbeiten, das die feine Feile der der Mathematik nicht verträgt und seiner Natur nach die mathematische Schärfe überall abstumpft. Die von ihm angegebenen Maschinen sind weder im ganzen Detail noch in Bezug auf Technik dargestellt, und nirgends so, dafs Jemand den ganzen Bau daraus hinlänglich kennen lernte, um selbst eine Anlage darauf zu gründen. Sein Werk ist blos mathematisch, immer nur in Bezug auf allgemeine mechanische Verhältnisse, ohne die erforderliche Rücksicht auf die häufigen und oft so bedeutenden Abweichungen von der Erfahrung, und dennoch wiederum strenge in Nebenrechnungen, selbst bei Gegenständen, die keine Strenge zulassen, wie bei Friktionsberechnungen. Wie wenig übrigens das Technische dabei berücksichtigt worden ist, bedarf um so weniger eines Beweises, als solches Jedem beim ersten Anblick seiner Kupfertafeln sogleich ins Auge fällt. Es ist eine ausgemachte Sache, dafs die Mathematik, welche als reine Wissenschaft alle ihre Lehren, unabhängig von sinnlilichen Wahrnehmungen, aus Axiomen ableitet und nur auf Gegenstände anwendet, die sie sich selbst schafft, keinem Irrthum unterworfen ist, was dann auch von der Reinen *Mechanik gilt. Die theoretischen Lehren der Mechanik gehen aber in aller Anwendung auf Gegenstände, die entweder ausser dem Verstande in der Natur schon vorhanden sind oder durch die Kunst erst in bestimmter Form dargestellt werden, über die reine Mechanik hinaus, indem sie die rein mechanischen Gesetze auf Gegenstände, deren Natur nicht der Versand giebt, sondern die der Verstand als ihm schon vorgeschrieben erst kennen lernen mufs, anwenden. Diese Anwendung kann nur in so ferne zu richtigen Resultaten führen, als unsere Voraussetungen in Bezug auf die Natur des Gegenstandes und auf die dabei wirkenden Kräfte richtig sind. Die Resultate sind dann immer in Bezug auf die angenommenen Voraussetzungen vollkommen richtig d. h. nothwendige Folgen der Voraussetzungen, so dafs auch* dabei *die Mathematik nicht fehlen kann. Bestimmte Voraussezzungen führen allemal auf ein bestimmtes nothwendiges unveränderliches Resultat. Aber in unzähligen solchen Anwendungen verläfst uns die Theorie in Bezug auf die Voraussetzungen, welche wir zum Grunde zu legen haben, so dafs es auf die besonderen Ansichten des Individuums ankommt, das sich mit einer solchen Untersuchung beschäftigt.*

Es ist nicht das künstliche Gewebe von Reihen und Kombinationen, jener Zauberstab der neuern Analytiker, wozu ein französischer Schriftsteller nur plumbeas nates fordert — nicht dieses Gewebe ist es, was uns zu braucharen Resultaten führt; es ist ein geübtes praktisches Talent, das durch grofse Mannichfaltigkeit von Beobachtungen zusammenwirkender Kräfte und dazu dienlicher Organe geleitet, die mannichfaltigen Kräfte und Organe aufzusuchen gewöhnt ist, deren Verein zu einer bestimmten Wirkung führt, jenes Talent, wodurch Belidor, v. Baader, v. Reichenbach *u. a. sich zu Lehrern in diesem Fache erhoben — nicht die bewunderten Kunstgriffe der neuern Analysis, die dabei nicht einmal ihre Anwendung finden. Wenn hierher gehörige Untersuchungen schwierig werden und mangelhaft bleiben, so beruht diese Schwierigkeit und dieses Mangelhafte nicht auf Unbekannt-*

schaft mit den neuern Kunstgriffen der Analysis, die schon vor mehr als 60 Jahren alle hierher gehörige Hülfsmittel darbot; sondern auf mangelhafter Kenntniſs der Elemente, von welchen bestimmte Erscheinungen abhängen, und welche die Analysis nicht erst finden lehrt, sondern als schon gefunden voraussetzt.

Eine auf rein mechanische Lehren gegründete Untersuchung eines Gegenstandes der Mechanik, wobei Voraussetzungen angenommen werden, die sich nur auf gewisse Analogien, nur auf die Wahrscheinlichkeit wenig zu fehlen, gründen, weil die theoretischen Lehren solche genau zu bestimmen unzureichend sind, heiſst dennoch eine Theorie dieses Gegenstandes. So hat man z. B. Theorien der Bewegung des Wassers in offenen Kanälen, der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, der oberschlächtigen Wasserräder, der unterschlächtigen Wasserräder, der archimedischen Schnecke u. s. f. und zwar über jeden solchen Gegenstand soviele verschiedene Theorien als verschiedene Philosophien, nämlich nach Verschiedenheit der Ansichten ihrer Urheber, doch mit dem Unterschiede von den Philosophien, daſs sie sich alle der Wahrheit mehr oder weniger näheren, und daſs der Grad der Näherung durch Vergleichung mit der Erfahrung geprüft werden kann. Man erkennt sehr leicht den groſsen Unterschied zwischen einer solchen mit Hülfe der Erfahrung und gewisser Analogien entwickelten Theorie und der Empirie, nach der der gemeine Mühlenarzt seinen Mühlgraben, sein Wasserrad und sein Mühlenwerk baut; sie besteht blos in der Kenntniſs einzelner Resultate von Anlagen bestimmter Art, die dann der Empiriker ohne Kenntniſs der einzelnen Bestimmungsstücke, von welchen das Resultat und die Vollkommenheit einer Anlage abhängt, in unähnlichen Fällen wie in ähnlichen wieder anwendet. Theorien der obigen Art bleiben immer im Zusammenhange mit der reinen Theorie, und liefern wie diese allgemeine nur mehr oder weniger von der Erfahrung abweichende Resultate. Man könnte sie praktische Theorien nennen. Daſs man in den Schriften von Bernoullis, d'Alembert, Euler, Lagrange, und Kästner keine dergleichen praktische Theorien zu suchen hat, werde ich kaum erinnern dürfen. Aber auch Karsten und Belidor haben sich in Belehrungen der Art wenig eingelassen. Letzteren darf ich hier nicht übergehen. Noch nie hatte ein praktischer Schriftsteller in einem so weit ausgedehnten Felde als das ist, in welches Belidors hydraulische Architektur einführt, mit soviel praktischem Talent, mit so viel Erfahrung und mit so viel technischen Kenntnissen zugleich so viel Theorie verbunden, als der Urheber dieses Meisterwerks, wie es in Bezug auf die Zeit seiner Erscheinung genennt zu werden verdient.

Es ist auch nach ihm kein solches Ganzes d. h. keine allgemeine Wasserbaukunst erschienen, die mit diesem Werke, ungeachtet der Leichtigkeit aus ihm abzuschreiben, eine Vergleichung aushalten könnte. Manche bei dem Reichthume dieses weitläuftigen Werks sehr verzeihliche Rechnungsfehler hat Karsten in seinem Lehrbegriffe der Mathematik verbessert. Es kommen aber hier Mängel anderer Art, die in seinem Zeitalter gegründet sind, in Betrachtung.

Man findet darin Unvollkommenheiten, die auch selbst in dem Karstenschen Werke noch

nicht beseitigt sind. Dahin gehört die Vernachläſsigung der Unterscheidung gleichförmig- und ungleichförmig-wirkender Maschinen, die doch auf ganz verschiedenen Theorien beruhen. Allerdings giebt es hundert Fälle in der Ausübung, wo diese beiderlei Theorien zu nahe zusammenfallen, als daſs der Unterschied ihrer Resultate in der Ausübung beachtet werden könnte; aber fürs Erste ist dieses nicht immer der Fall; fürs Andere muſs man die Theorie der ungleichförmig wirkenden Maschinen kennen, um zu beurtheilen, wo sich solche ohne merklichen Fehler als gleichförmig wirkende behandlen lassen; fürs Dritte wird die allgemeine Theorie solcher Maschinen noch dadurch wichtig, daſs sie selbst die Mittel an die Hand giebt, die vom ungleichförmigen Gange herrührende Verminderung des Effekts unbedeutend zu machen. Nur bei den Druckwerken hat schon Euler *Betrachtungen über die beschleunigte Bewegung des Kolbens angestellt, die dann auch von* Karsten *und* Kästnern *benutzt worden sind.*

Eines Theils gründen sich aber diese Betrachtungen auf sehr schwerfällige Deduktionen mittelst der höhern Analysis, die ich durch die Ausdehnung der Lehre von den Trägheitsmomenten auf flüssige Massen schon längst ausserordentlich erleichtert habe. Andern Theils haben diese Schriftsteller ihre Betrachtungen auf eine Voraussetzung gegründet, die in der Ausübung nie Statt haben kann, indem sie die Sache so ansehen, als ob der Kolben durch ein aufgelegtes Gewicht niedergedrückt würde. Der Zusammenhang der Kolbenstange mit einem in immerwährender Bewegung bleibenden Rade führt zu ganz andern Berechnungen, deren Resultat von dem jener Betrachtungen sehr verschieden seyn kann.

Stampfwerke, Hammerwerke u. dgl. auch Vorrichtungen mit Lasten an Krummzapfen, werden von Karsten *wie von* Belidor *als gleichförmig wirkende Maschinen d. h. blos nach statischen Gesetzen behandelt.*

Mannichfaltige Erfahrung wurden erst in spätern Zeiten gemacht, daher alle Untersuchungen, die mit solchen zusammenhängen, höchst unvollkommen ausfallen muſsten. Dahin gehören z. B. Erfahrungen bei der Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Röhrenleitungen, Erfahrungen über den Wasserstoſs, Erfahrungen bei Dampfmaschinen u. s. f. Darum muſsten jene Werke in Bezug auf praktische Theorien sehr unbefriedigend bleiben. Manche Maschinen litten erst späterhin wesentliche Verbesserungen, wie das in einander greifende Räderwerk, die Wassersäulenmaschine, die Dampfmaschine u. dgl. Manche Maschinen kamen erst neu hinzu, wie die Vorrichtungen zu gerader oder lothrechter Erhebung der Kolbenstangen, der hydraulische Stöſser und die hydraulische Presse.

In meinem Lehrbuche der Hydraulik und noch späteren Schriften lag es mir ob, jenen Mängeln nach Kräften abzuhelfen, und ich bin noch jetzt überzeugt, viele Lücken ausgefüllt und an der Hand der Erfahrung in Bezug auf praktische Theorien mehr geleistet zu haben als meine Vorgänger. Aber das gedachte Lehrbuch war schon vor etlich und zwanzig Jahren geschrieben, ein Zeitraum, der wieder zu manchen Abändernngen und Einschaltungen Gelegenheit darbieten muſste. Betrachtungen, die mit Lehren der Hydraulik

in keinem Zusammenhange stehen, fanden dort keine Stelle; vieles hierher gehörige ist in meinen Grundlehren der mechanischen Wissenschaften (Erlangen 1802), in meinem Handbuche der gemeinen und höheren Mechanik fester und flüfsiger Körper (Heidelberg 1807), und in meinen Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften (Mannheim und Heidelberg 1816) zerstreut nachgeholt worden. Aber alle diese Schriften hatten nicht die Tendenz einer industriellen *Mechanik, welche in ihrem Vortrage bis zur wirklichen Anlage fortschreiten, und mannichfaltige mechanische Vorrichtungen in unmittelbarer Verbindung mit Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft zum Hauptzwecke haben sollte, so dafs mechanische Theorien dabei nur als Mittel aushelfen sollen, theils Erfahrungen gehörig zu beurtheilen und richtig anzuwenden, theils die zur Vollkommenheit einer Anordnung gehörigen Verhältnisse zu bestimmen und die wirklichen Erfolge mannigfaltiger Anordnungen soviel immer möglich durch praktische Theorien aufzufinden. Die industrielle oder, was hier dasselbe ist, die praktische Mechanik hat es immer mit mechanischen Vorrichtungen zu thun, die im bürgerlichen Leben vorkommen und geht daher von allgemeinen abstrakten Begriffen auf singuläre über, die sich auf bestimmte Anwendungen beziehen. Sie begnügt sich z. B. nicht mit dem allgemeinen Begriffe einer Schraube und der diesem Begriffe zugehörigen Verhältnifsbestimmung zwischen Kraft und Last, sondern theilt auch Beispiele vom öftern Vorkommen solcher Fälle mit, wo die Schraube als Hauptmittel zur Erreichung eines bestimmten Zwecks dient.*

Als Beispiel solcher Fälle dienen die Schrauben des Schreiners, der Schraubstock des Schlossers, das Hebgeschirr des Zimmermanns, die Presse in den Papiermühlen, die Keltern, die Stellschraube u. dgl.

Tiefsinnige durch Kunstgriffe der höheren Analysis herbei geführte Theorien sind in Bezug auf den hierbei zum Grunde liegenden Hauptzweck, den Nutzen der Mechanik mehr zu verbreiten, die Kenntnisse nützlicher Werkzeuge und mannichfacher Vorrichtungen besonders bei Arbeiten, die im bürgerlichen Leben häufiger vorkommen, allgemeiner, und auf die Bedingungen ihrer mechanischen Vollkommenheit aufmerksamer zu machen — dazu, sage ich, sind tiefe Kunstgriffe der Analysis hier am unrechten Orte. In Erwägung aller dieser Umstände wird man gerne darin mit mir übereinstimmen, dafs alle bisher genannten Schriften keineswegs auf das Ziel einer industriellen Mechanik gerichtet sind, und den Wunsch eines solchen Werks nicht unterdrücken können. Eben dieses Bedürfnifs hat man auch in Frankreich gefühlt, wie es die seit wenigen Jahren erschienenen Werke von Borgnis *und* Christian *beweisen. Herr* Hartleben, *Buchhändler in Pesth, ersuchte mich zu Ende des Jahres* 1821, *die Uebersetzung des Werks von* Borgnis *zu übernehmen, was ich auch im Vertrauen auf einen Schriftsteller aus einem Reiche, wo die Ingenieurwissenschaften immer ihre Heimath fanden, gerne übernahm, jedoch unter der Bedingung, in Noten die mir nöthig scheinenden Bemerkungen beifügen zu dürfen. So begann ich die Arbeit, hatte aber zu 5 Bogen Text schon ebensoviel in Noten, nicht etwa zu Erläuterung des Originals oder dessen Erweiterung, sondern zur nothwendigen Anzeige begangener Schnitzer und deren Korrek-*

tion. Die Fehler häuften sich in solchem Maaſse, daſs ich mich schämte, ein solches Machwerk in unsere Muttersprache zu übersetzen, und es für eine Schande hielt, meinen Landsleuten die Uebersetzung eines solchen Werks in die Hände zu geben. Ich theilte diese meine Ueberzeugung noch frühzeitig genug Herrn Hartleben mit, der dann auch meinem Rathe, einen solchen Verlag aufzugeben, gerne folgte. Die Menge von Fehlern bei Seite gesetzt, hat dieses Werk noch andere Hauptmängel. Mit der ausserordentlich zahlreichen Menge von Kupfern steht der weitläuftig gedruckte Text in gar keinem Verhältnisse, und es läſst sich schon vermuthen, daſs es denselben an den nöthigen Erklärungen fehlen müsse, wovon man dann auch bald überzeugt wird. Die Kupfertafeln verrathen überhaupt sehr bald die groſsen Mängel des Werks. Fürs Erste sind die Zeichnungen durchaus zu kleinlich, wie man sie nicht einmal in einen Orbis pictus aufzunehmen pflegt; fürs Andere sind sie ohne Rücksicht auf das erforderliche Verhältniſs der einzelnen Theile dargestellt; fürs Dritte sind sie ein Untereinander von nützlichen, entbehrlichen und ganz unbrauchbaren Vorrichtungen und Maschinen; fürs Vierte ist das Technische dabei ganz vernachlässigt; fürs Fünfte enthalten sie verwickelte Zusammensetzungen und Einrichtungen für Fabriken und Manufakturisten und zu anderem Gebrauche, die dem Werke ein Ansehen von ausserordentlicher Ausdehnung und Brauchbarkeit geben sollen, die aber geradezu ganz unbrauchbar sind und zu nichts dienen als das Werk theurer zu machen.

Der Text ist voller Unrichtigkeiten; er ergänzt oder verbessert nicht die Mängel der Zeichnungen, er beseitigt nicht das Unverständliche so vieler derselben durch beigefügte Erläuterungen, er spricht selten vom erforderlichen Verhältnisse der einzelnen Theile, schwätzt hin und wieder unnöthiger Weise sehr viel von seinem Gegenstande, wo er sich weit kürzer hätte fassen können, und dennoch mangelhaft und ohne die Hauptmomete zu treffen, und vernachlässigt dagegen an hundert anderen Stellen den wahrhaft praktischen Unterricht, dessen Jeder bedarf, der es versuchen will, zur wirklichen Anlage zu schreiten. Gründliche *Belehrungen sind vollends diesem Werke ganz fremd. Ich rede nicht von den Kenntnissen des Verfassers, sondern von den Kenntnissen, dis in diesem Werke mitgetheilt werden, und diese sind, wenn auch ein Leser das ganze Werk durchstudirt hat, von sehr geringem Werthe; er hat ein Bilderbuch durchgegangen, dessen Bilder er groſsentheils nicht versteht, und von denen er in der Ausübung keinen richtigen Gebrauch zu machen weiſs; er hat keine mechanische Grundsätze aufgefaſst, und um nur mit empirischen Kenntnissen auftreten zu können, muſs er erst noch bei einem Empiriker in die Schule gehen. Der Plan oder die Tendenz des Werks kann solche mit der Unbrauchbarkeit desselben verbundene Mängel nicht rechtfertigen. Die Absicht war, denen, welche sich mit mechanischen Arbeiten beschäftigen, eine Anleitung hierzu in die Hände zu geben, die sie, ohne das zurückscheuchende Studium der mathematischen Theorie, durch bloſses auf Erfahrungen gegründetes Raisonnement, von den zweckmäſsigen Einrichtungen, ihrem Bau und ihren Wirkungen unterrichten sollte. Es ist eine ganz vergebliche Bemühung, diesen Zweck erreichen*

zu wollen, zumal in so grosser Ausdehnung, als Borgnis sich vorgesetzt hatte. Es giebt keine allgemeine Erfahrungen. Jede Erfahrung hängt von mehr oder weniger Bestimmungsstücken ab, und beruht nicht unmittelbar auf Beobachtungen, sondern auf Schlüssen, die wir aus den Beobachtungen ziehen. Man würde in einem Zirkel herumgehen, wenn man hinzufügen wollte, dass diese Schlüsse *wieder aus der Erfahrung hergenommen werden könnten; nein, diese müssen nothwendig auf Theorie gegründet seyn. Erwägt man hierbei die Menge von Kombinationen, welche bei den mannigfaltigen Bestimmungsstücken, die bei einer Beobachtung vorkommen, Statt haben, so begreift man leicht die Unstatthaftigkeit allgemeiner Erfahrungen und die Nothwendigkeit der Darstellung allgemeiner Gesetze, nach welchen das Resultat von den verschiedenen Bestimmungsstücken, und jedes Bestimmungsstück von einem bestimmten Resultate und den übrigen darauf Einfluss habenden Bestimmungsstücken abhängt, was dann unvermeidlich auf Theorie und die oben erwähnten praktischen Theorien führt. Der Plan konnte also nicht ausgeführt werden, weil er eine Ungereimtheit in sich schliesst.*

Was aber dabei noch hätte geleistet werden können, hat der Verfasser nach den oben angegebenen Mängeln, nicht einmal geleistet.

Ein zweites Werk von gleicher Tendenz ist die industrielle Mechanik von Christian*, von welcher bis jetzt (im Sept.* 1825) 3 *Bände erschienen sind. Bei der völligen Unmöglichkeit, einen solchen Plan befriedigend auszuführen, musste auch* diesem *Schriftsteller eine solche Arbeit nothwendig misslingen, und wenn wir die feststehenden Lehren der allgemeinen Mechanik als die Grammatik des Maschinenwesens betrachten, so fehlt es auch diesem Werke nicht an grammatikalischen Fehlern. Fruchtlose Bemühung, durch blosses Raisonnement zu wichtigen Resulten zu gelangen, die dem Maschinisten so unentbehrlich sind, als dem Gärtner die Kenntniss der Pflanzen und des Bodens, ist auch hier überall sichtbar, und der Vorwurf unerträglicher Weitläuftigkeit im mangelhaften Vortrage trifft diese Schrift so gut als jene von Borgnis. Das eigentlich Praktische ist gleichfalls vernachlässigt, so dass Jedem, der dieses Werk studirt hat, ein verständiger und geübter Empiriker noch vieles zu sagen weiss. Die erforderlichen Verhältnisse der mannichfaltigen bei Maschinen vorkommenden Abmessungen sind nicht im Texte bestimmt; auch die Zeichnungen ohne Bezug auf schickliche Verhältnisse entworfen. Doch ist im Ganzen der wortreiche Vortrag nicht so sachleer als bei Borgnis, die Wahl der Gegenstände bis jetzt noch nicht so mit unnützen Darstellungen vermischt, und die Zeichnungen sind, den gedachten Fehler bei Seite gesetzt, eine Zierde des Werks. Hin und wieder sind auch einzelne gute Belehrungen und belehrende Versuche und Beobachtungen, öfter als bei Borgnis, mitgetheilt.*

Nach diesem Allem bleibt nun noch die Frage übrig: Was hat dann der Verfasser einer industriellen Mechanik zu leisten, sowohl in Bezug auf gründliche Darstellung als in Bezug auf die Wahl der Gegenstände?

Der erste Theil dieser Frage ist im Bisherigen schon hinlänglich beantwortet. Ohnehin strebt Empirie zum grössten Nachtheile gründlicher Kenntnisse hier und da mit Macht die Oberhand

zu gewinnen und es fehlt, um letztere vollends zu ersticken, nichts mehr, als daſs Schriftsteller, welche sich scientifische Kenntnisse erworben haben, selbst noch die Feder ergreifen, um die im Schlamme arbeitende Empirie noch mehr aufleben zu machen und noch mehr zu verbreiten. Wo diese Weise, dem mit der Unwissenheit verbundenen Halbwissen aufzuhelfen und den Glauben an die Nothwendigkeit scientifischer Kenntnisse immer mehr zu schwächen, Beifall findet (und der Beifall erhält in der Theilnahme gebildeter Schriftsteller die sicherste Bürgschaft), da beginnt eine Nation in ihrer Kultur zu sinken, und macht es ihrer Nachbarin um soviel leichter, sich über sie zu erheben. Die Empirie zieht alles Wissen mit sich in den Schlamm herab, in dem sie sich wohl findet und aus dem sich der Geist mit Mühe erhob. Zur Ehre meines Vaterlandes, zur Ehre der Teutschen meine ich, darf ich die tröstliche Bemerkung beifügen, daſs in ihm der Verbreitung des empirischen Wissens ein kräftiger Riegel vorgeschoben ist. Findet auch in einzelnen Fällen der von Einbildungen aufgeblähte Nichtswisser Schutz und Schirm, Belobung und Auszeichnung, so beruht solches immerhin auf Irrthum, auf Erschleichung, auf Trug und List, oft auf Bosheit und Rache, so daſs man den anerkannten gründlichern Kenner gefliſsentlich auf die Seite setzt, nur um ihn zu kränken, was es auch den Staat kosten mag. Daraus erwächst für die Verbreitung gründlicher Kenntnisse und für die Erweiterung der Wissenschaft kein Nachtheil, oft aber Vortheil, weil sich die schlimmen Folgen der Pfuschereien zum Glück meistens frühe genug zeigen, um als Folgen derselben anerkannt werden zu müssen. *Diesem kleinlichen Streben steht aber eine kraftvolle Macht gegenüber, die teutsche Schriftstellerwelt, die Societäten der Wissenschaften, die Lehrer der Universitäten mit ihren Schülern, und die Aussprüche der Gerichtshöfe zu* Halle, *zu* Jena, *zu* Göttingen *u. a. die uns in Journalen mitgetheilt werden. Diese lassen gründliches Wissen nicht sinken, Empirie nicht aufkommen aus ihrem Schlamme. Darum schreiten die Wissenschaften unter den Teutschen so unaufhaltsam fort. Es ist in der That beinahe unbegreiflich, wie ein Schriftsteller, der selbst in den Grundsätzen der Mechanik zu Hause ist, und so gut als wir Alle die Unmöglichkeit einsehen muſs, ohne deren Anwendung und behutsame Zusammenstellung in ihren mannichfaltigen Kombinationen, von welchen Bewegungen zu einem bestimmten Zwecke abhängen, etwas Wichtiges und Gründliches von Bewegung überhaupt und insbesondere von Maschinenbewegung sagen zu können — wie ein solcher Schriftsteller es nicht unter seiner Würde finden kann, ohne Vortrag der Theorie für Menschen zu schreiben, die, sey es aus Mangel an Zeit oder aus Trägheit, nichts von Theorie studiren* wollen; *diese noch zu unterstützen, und glauben zu machen, darin beständen die Kenntnisse, und in ihrem Besitze seyen sie studirte gründliche Mechaniker. Man muſs diese Menschenklasse in ihrem Dünkel nicht noch bestärken; man muſs sie fühlen lassen, wie weit sie zurück stehen, wie viel Studium es erfordert, zu den Resultaten zu gelangen, die man ihnen mittheilt, und von deren Wichtigkeit für den Maschinenbau man sie belehrt. Vortrag der allgemeinen mechanischen Grundlehren ist daher in Werken, welche das Maschinenwesen zum Gegenstande haben, unnachläſslich; aber die*

Anwendung auf wirkliche Maschinen, bei denen man es nicht mehr mit geometrischen Flächen und geometrischen Körpern und überhaupt nicht mehr mit den Voraussetzungen der reinen Mechanik zu thun hat, erfordert insbesondere noch praktische *Theorien, wovon ich oben geredet habe. Alles, was man dem Liebhaber der Empirie zur Gefälligkeit thun kann, ist die besondere Mittheilung der Resultate angestellter Untersuchungen, die aber nach der Natur der Sache nur durch allgemeine Zusammenstellung der Bestimmungsstüke ausgesprochen werden können, von welchen sie abhängen, was dann in der mathematischen Zeichensprache geschehen mufs, wenn man nicht drei Quartanten aus einem machen will. Wem es aber auch zu mühsam seyn sollte, diese Zeichensprache zu lernen, worin er doch in höchstens zwei Stunden hinlänglich unterrichtet werden kann, dem mag man allenfalls eine Anweisung, Gänseställe, nicht aber Maschinen zu bauen, in die Hände geben. Was ich nun in dieser Hinsicht thun konnte, habe ich gethan; ich habe zu dem Ende ein eigenes Repertorium nach allen Paragraphen beigefügt, welches die gefundenen Resultate in allgemeiner mathematischer Zeichensprache enthält, wobei die einzelnen Buchstaben Bestimmungsgröfsen ausdrücken, von welchen irgend ein gesuchtes Stück abhängt. Auf welche Bestimmungsstücke die einzelnen Buchstaben sich beziehen, habe ich überall angemerkt. Die Relationen selbst beziehen sich in der Anwendung auf wirkliche Anlagen überall zugleich auf Bestimmungen, die von Beobachtungen hergenommen sind, was für praktische Maschinenlehre eine wesentliche Forderung ist, soweit Beobachtungen vorliegen. Wo gewisse Bestimmungsstüche weder theoretisch noch aus der Erfahrung angegeben werden können, mufs man sich mit Analogien begnügen, die theils aus der Theorie, theis aus der Erfahrung hergenommen werden. Man mufs dabei immer* Sicherheit *des Resultats vor Augen haben, um von einer bestimmten Kraft nicht zu viel zu erwarten, oder zu einem verlangten Effekt nicht zu wenig Kraft zu fordern. Dabei mufs immer die Natur des Bestimmungsstücks, in wiefern es Einflufs auf das Resultat hat, erwogen werden. In dieser Hinsicht ist z. B. die Ungewifsheit des Reibungskoëfficienten in Bezug auf Reibungen an den Wellzapfen der Wasserräder von keinem Belange, weil ihr statisches Moment einen sehr kleinen Theil vom statischen Momente der gesammten Last ausmacht. Bei allen Maschinenberechnungen kommen dergleichen Bestimmungsstücke vor, die sich nicht mit grofser Schärfe angeben lassen; es wäre daher lächerlich, dabei mit der Shärfe rechnen zu wollen, als ob von der Genauigkeit der Rechnung die genaue Zusammenstimmung des Resultats mit der wirklichen Erscheinung abhienge, wie in der Astronomie. Ebendarum darf es nicht befremden, wenn man beim Nachrechnen meistens finden wird, dafs ich es mit angehängten Decimalstellen so genau nicht genommen habe.*

Der zweite Theil der obigen Frage betrifft die Wahl der Gegenstände einer industriellen Mechanik. Soll sie zur Kenntnifs aller der Werkzeuge und Maschinen führen, die bis jetzt in die Werkstätten der Künstler, der Fabrikanten und Manufakturisten, bei Berg- und Salinenwesen u. s. f. eingeführt worden sind?

Das wäre ein schwer zu lösendes Problem! Es wäre durchaus nicht die Sache eines

einzigen Mannes; es wäre sogar zweckwidrig. Hier wird es genug seyn, auf das Zweckwidrige aufmerksam zu machen. Die Hauptbedingung *eines solchen Werks ist Brauchbarkeit für die Ausübung, um die zum wirklichen Baue einer solchen Maschine in der erforderlichen Vollkommenheit erforderlichen Kenntnisse immer mehr zu verbreiten, also Pfuschereien — weit entfernt, sie durch ein Noth- und Hülfsbüchlein zu befördern — mit aller Kraft entgegen zu wirken. Dieser Hauptbedingung könnte in jenem Umfange auf keine Weise Genüge geschehen.*

Verwickelte Zeichnungen, wie die von verwickelten Maschinen nothwendig seyn müssen, sind ohne allen Nutzen; sie werden nur von dem verstanden, der sich solcher Maschinen bedient oder der sie schon zu verfertigen versteht; jedem Andern bleiben sie unverständlich, und entfernen jeden Gedanken, die Maschine, welche die Zeichnung vorstellt, hiernach wirklich bauen zu wollen. Zwar läfst sich durch Zerlegung einer Maschine, die durch Zeichnung in ihrer Verwicklung dargestellt ist, in ihre einfacheren Theile, sehr vieles näher erläutern und allmählig mehr Klarheit in unsere Vorstellung bringen; aber wer soll uns das alles mittheilen? Wer soll uns alle diese Zeichnungen verschaffen? Wer die vollständige dazu nöthige Beschreibung übernehmen? Wer die Kosten bezahlen? Ich will hier nur einer einzigen Erfahrung gedenken, die ich selbst gemacht habe. Herr Wassermann, *ein geschickter Manufakturist in* Erlangen, *hatte im Jahre* 1804 *den Gedanken, seinen Strumpfwirkerstuhl, der mit allen seinen Theilen in seiner Einbildungskraft so vollständig abgebildet war, als er vor ihm stand, mit allen darauf vorzunehmenden Arbeiten ausführlich zu beschreiben und hatte die Beschreibung wirklich vollendet. So both er sie einem dortigen Buchhändler zum Verlage an, der sie auch zu übernehmen bereit war, wofern ich (damals noch Professor in Erlangen, einige Monate vor meinem Abgange nach* Wilna) *bezeugen würde, dafs sie des Drucks werth sey. Leider konnte ich dieses dem braven und geschickten Manne nicht bezeugen.*

Diese Maschine war mir damals selbst noch fremd, ich versuchte es also, sie aus dieser Beschreibung und den beigefügten Zeichnungen kennen zu lernen; das war aber eine ganz vergebliche Bemühung. Man hatte schon eine ältere Beschreibung von Lehmann, *die ich mit zu Hülfe nahm; aber auch diese konnte nicht aushelfen. Auf Ersuchen übernahm ich nun selbst die Beschreibung dieses Meisterstücks der Erfindungskunst, die auch nachher mit der von Herrn Wassermann beigefügten Beschreibung der Arbeiten im Palmschen Verlage erschien. Sie kostete mich einen bedeutenden Zeitaufwand, und machte durch die zur Deutlichkeit erforderliche Darstellung der grofsen Anzahl einzelner Theile erforderliche Menge von Zeichnungen mehr Kupfertafeln nöthig, als die Herren Dingler und Borgnis zu* 100 *und mehr verschiedenen Maschinen brauchen. Auch hatte meine Beschreibung das Glück, allgemeinen Beifall zu finden — und dennoch bin ich weit entfernt, zu glauben, dafs irgend ein Künstler es unternehmen werde, sie nach dieser Beschreibung allein herzustellen. Für die vorgesetzte perspektivische Zeichnung des Stuhls in seiner ganzen Verwicklung nahm*

der sehr geschickte Zeichner aus Freundschaft *nur fünfzig Gulden. Mögte mich nun Jemand nach dem Nutzen dieser mit sovielem Zeit- und Geldaufwande verbundenen Abhandlung fragen, so mufs ich ganz offen bekennen, dafs er mich sehr beschämen würde. Nun läfst sich aber die gleiche Sorgfalt und der gleiche Fleifs in Beschreibungen, die uns mitgetheit werden, um so weniger erwarten, als wir eines Theils die damit verbundenen Kosten nicht aufwenden könnten, und andern Theils die Zahl derer, welche Maschinen vollständig und deutlich zu beschreiben fähig sind, sehr beschränkt ist.*

Wozu könnte nun ein Werk nützen, das mit solchen Beschreibungen angefüllt wäre? und wie könnte es zur Verbreitung *nützlicher mechanischen Kenntnisse beitragen, da es bei seinem unvermeidlich hohen Preise nur in wenige Hände kommen könnte?*

Nach diesen Betrachtungen gelangen wir auf einem sehr natürlichen Wege zur Wahl hierhergehöriger Gegenstände. Ein Werk über praktische Mechanik oder industrielle Mechanik, wenn man sie in Bezug auf ihren Zusammenhang mit dem industriellen Leben so nennen will, mufs, wenigstens bei weitem dem gröfsten Theile nach, einen allgemeinen Gebrauch haben, wodurch es bei allen mechanischen Einrichtungen nützlich wird und als Wegweiser dient, insofern dabei von regulirten Bewegungen die Rede ist, welche zugleich auf bestimmte Verhältnisse von Kraft und Last Bezug haben. Sie mufs also die mannichfaltigen Arten von Bewegungskräften zusammenstellen, deren wir uns überhaupt bedienen können, Bewegungen hervorzubringen und zu unterhalten. Neben den hierzu dienlichen Maschinen, die von den uns zu Gebot stehenden Bewegungskräften unmittelbar belebt werden, um durch sie wieder andere zu bestimmten Zwecken arbeitende Maschinen in Wirksamkeit zu setzen, mufs sie Maschinen dieser zweiten Art angeben, welche überhaupt einfache Wirkungen bestimmter Art hervorzubringen dienen z. B. Massen nach bestimmten Stellen in Bewegung zu setzen, sowohl feste als flüssige; Massen zu zerschneiden, Massen zu zermalmen, Massen zusammenzupressen u. dgl. Endlich mufs sie eine dritte Art von Maschinen angeben, wodurch Maschinen der beiden ersten Arten in eine zweckmäfsige Verbindung gesetzt werden. Von dem Verfasser einer praktischen Mechanik kann nichts weiter gefordert werden, als eine in den allgemeinsten Fällen genügende Zusammenstellung dieser dreierlei Arten von Maschinen, ohne sich auf die Reihen von Arbeiten einzulassen, welche mit einander verbunden oder nach einander vorgenommen werden müssen, um ein verlangtes Fabrikat als Resultat, das aus allen solchen mechanischen Arbeiten hervorgeht, zu bewirken. Solche Angaben gehören zur Technologie, aber der Technolog mufs zur Anordnung des zu seinen verschiedenen Arbeiten erforderlichen Maschinenwerks den nöthigen Unterricht in der praktischen Mechanik finden. Inzwischen wird es dem Zwecke einer industriellen Mechanik vollkommen entsprechen, wenn man darin auch Beschreibungen von Anlagen findet, bei welchen alle drei Arten von Maschinen vereint vorkommen, wohin insbesondere die Mühlwerke gehören. Nach meiner Ansicht gehören sie wesentlich in eine industrielle Mechanik: einmal, weil sie einen Hauptzweig der Industrie ausmachen und gerade die unentbehrlich-

sten Fabrikate liefern, wie Mehl, Oel, Dihlen, Papier u. dgl.; fürs Andere, weil sie zur Ergänzung des praktischen Unterrichts im Maschinenwesen wegen der verschiedenen Zusammensetzungen der dreierlei Arten von Maschinen sehr wichtig sind; und fürs Dritte, weil diese höchst wichtige Klasse von Maschinen mancher Verbesserungen bedarf, auf die dabei aufmerksam gemacht werden mufs. Aufserdem verdienen auch mancherlei der Landwirthschaft eigenthümliche Maschinen hier eine besondere Erwähnung. Dieses sind die Grenzen, in die ich mich bei der Unternehmung dieser Arbeit beschränkt habe. Es läfst sich leicht erachten, dafs mancher Leser, der das Heer von Maschinen in dem Dinglerschen Journal, dessen Werth ich wohl zu würdigen weifs, überschaut hat, hier einen Schautplatz erwartet haben wird, auf dem man die Generale etc. bis zum Feldwebel herab würde paradiren sehen. Solche Leser werden sich zwar getäuscht finden, ich bin aber auch fest überzeugt, dafs sie durch diese Vorerinnerungen bald überführt seyn werden, wie wenig sie zu einer solchen Erwartung berechtigt waren, und dafs ich mit einer solchen Kompilation eine höchst unnütze und zwecklose Arbeit unternommen haben würde. Uebrigens übergehe ich in Bezug auf meine Arbeit alle weitere Bemerkungen. Den Zweck eines praktischen Werks habe ich stets vor Augen gehabt, so dafs in Bezug auf theoretische Untersuchungen meine vorigen Schriften durch die gegenwärtige keineswegs entbehrlich gemacht werden. Dasselbe gilt auch von meiner Schrift über höchst wichtige Gegenstände der Technologie, welche durch die vorliegende auf keine Weise verdrängt wird, weil ich viele dortige Gegenstände hier nicht berühre und von Mühlenwerken im zweiten Bande dieses Werks nur die Mechanik der Mühlen bearbeiten werde. Ich mufs meine Leser bitten, durch die Ueberschriften der Kapitel sich nicht zu dem Wahne verleiten zu lassen, als ob sie hier nur in einem anderen Gewande das wieder fänden, was ich über dieselben anderwärts schon gesagt habe. Ich habe alles von neuem überdacht; rein theoretische Lehren mufsten nothwendig zu demselben Resultate führen, wie seit Pythagoras Zeiten der Satz fest steht, dafs die Quadrate der beiden Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks zusammengenommen dem Quadrate der Hypotenuse gleich sind. Aber in Bezug auf Sätze, die mit physischen Erscheinungen zusammenhängen, wird man häufige Abweichungen finden. Von der Differenzialrechnung habe ich keinen andern Gebrauch gemacht, als die leichte Anwendung derselben auf die für die Maschinenlehre so wichtige Erfindung des Maximum. Von verwickeltern analytischen Untersuchungen, die ich anderwärts hinlänglich auseinander gesetzt habe, theile ich hier nur die Resultate mit, insofern solche für praktische Mechanik wichtig sind.

Die Zeichnungen sind von Tab. I. bis XLI., dann noch Tab. XLVI. und XLVII. von meinem Sohne Gustav, die übrigen zum ersten Bande gehörigen von F. L. Hoffmeister, einem hiesigen Privatmanne und Liebhaber der Mathematik, besorgt, und hoffentlich zur Zufriedenheit der Leser ausgeführt worden. Letzterer hat auch die hier angehängten Druckfehler aufgefunden,

Zum leichteren Gebrauche des Werks habe ich ein besonderes Repertorium mitgetheilt, welches häufig statt des Werks selbst benutzt werden kann. Der Index für die Figuren war nöthig, weil manche auf Tafeln vorkommen, wo man sie nicht suchen wird, und wo sie, auf den früheren übergangen, erst späterhin nachgetragen wurden; ich habe ihn dem Repertorium angehängt.

Uebrigens mufs ich noch erinnern, dafs die Verspätung dieses Werks der Herr Verleger zu verantworten hat, da der ganze erste Band schon im Juni des vorigen Jahres (1824) *zum Drucke fertig war und doch nur jetzt die erste Abtheilung dieses ersten Bandes, mit dem Repertorium für beide Abtheilungen, erscheint. Die zweite Abtheilung erscheint nach dem Versprechen des Herrn Verlegers unfehlbar auf Ostern* 1826. *Ich habe diese Arbeit noch am späten Abend meines Lebens unternommen. Möge ihn kein unfreundliches Urtheil trüben!*

***HEIDELBERG** im Oktober* 1825.

K. Chr. v. Langsdorf.

AUSFÜHRLICHES SYSTEM

DER

MASCHINEN-KUNDE

MIT

SPECIELLEN ANWENDUNGEN BEI MANNICHFALTIGEN GEGENSTÄNDEN DER INDUSTRIE

FÜR

DEN PRAKTIKER BEARBEITET.

I. Kapitel.

ALLGEMEINE DYNAMISCHE LEHREN.

§. 1.

Ruhe ist Beharrung an einerlei Stelle; *Bewegung* ist fortdauernde Ortsänderung. *Kraft* ist uns hier, was Bewegung hervorzubringen oder zu verhindern strebt.

Die *Dynamik* (Kräftenlehre) hat in Bezug auf *Ruhe* die Bestimmung des Verhältnisses zwischen den einander entgegenwirkenden Kräften, und in Bezug auf *Bewegung* die Bestimmung des gegenseitigen Verhaltens von Kraft, Zeit und Raum zum Gegenstande.

§. 2.

Unter den Kräften, welche uns die Natur darbietet, haben wir vorzüglich die *Schwere* zu bemerken, vermöge der jeder an einem Faden frei herabhängende Körper den Faden nach einer Richtung spannt, welche verlängert durch den Mittelpunkt der Erde durchgehen würde; wir nennen diese Richtung die *lothrechte* oder *vertikale*. Eine Kugelfläche in der Gegend des Fadens, die den Halbmesser der Erde zum Halbmesser hätte, und auf welche der Faden senkrecht gerichtet wäre, heifst für diese Stelle eine *Horizontalfläche* (auch *wahre Horizontalfläche*), jedes Bogenstück dieser Horizontalfläche, durch welches die Richtung eines so gespannten Fadens durchgeht, eine (wahre) *Horizontallinie*; eine Ebene, welche die wahre Horizontalfläche (die Kugelfläche) an dieser Stelle berührt, eine *scheinbare* Horizontalfläche, und jede von dieser Stelle aus auf dieser Fläche gezogene Linie eine *scheinbare* Horizontallinie für diese Stelle. Auf Strecken von 100 Fufsen sind wahre und *scheinbare* Horizontallinien oder auch Horizontalflächen

von den *wahren*, wie wir in der Folge sehen werden, auch vom schärfsten Auge noch nicht zu unterscheiden.

§. 3.

Ein sehr dünner Faden mit einem kleinen Körper (etwa mit einer kleinen Bleikugel zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Par. Zoll im Durchmesser) an einem feinen Häckchen aufgehängt, macht, wenn der Faden nicht zu hoch (etwa nicht über $\frac{1}{8}$ des Quadranten) aus der lothrechten Richtung erhoben wird, und seine Länge vom Aufhängepunkte bis zum Mittelpunkte des Körperchens 3 Fuſs, 8$\frac{1}{2}$ Linien (Pariser) beträgt, in einer Minute sehr genau 60 *Schläge*, oder 30 Hin- und 30 Rückgänge, d. h. auch 30 *Schwingungen*. Ein solcher Faden mit dem Gewichtchen heiſst daher ein *Sekundenpendel*. Es läſst sich hieraus mittelst Berechnung ableiten, daſs ein *frei* (das heiſst, ohne allen Widerstand) fallender Körper in der ersten Sekunde einen Raum von 15,09 Pariser Fuſsen durchlaufen würde, wofür wir in Bezug auf Bestimmungen für die Maschinenlehre auch 15,1′ setzen können; in den meisten praktischen Anwendungen genügt schon die Zahl 15′.

§. 4.

Je länger ein Pendel ist, desto längere Zeit braucht es, nur einen Schlag zu machen, im Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Länge. Ein Pendel von der neunfachen Länge (9 . 3′ 8,5‴ = 27′ 6″ 4$\frac{1}{2}$‴) braucht 3 Seckunden zu einem Schlage. Uebrigens ist die Länge eines Sekundenpendels, sehr scharf genommen, gegen die Pole hin um etwas weniges gröſser, als in der Nähe des Aequators. Die Schwerkraft wirkt in die Atomen eines Körpers näher gegen die Pole etwas weniges stärker, als näher am Aequator, aber der Unterschied ist höchst unbedeutend und kann in Bezug auf Maschinen gar nicht in Rechnung kommen. Er gründet sich auf die verschiedene Entfernung vom Mittelpunkte der Erde und auf die Wirkung der von der Umdrehung der Erde herrührenden Schwungkraft; beide werden von den Polen gegen den Aequator hin gröſser *). Es hat dieselbe Bewandniſs, wenn wir aus tiefen Thälern auf hohe Berge steigen, nur in diesem Falle in noch geringerem Maaſse.

Auch ist durch Beobachtungen hinlänglich bestätigt, daſs die Zeit eines Pendelschlags, bei völlig freiem Schwunge, von der Materie des am Faden befindlichen Körpers ganz unabhängig ist.

Wir sind daher hier berechtigt, die Schwere als eine *unveränderliche*, überall gleich stark wirkende Kraft anzusehen.

*) Die nachstehende Tafel giebt die Pendellängen, für die verschiedenen Abstände vom Aequator, in Pariser Linien.

Noch legen wir hier die Hypothese zum Grunde, daſs die Schwerkraft eine *absolute* Kraft sey, d. h. daſs sie von Augenblick zu Augenblick immer neue Eindrücke in die Atomen eines Körpers wiederhole, der Körper mag, in welchem Zustande man will, sich befinden, im Zustande der Ruhe oder in irgend welcher Bewegung. Auch ist es eine Hypothese, daſs diese Eindrücke in jedem Augenblick gleich groſs seyen. Aber alle Folgerungen, die aus dieser Hypothese abgeleitet werden, entsprechen den Beobachtungen so genau, daſs wir sie als ausgemachte Wahrheit annehmen dürfen. Darum nennen wir auch die Schwere, welche in die einzelnen Atomen eines Körpers wirkt, eine *unveränderliche absolute Kraft.*

GRADE DER BREITE.	PENDELLÄNGE.	GRADE DER BREITE.	PENDELLÄNGE.	GRADE DER BREITE.	PENDELLÄNGE.
0	439,2000‴	30	439,8000‴	60	441,0000‴
1	439,2007	31	439,8366	61	441,0359
2	439,2029	32	439,8739	62	441,0710
3	439,2066	33	439,9119	63	441,1053
4	439,2117	34	439,9505	64	441,1388
5	439,2182	35	439,9896	65	441,1714
6	439,2262	36	440,0292	66	441,2030
7	439,2356	37	440,0692	67	441,2336
8	439,2465	38	440,1097	68	441,2632
9	439,2587	39	440,1505	69	441,2918
10	439,2724	40	440,1916	70	441,3193
11	439,2874	41	440,2330	71	441,3456
12	439,3037	42	440,2746	72	441,3709
13	439,3214	43	440,3163	73	441,3949
14	439,3405	44	440,3581	74	441,4176
15	439,3608	45	440,4000	75	441,4392
16	439,3823	46	440,4419	76	441,4595
17	439,4052	47	440,4837	77	441,4785
18	439,4292	48	440,5254	78	441,4962
19	439,4544	49	440,5670	79	441,5126
20	439,4807	50	440,6083	80	441,5276
21	439,5082	51	440,6494	81	441,5413
22	439,5368	52	440,6903	82	441,5535
23	439,5664	53	440,7307	83	441,5643
24	439,5970	54	440,7708	84	441,5737
25	439,6287	55	440,8104	85	441,5817
26	439,6612	56	440,8495	86	441,5883
27	439,6947	57	440,8881	87	441,5934
28	439,7290	58	440,9260	88	441,5971
29	439,7641	59	440,9634	89	441,5992
30	439,8000	60	441,0000	90	441,6000

Die Tafel ist nach einer Formel von Herrn *Gauſs* berechnet. Ich bemerke hier noch, daſs nicht blos die mit der Umdrehung der Erde um ihre Axe, sondern auch die mit ihrem *Umlaufe um die Sonne* verbundene Zentrifugalkraft in Betrachtung gezogen werden muſs, wenn man so groſse Genauigkeit verlangt, als die Tafel bei vier Decimalstellen verspricht. Vermöge der letzteren wird unsere Schwere bei Tage vergröſsert, hingegen bei Nacht vermindert

§. 5.

Für die Gröfse dieser absoluten Kraft, mit der die Schwere in die Atomen aller Körper auf unserer Erdfläche wirkt, haben wir aus (§. 3.) ein bestimmtes Maafs. Sie ist so grofs, dafs sie unabänderlich, überall und zu allen Zeiten, jeden Atom bei einem völlig freien Falle, wenn der Widerstand der Luft unbedeutend bleibt, in der ersten Sekunde durch einen Raum von 15,09 Par. Fufse niedertreibt, was mit 15,625 rhl. Fufs gleichgiltig ist. Von dieser *in jeden Atom* mit immer wiederholten neuen Eindrücken wirkenden Kraft hängt das Wachsthum der Geschwindigkeit im Fallen ab; sie heifst daher auch die *beschleunigende Kraft der Schwere.* Diese ist von der *Menge* von Atomen ganz unabhängig, weil sie in den einen wie in den andern wirkt und alle gleichstark niedertreibt. Man setzt sie, wie in der Trigonometrie den Halbmesser, als allgemeines Maafs für andere absolute Kräfte, $= 1$; kommt also eine andere vor, die $= 0,5$ wäre, so ist die Meinung, dafs sie nur halb so grofs sey, als die der Schwere, d. h. dafs sie in jeden Atom nur halb so stark nach irgend einer Richtung wirke, als die Schwere in der lothrechten wirkt, also einen Atom in der ersten Sekunde nur durch $\frac{15,09}{2} = 7,545$ Par. Fufsen bewegen würde.

§. 6.

Von der momentanen Wirkung der Schwere in einen Körper, d. h. von der Summe von einfachen Eindrücken in alle Atomen eines Körpers, die in einem einzigen Momente eintreten, können wir uns in Bezug auf unsere Muskelkraft eine Vorstellung durch das *Gefühl* verschaffen, indem wir den Körper schwebend halten. Wir können übereinkommen, diese Summe von Eindrücken, z. B. bei einem messingenen Würfel von bestimmter Gröfse ein *Pfund* zu nennen, und wir werden bald mit der Anstrengung bekannt, deren wir zur Erhaltung oder Erhebung einer Masse von 1 Pfund bedürfen. Mittelst eines erst noch zu beschreibenden Werkzeugs können wir uns nun auch Massen von 2 = 3 = 10 = 100 = 1000 u. m. Pfunden verschaffen, und wir können uns durch unser Gefühl eine Vorstellung von der Summe von Eindrücken machen, welche bei diesen Massen die Schwere in alle Atomen zusammengenommen macht, so dafs wir uns nun auch einen Begriff davon machen können, was eine Tafel, auf der eine Masse von 2 Pfunden ruhig liegt, von dieser Masse in Bezug auf die Schwere auszuhalten hat.

Wäre diese Masse nicht von der Tafel unterstützt, so müfste sie lothrecht niedersinken; dieses Sinken wird durch die Tafel verhindert, und ihr Widerstand vernichtet in jedem Augenblick den neuen momentanen Eindruck, so dafs jeder neue momentane Eindruck auch durch einen neuen momentanen Widerstand wieder aufgehoben wird. Die Tafel hat also in jedem Augenblick steetig fort immer nur die Summe von *einfachen* Eindrükken auszuhalten, welche die Schwere *mit einmal* in alle Atomen der auffliegenden Masse

macht. Was wir daher bei Erhebung dieser Masse in Bezug auf Anstrengung von Muskelkraft empfinden, ist gleichfalls eine *Summe einfacher Eindrücke* unserer Schwere in alle Atomen der Masse zusammen genommen.

Diese Summe momentaner einfacher Eindrücke, welche irgend eine Kraft in sämmtliche Atomen einer Masse macht, heifst die *bewegende* Kraft der Masse, und in Bezug auf die Eindrücke der Schwere insbesondere das *Gewicht* der Masse.

§. 7.

Man kann sich zwei Massen M, m entweder noch aufser einander, in irgend einer Entfernung getrennt, denken, oder schon in gegenseitiger Berührung. Im letztern Falle nennt man die gegenseitige Wirkung der beiden Massen auf einander, wenn sie vermöge gewisser bewegenden Kräfte auf einander wirken, *Druck;* im erstern kann Wirkung nur durch eine Bewegung erfolgen, durch welche beide Massen in Berührung gebracht werden, da dann im Augenblick der Berührung eine momentane Wirkung erfolgt; diese wird *Stofs* genannt.

§. 8.

Ein frei fallender Körper findet keinen Widerstand in seiner Bewegung; es wird daher von der Summe momentaner Eindrücke, die von der Schwere von Moment zu Moment in ihn gemacht werden, nichts aufgehoben, und da jedes angebliche Zeittheilchen, wenn es nur $\frac{1}{10000}$ einer Sekunde betrüge, schon eine zahllose Menge von Momenten unter sich begreift, so ist mit jeder Fallhöhe eines Körpers allemal schon eine zahllose Menge wiederholter Eindrücke der Schwere in jedem Atom des Körpers verbunden, mit denen er seine Bewegung fortzusetzen srebt. Das Streben zur Bewegung, bei ruhiger Lage auf der Tafel, ist der einmalige Eindruck in die Summe aller Atome oder sein *Gewicht;* man erhält also bei jeder, auch noch so kleinen Fallhöhe, schon die Wirkung einer *zahllosen Vervielfältigung* seines Gewichts. Daher ist die Wirkung des *Stofses* zahllos gröfser als die des *Drucks.* Denn da jeder in *Bewegung* befindliche Körper die seiner Geschwindigkeit entsprechende Wirkung ausüben mufs, *jede* Geschwindigkeit aber durch eine bestimmte Fallhöhe erlangt werden kann, so gilt der Satz von *zahlloser Vervielfältigung* des Gewichts offenbar von jeder Geschwindigkeit oder von jeder Bewegung. Darum zersprengt ein einpfündiger Hammer einen Kieselstein, der ohne die mindeste Aenderung eine Last von hundert Zentnern tragen würde.

So klein daher auch ein körperliches oder materielles Theilchen seyn mag, so kann es durch Geschwindigkeit der Bewegung doch allemal eine Summe von Eindrücken erhalten, die jedem, auch noch so grofsen Gewichte gleich ist, und wir können jeden Atom, für den wir eine bestimmte bewegende Kraft annehmen, als Atom betrachten,

der mit irgend einer Geschwindigkeit in die Stelle gekommen wäre, in der wir ihn betrachten, und der mit dieser Geschwindigkeit seine Bewegung fortzusetzen strebte. Wir werden hiervon in der Folge noch Anwendung machen.

§. 9.

Wenn ein Körper mit unveränderter Summe empfangener Eindrücke irgend einer Kraft seine Bewegung fortsetzt, so heifst seine Bewegung eine *gleichförmige;* er durchlauft dann in gleichen Zeittheilchen auch gleiche Räume.

Der Raum, den ein Körper in einer bestimmten Zeit durchlauft, heifst seine Geschwindigkeit. Wo nichts besonders erinnert wird, versteht man hierunter allemal den Raum für eine *Sekunde.*

Die gleichförmige Bewegung ist also allemal mit unveränderlicher Geschwindigkeit verbunden, und einer bestimmten Geschwindigkeit entspricht allemal eine bestimmte Summe von Eindrücken unserer Schwere. Sie setzt Unveränderlichkeit der Summe von empfangenen Eindrücken voraus. Nimmt diese Summe während der Bewegung ab, so wird die Geschwindigkeit nothwendig *kleiner*, im entgegengesetzten Falle *gröfser;* so lange die Geschwindigkeit steetig abnimmt, heifst die *Bewegung* eine *verzögerte*, im entgegengesetzten Falle eine *beschleunigte;* in beiden Fällen ist sie eine *ungleichförmige.*

Ist der Zuwachs oder die Abnahme von Eindrücken der Zeit proportional, so ist die Zunahme oder die Abnahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeittheilchen gleich grofs, und die Bewegung heifst dann eine *gleichförmig beschleunigte* oder eine *gleichförmig verzögerte.* Bei veränderlichem Wachsthum oder veränderlicher Abnahme der Geschwindigkeit ist die Bewegung eine *ungleichförmig beschleunigte* oder *ungleichförmig verzögerte.*

§. 10.

Da unsere Schwere eine unveränderliche absolute Kraft ist, so ist sie zugleich eine *gleichförmig beschleunigende* Kraft und die, mit Beseitigung alles Widerstandes oder sonst denkbarer Kräfte, blos von den Eindrücken der Schwere herrührende Bewegung ist eine *gleichförmig beschleunigte.* Dasselbe gilt auf gleiche Weise von *jeder* unveränderlichen absoluten Kraft, ihre Eindrücke in die einzelnen Atome mögen nun gröfser oder kleiner seyn als die der Schwere.

Bezeichnen wir nun die vermöge einer solchen Kraft am Ende der ersten Sekunde entstandene Geschwindigkeit mit c die bei fortgesetzter Bewegung am Ende von t Sekunden entstehende mit C, so hat man $c : C = 1 : t$, also

$$1.)\quad C = t \cdot c.$$

Die bei einer solchen Bewegung sich steetig abändernden Geschwindigkeiten fangen mit o, nämlich aus der Ruhe, an, und endigen am Ende der ersten Sekunde mit einer

bestimmten Geschwindigkeit, die wir als noch unbekannt mit x bezeichnen wollen; das arithmetische Mittel ist also für die erste Sekunde $= \frac{1}{2} x$.

Durchlauft nun der Körper in der ersten Sekunde den Raum $\mathfrak{g}$, so würde ein Atom mit der gedachten mittleren Geschwindigkeit in der ersten Sekunde denselben Raum $\mathfrak{g}$ durchlaufen, man hat also $\frac{1}{2} x = \mathfrak{g}$, und

$$2.)\ x = 2\,\mathfrak{g}$$

welches die am Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit wäre.

In Bezug auf unsere *Schwere* ist $\mathfrak{g} = 15{,}09$ Par. Fufs. Wir werden in der Folge, wo wir von den Wirkungen unserer Schwere reden, allemal g statt $\mathfrak{g}$ schreiben, so dafs $g = 15{,}09$ Par. Fufs $= 15{,}625$ rhl. Fufs ist. Zu eben dieser Bezeichnung wird der Buchstabe g von den Schriftstellern aller Nationen gebraucht, nur mit Ausnahme der französischen, die unter g die am Ende der ersten Sekunde eines freifallenden Körpers erlangte Geschwindigkeit verstehen, dafs also bei ihnen $g = 2 \,.\, 15{,}09 = 30{,}18$ Par. Fufs ist.

Wir haben also für jede gleichförmig beschleunigte Bewegung, die mit der Geschwindigkeit o anfängt, am Ende der t^{ten} Sekunde die Geschwindigkeit

$$3.)\ c = t \,.\, 2\,\mathfrak{g}$$

§. 11.

Man denke sich m als eine ungeheuer grofse Zahl (z. B. $= 1$ Zentillion, d. h. 1 mit angehängten 600 Nullen), und nun 1 Sekunde in m gleiche Theilchen getheilt, so durchlauft ein von einer unveränderlichen absoluten Kraft getriebener Atom:

im 1^{ten} Zeittheilchen, wegen der Summe empfangener Eindrücke 1 gewisses Raumtheilchen.
im 2^{ten} Zeittheilchen, wegen der doppelten Anzahl von Eindrücken 2 solche Raumtheilchen.
im 3^{ten} Zeittheilchen, wegen der dreifache Anzahl .. 3 » » »
im m^{ten} — — — — — m » » »

Die Summe aller dieser Raumtheilchen ist $\frac{1}{2} m \,.\, (m + 1.)$ Eine andere Zeit t bestehe aus n solchen Zeittheilchen, so ist auf gleiche Weise die Summe aller in diesen n Theilchen durchlaufenen Raumtheilchen $= \frac{1}{2} n\, (n + 1)$. Daher das Verhältnifs beider Summen

$$= m.\ (m + 1) : n.\ (n + 1)$$
$$= m^2 : n^2$$

weil $\frac{m+1}{n+1}$ von $\frac{m}{n}$ um nichts verschieden ist, wenn wir, wie es eigentlich seyn soll, m und n unendlich grofs nehmen. Es ist aber $m : n = 1 : t$, also, wenn der in t Sekunden durchlaufene Raum mit h bezeichnet wird

$$\mathfrak{g} : h = 1 : t^2$$

und

$$4.)\ h = t^2 \cdot \mathfrak{g}.$$

Daher auch

$$5.)\ t = \sqrt{\frac{h}{\mathfrak{g}}}$$

Auch aus N(o. 3)

$$6.)\ t = \frac{C}{2\,\mathfrak{g}}$$

Demnach $\frac{C}{2\,\mathfrak{g}} = \sqrt{\frac{h}{\mathfrak{g}}}$ oder $\frac{C^2}{4\,\mathfrak{g}^2} = \frac{h}{\mathfrak{g}}$, und nun

$$7.)\ h = \frac{C^2}{4\,\mathfrak{g}}$$

Daher auch

$$8.)\ C = \sqrt{4\,\mathfrak{g}h.}$$

h heiſst *die zur Geschwindigkeit C gehörige Höhe* (*Fallhöhe*), wenn die natürliche Schwere wirkt oder $\mathfrak{g} = g$ ist. Ebenso C *die zur Höhe h* (zur Fallhöhe) gehörige Geschwingkeit.

§. 12.

Da die Geschwindigkeiten eines Atoms zugleich Verhältniſszahlen für die Summe empfangener Eindrücke sind (die wir immer auf Eindrücke unserer Schwere gebracht denken können), diese Eindrücke aber sich wie die Gröſse der sie bewirkenden beschleunigenden Kräfte verhalten, so verhalten sich verschiedene beschleunigende Kräfte nothwendig, wie die in einerlei Zeit durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeiten. Es sey, wenn die beschleunigende Kraft unserer Schwere $= 1$ ist, die einer anderen $= f$, die in der Zeit t durch erstere erlangte Geschwindigkeit $= C$, und die *in derselben Zeit* durch letztere erlangte $= c$, so ist hiernach $f : 1 = c : C$ und

$$9.)\ f = \frac{c}{C}$$

Es ist aber nach No. 3. $c = t \cdot 2\,\mathfrak{g}$, und $C = t \cdot 2\,g$, also auch

$$10.)\ f = \frac{\mathfrak{g}}{g} \text{ und } \mathfrak{g} = fg$$

Ueberdas, wenn *in derselben Zeit* vermöge der Schwerkraft der Raum h
» der Kraft f der Raum $\mathfrak{h}$ durchlaufen wird,

nach No. 8.

$$C = \sqrt{4gh};\quad c = \sqrt{4\,\mathfrak{g}\mathfrak{h}};$$

also $\frac{c}{C} = \frac{\sqrt{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{gh}}$; oder auch $f = \sqrt{f \cdot \frac{\mathfrak{h}}{h}}$; demnach auch

$$11.)\ f = \frac{\mathfrak{h}}{h} \text{ und } \mathfrak{h} = fh$$

In *verschiedenen* Zeiten können verschiedene Atome von *verschiedenen* Kräften getrieben auch *einerlei Geschwindigkeit* erlangen; bezieht sich wie vorher c auf die Wirkung von f, und C auf die Wirkung der Schwere, so wird jetzt $\sqrt{4\mathfrak{g}\mathfrak{h}} = \sqrt{4gh}$, oder $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h} = gh$, also $\frac{\mathfrak{g}}{g} = \frac{h}{\mathfrak{h}}$, wo $\mathfrak{g}$, g die in der ersten Sekunde durchlaufenen Räume sind. Da nun allemal $\frac{\mathfrak{g}}{g} = f$ ist (No. 10.), so hat man im letzteren Falle

$$12.)\quad f = \frac{h}{\mathfrak{h}} \text{ und } h = f\,\mathfrak{h}$$

Wäre c die zur Zeit t gehörige Geschwindigkeit, und C' die zur Zeit $t + t'$ gehörige bei einerlei Kraft f, so hätte man

$$c : C = f \,.\, 2gt : f \,.\, 2g\,(t + t') = t : (t + t') \text{ und}$$

$$13.)\quad C' - c = 2fg \,.\, t'$$

Alle vorstehende Formeln sind aus der Natur der Sache hergeleitet worden, gelten aber nur für die Voraussetzung, dafs während der Bewegung die beschleunigende Kraft f keine Aenderung leide. *)

*) Denken wir uns unter t irgend eine noch wahrnehmbare Zeit, unter t' aber ein sehr kleines Zeittheilchen, das aller Wahrnehmung entgeht, z. B. den centillionsten Theil einer Sekunde, so wird man bei jeder veränderlichen Kraft f, die nämlich am Ende der Zeit $t = f$ war, ihre Aenderung im nächstfolgenden Zeittheilchen t' als *Null* betrachten dürfen. Noch mehr: man wird alle Beschleunigung während dem Zeittheilchen t' ganz aufser Acht lassen können, d. h., wenn die Geschwindigkeit des Atoms am Ende der Zeit $t = c$ war, so wird man für die Bewegung während dem Zeittheilchen t' die Geschwindigkeit c unverändert beibehalten, und den in diesem Zeittheilchen durchlaufenen Raum $= t' \,.\, c$ setzen dürfen, wie für *gleichförmige* Bewegung. Für unendlich kleine Zeit- und Raumtheilchen behalten daher die Formeln

$$\mathfrak{h}' = t' \,.\, c$$
$$c' \text{ (oder } C - c) = 2fg \,.\, t'$$

auch für beschleunigte Bewegungen ihre Richtigkeit.

Setzen wir

den in der Zeit t vermöge der Schwere durchlaufenen Raum $= h$
den in der Zeit $t + t'$ durchlaufenen .. $= H$
den in derselben Zeit t vermöge der Kraft f durchlaufenen $= \mathfrak{h}$
den in der Zeit $t + t'$... $= \mathfrak{H}$

so ist bei unveränderlicher Kraft

$$H = \frac{(t + t')^2 \,.\, h}{t^2};\quad \mathfrak{H} = \frac{(t + t')^2 \,.\, \mathfrak{h}}{t^2}$$

Daher

$$(\mathfrak{H} - \mathfrak{h}) : (H - h) = \mathfrak{h} : h$$

und nun nach (No. 11)

$$f = \frac{\mathfrak{H} - \mathfrak{h}}{H - h}$$

so grofs auch t' seyn mag.

Aber in der Anwendung auf *veränderliche* Kräfte kann diese Formel wiederum nur für ein unend-

§. 13.

Ein Körper, der mit der Geschwindigkeit C sich zu bewegen anfängt, und dem in dieser Bewegung eine unveränderliche absolute Kraft f entgegenwirkt, ist der Wirkung zweier Kräfte ausgesetzt. Vermöge der Anfangsgeschwindigkeit C würde er in der Zeit t den Raum $t.\ C$ durchlaufen. Dieser Bewegung wirkt aber die absolute Kraft f (als eine *verzögernde* Kraft) entgegen, vermöge der er in der Zeit t rückwärts den Raum $t^2 . \mathfrak{g}$ durchlaufen müfste. (§. 11. No. 7.) Er durchlauft also noch *vorwärts* einen Raum $= t . C - t^2 . \mathfrak{g}$. Die zu C gehörige Fallhöhe sey h, so ist $C = \sqrt{4 g h}$ (§. 11. No. 8.), also der gedachte Raum $= t. \sqrt{4 g h} - t^2\, \mathfrak{g}$ oder auch $= t \sqrt{4 g h} - t^2 f g$.

Der Körper würde in der ersten Sekunde durch den Raum $\mathfrak{g}$ zurückgetrieben werden, wenn eine Kraft f in ihn wirkte, und hiermit in t Sekunden die Geschwindigkeit $t.\ 2\mathfrak{g}$ rückwärts erlangen; er bewegt sich also nach t Sekunden noch mit der Geschwindigkeit $c = C - t . 2\,\mathfrak{g}$ vorwärts. Für das Ende der Bewegung müfste also $C - 2 t\, \mathfrak{g} = v$ seyn, oder $t = \frac{C}{2\mathfrak{g}} = \frac{2\sqrt{g h}}{2\mathfrak{g}} = \frac{\sqrt{g h}}{f g}$. Setzen wir diesen Werth statt t in den Ausdruck $t \sqrt{4 g h} - t^2 f g$, und bezeichnen den Raum, welchen der Körper überhaupt bis zum Stillstande zu durchlaufen vermag mit v, so erhalten wir

$$17.)\quad v = \frac{h}{f} = \frac{C^2}{4 f g} = \frac{C^2}{4\,\mathfrak{g}}.$$

lich kleines Zeittheilchen gelten, für welches auch die Differenzen $\mathfrak{H} - \mathfrak{h}$ und $H - h$ unendlich klein werden. Man erhält daher die in aller Strenge richtigen Differentialformeln für eine veränderliche Kraft, die am Ende der Zeit $t = f$ ist,

$$14.)\quad dc = 2 f g . d t$$

$$15.)\quad f = \frac{d\,\mathfrak{H}}{d H} \text{ (nach no. 11.)}$$

$$16.)\quad f = \frac{d H}{d\,\mathfrak{H}} \text{ (nach no. 12.)}$$

Uebrigens liegt bei allen Formeln der Satz zum Grunde, dafs die jedesmalige Geschwindigkeit der Menge erhaltener Eindrücke proportional sey, was bei allen Erscheinungen, bei Wirkungen unserer Schwere aufs Vollkommenste bestätigt wird, und ebendarum auch von allen ähnlich wirkenden Kräften gelten mufs. Mit der wirklich bestehenden Natur unserer Schwerkraft ist jener Satz unzertrennlich verbunden; ohne ihn könnten die wirklichen Erscheinungen unserer Schwere und jeder ähnlich wirkenden Kraft nicht so eintreten, wie sie wirklich erscheinen. Es ist also der Satz $\mathfrak{g} = f . g$, so wie der $dc = 2 f g . dt$ in der jetzigen Natur der Dinge als *nothwendig* gegründet. Ob er absolut nothwendig sey? ob nicht eine andere Einrichtung der Natur möglich gewesen wäre? ob also der Satz $dc = 2 f g . dt$ nicht *zufällig* sey, so dafs z. B. auch $dc = 2 f^2 g . dt$ hätte Statt finden können, wie *Bernoulli* meint, gehört nicht hierher, siehe *Kästners* höhere Mech. 2te Ausg. S. 85.

Ist also, wie bei einem mit der Geschwindigkeit C lothrecht aufwärts geworfenen Körper, $f = 1$, so wird $v = \frac{C^2}{4g} = h$; der Körper steigt bei völlig freier Bewegung zu der Höhe, von welcher er herabfallen müfste, um die Geschwindigkeit C zu erlangen.

§. 14.

Die Bestimmung des Werthes von f ist meistens sehr einfach.

Die Summe einzelner Eindrücke, welche die Schwere in sämmtliche Atome eines Körpers macht, also sein Gewicht oder sein Streben, sich lothrecht zu bewegen, ist eine bestimmbare Gröfse, die wir mit P bezeichnen wollen; die Summe aller Eindrücke, welche eine andere unveränderliche Kraft in dieselbe Atomenmenge, also in dieselbe Masse, macht, mit der also die Masse sich zu bewegen strebt (nach welcher Richtung, ist gleichgültig), sey $= p$; die Gröfse eines einzelnen Eindrucks in einen Atom, von der Schwere bewirkt, also die beschleunigende Kraft der Schwere, sey, wie bisher, $= 1$; die Gröfse eines solchen Eindrucks in einen Atom, von der andern Kraft bewirkt, $= f$, so ist nothwendig $1 : f = P : p$ also

$$18.)\quad f = \frac{p}{P} \text{ und } \mathfrak{g} = \frac{p}{P} \cdot g.$$

§. 14.*

Ein Atom komme in der mit cf (*Fig.* 1.) beschriebenen Kreislinie in m an; man kann sich cf als einen Faden denken, an dessen Ende sich der Atom befände, der sich auf diese Weise um den festen Punkt c herum bewegt; mo sey eine Berührungslinie an m, also senkrecht auf cm, und die Geshwindigkeit des bewegten Punktes $= c$.

Der Atom m hat hier ein Streben, sich nach der Tangente fortzubewegen; würde er vom Faden nicht in seiner Kreisbahn erhalten, so würde er in einem unermeſslich kleinen Zeittheilchen τ z. B. in n ankommen oder das Raumtheilchen $mn = \sigma$ durchlaufen, und sich hiermit um das Stückchen $an = \varrho$ von der Kreislinie entfernen. Dieses wird aber durch die feste Linie ca (den Faden) verhindert. Der Faden muſs also mit einer gewissen Kraft p angespannt werden, die unserer Schwere $= 1$ gesetzt; wie groſs ist diese Kraft?

Wir wollen das Theilchen an als Einheit $= 1$ annehmen, und die Werthe von c und von r oder dem Halbmesser in Bezug auf diese Einheit ausgedrückt (also als unermeſslich groſse Zahlen) ansehen, so ist $mn = \sqrt{(cn^2 - cm^2)}$ oder

$$\sigma = \sqrt{\left((r+1)^2 - r^2\right)} = \sqrt{(2r+1)}$$

was mit

$$\sigma = \sqrt{2r}$$

für einerlei genommen werden kann.

Es ist aber auch:

$$\sigma = c \cdot \tau$$

also

$$c^2 \tau^2 = 2r$$

Ist nun v die zu c gehörige Fallhöhe, so ist $c^2 = 4gv$, also

$$4gv\tau^2 = 2r \text{ oder } 2gv\tau^2 = r$$

und

$$1 : g\tau^2 = 2v : r$$

Nun ist aber 1 das im Zeittheilchen τ. vermöge der Kraft p durchlaufene Raumtheilchen, und $g\tau^2$ das vermöge der Schwerkraft in dem Zeittheilchen durchlaufene Raumtheilchen, und erstere verhält sich zur letzteren wie p zu 1, also

$$18.)^* \quad p : 1 = 2v : r \text{ oder } p = \frac{2v}{r}$$

Der Atom könnte durch verschiedene in ihn wirkende Kräfte auch bestimmt werden, eine andere krumme Linie zu durchlaufen; die höhere Geometrie lehrt aber, daſs dann doch jede Stelle einen eigenen Halbmesser hat, dem die Krümmung an dieser Stelle zugehört, und dieser Halbmesser muſs hier jedesmal für r genommen werden.

§. 14.**

Die Gleichung No. 18* läſst sich auch so ausdrücken:

$$18.)^{**} \quad p = \frac{2 \cdot c^2}{4gr} = \frac{c}{2gr} \cdot c$$

Da nun $\frac{c}{r}$ für alle Atomen eines Körpers gleich groſs bleibt, so folgt:

> Die Kraft p ist in Bezug auf einen im Bogenstück herumlaufenden Körper für jeden Atom seiner Geschwindigkeit also auch dem ihm zugehörigen Halbmesser r proportional. Man kann daher die ganze Masse als in einem einzigen Punkte (dem Schwerpunkte, den wir in der Folge noch kennen lernen) vereint betrachten, da dann der zu diesem Punkte gehörige Halbmesser hier r ist.

§. 14.***

Die Kraft p, mit welcher sich der Körper an einer bestimmten Stelle seines Schwerpunkts vom Mittelpunkte des zu r gehörigen Bogens zu entfernen strebt, heiſst die *Zentrifugalkraft.* Die Kraft, welche dieser in dem gedachten Mittelpunkte entgegenwirkt, heiſst die *Normalkraft*, die vorhin der Zentrifugalkraft gleich war, aber auch gröſser oder kleiner als die Zentrifugalkraft seyn kann, wenn die Anziehungskraft, die den Körper der Berührungslinie zu folgen verhindert, von einer Stelle auſserhalb dem Mittel-

punkte der Krümmung herrührt, wie beim Umlaufe der Erde um die Sonne. Die Gröſse der Kraft gegen den Anziehungspunkt heiſst insbesondere die *Zentripetalkraft*, die im obigen Falle mit der Normalkraft einerlei war, von ihr aber sehr verschieden seyn kann. Im obigen Falle wurde für ein unendlich kleines Zeittheilchen c ganz richtig als unveränderlich angenommen, aber für eine Zeit t von bestimmter, d. h. angeblicher Gröſse, kann sich dieses anders verhalten, so daſs c veränderlich wird und ebendarum der Körper in einer krummen Linie herumlauft, die keine Kreislinie ist. In jenem Falle wirkte nach der Kreislinie oder ihrer Tangente auſser der mit c verbundenen Kraft sonst keine, also keine absolute Kraft, sondern nur die dem Körper mitgetheilte ursprüngliche. Aber bei Bewegungen nach andern krummen Linien wirkt noch nach der Tangente in jeder Stelle eine besondere absolute Kraft, welche die *Tangentialkraft* genennt wird, und die in der Kreisbewegung $= o$ ist. Alle diese Kräfte heiſsen auch wohl *Schwungkräfte;* im engern Sinne versteht man aber unter der *Schwungkraft* nur die *Zentrifugalkraft*. Unter dem *Schwunge* versteht man nach gemeinem Sprachgebrauche auch das Streben zur Fortsetzung der Bewegung um eine Axe.

§. 15.

Wie ein Körper, der sich noch in Ruhe befindet, vermöge der in ihn wirkenden Summe von Eindrücken, irgend einer Kraft, nach Bewegung strebt, die nur durch einen Widerstand verhindert wird; so strebt auch ein schon in Bewegung befindlicher Körper vermöge der schon erhaltenen Summe von Eindrücken, seine Bewegung in jedem Augenblick fortzusetzen. Es entspricht aber jeder Geschwindigkeit eines Atoms eine bestimmte Menge von Eindrücken, die der Atom durch den freien Fall von einer bestimmten Höhe erhält, und diese Summe von Eindrücken ist der Geschwindigkeit proportional, wie diese jener.

Bezeichnen wir also jenes Streben zur Fortsetzung der Bewegung eines Atoms für die Geschwindigkeit C mit K, und für die Geschwindigkeit c mit k, so ist

$$K : k = C : c$$

Besteht nun eine Masse, deren Geschwindigkeit C ist, aus M Atomen, und eine andere, deren Geschwindigkeit c ist, aus m Atomen, und bezeichnen jenes Streben für erstere mit B, für letztere mit b, so wird

$$B : b = M \,.\, C : m \,.\, c$$

Dergleichen Produkte aus einer Masse in ihre Geschwindigkeit heiſsen *Bewegungsmomente.* Da die Atomenmengen verschiedener Massen den Gewichten der Massen proportional sind, so kann man statt M und m auch die Gewichte der Massen setzen; sind diese $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$, so hat man auch

$$19.)\quad B : b = \mathfrak{P} \,.\, C : \mathfrak{p} \,.\, c$$

$\mathfrak{P} . C$ ist das *Bewegungsmoment* oder *Bewegungsvermögen* der Masse $\mathfrak{P}$. Man sieht, daſs

das Bewegungsmoment einer in Bewegung befindlichen Masse nichts anders ist, als eine Verhältnifszahl für die *Summe aller Eindrücke*, welche einer Masse sowohl wegen der Eindrücke, die mit der Geschwindigkeit verbunden sind, als wegen der verhältnifsmäfsigenMenge von Atomen, die der Masse zugehören, mitgetheilt worden sind. Bei einem von einer gleichförmig beschleunigenden Kraft getriebenen Körper nimmt die Summe jener Eindrücke in gleichem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit oder mit der Zeit zu; begegnet er in seiner Bewegung einer hinlänglich widerstehenden Masse, so wirkt er auf diese seinem Bewegungsmomente gemäfs. Man könnte daher sein Bewegungsmoment auch seine *Gewalt* nennen. Diese Gewalt ist in der That nichts anders, als die *bewegende* Kraft, die dem Körper *wegen seiner Bewegung* zukommt. *)

§. 16.

Gleichgrofse Kräfte, welche in die Atomen eines Körpers in gerade entgegengesetzten Richtungen wirken, heben einander auf, vernichten einander; sind die Kräfte ungleich, so mufs Bewegung erfolgen. Dieses Axiom der Mechanik giebt in der Anwendung auf den *centralen* Stofs zweier Körper M und m gegen einander bemerkenswerthe Folgen. Der Stofs ist central, wenn er so erfolgt, dafs keine Umdrehungsbewegung des einen oder des andern Körpers eintreten kann. Wir werden die Bedingung dieses Stofses in

*) Ist die Summe von Eindrücken, welche die Masse $\mathfrak{P}$ im Zustande der Ruhe von irgend einer Kraft empfängt, $= p$, so müfste in Bezug auf Bewegung nach der Richtung dieser Kraft um der Allgemeinheit willen, für die bewegende Kraft

$$B = p + \mathfrak{P} . C$$

gesetzt werden, wo aber C in Bezug auf eine unendlich kleine Einheit, also durch eine unermefslich grofse Zahl ausgedrückt werden müfste. Wir wollen indessen den Sprachgebrauch nicht abändern, und den Ausdruck von *bewegender* Kraft blos für den Zustand der Ruhe beibehalten.

Die Formel $B = \mathfrak{P} . C$ erinnert übrigens an das *Cartesische* und *Leibnizische* Kräftenmaafs. *Cartes* setzte die einem mit der Geschwindigkeit C bewegten Körper beiwohnende Kraft dem $\mathfrak{P}. C$, *Leibniz* hingegen (Act. Erud. 1695. m. Apr. p. 149, 161 u. 162.) dem Produkt $\mathfrak{P}\ C^2$ proportional. Leibniz hat aber in dem Sinne, wie hier alles verstanden werden mufs, offenbar Unrecht. Allerdings erreicht die Masse $\mathfrak{P}$, mit der Geschwindigkeit C aufwärts geworfen, eine Höhe $H = \frac{C^2}{4g}$, und, mit der Geschwindigkeit c geworfen, eine Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$, und es ist $H : h = C^2 : c^2$. Mit der doppelten Geschwindigkeit erreicht der Körper die vierfache Höhe. Er braucht aber auch zur vierfachen Höhe die *doppelte* Zeit, demnach giebt die Reduktion auf gleiche Zeiten nur die doppelte Wirkung. Die Schwerkraft raubt dem steigenden Körper von Moment zu Moment gleichviel von der gesammten ihm beiwohnenden Kraft, bis alle Kraft erschöpft ist. Diese Beraubung bis zur völligen Erschöpfung ist in der doppelten Zeit nothwendig doppelt so grofs, als in der einfachen, also mufs nothwendig mit der Geschwindigkeit C auch doppelt soviel Kraft verbunden seyn, als mit der $c = \frac{1}{2}\ C$, was aber ohnehin schon aus dem bisherigen Vortrage klar ist.

der Folge näher kennen lernen; bei zwei Kugeln giebt die Richtungslinie der Bewegung durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln, einen centralen Stofs.

Bewegt sich die Masse M mit der Geschwindigkeit C, die m mit der c, so sind ihre Bewegungsmomente $M\,C$ und $m\,c$. Ist $M\,C = m\,c$ und stofsen beide central auf einander, ohne dafs aufser den durch die Bewegung mitgetheilten Kräften sich sonst irgend eine Kraft einmischt, so wirken gleiche Summen gleich grofser Eindrücke, also überhaupt gleich grofse Kräfte gegen einander; sie vernichten also einander gegenseitig, und jeder Körper mufs im Augenblick des Stofses ruhig liegen bleiben.

Sind aber beide Bewegungsmomente ungleich, und ist $m\,c$ das kleinere, so geht bei beiden Körpern im Augenblick des Stofses eine Summe von Eindrücken $= m\,c$ verlohren, und für die Masse M bleibt noch $MC - mc$ übrig. Mit diesem Bewegungsmomente strebt also in diesem Augenblick die Masse M ihre Bewegung fortzusetzen. Diese Bewegung ist aber nur unter der Bedingung möglich, dafs die m zugleich mit derselben Geschwindigkeit rückwärts gehe, so dafs jetzt eine Summe von Atomen $= M + m$ nach der Richtung von M in Bewegung ist. Dem Ueberreste von Eindrücken $M\,C - m\,c$ wirkt jetzt keine Kraft mehr entgegen, es kann also bei dieser Bewegung der Atomensumme $M + m$ keiner von den übrig gebliebenen Eindrücken $M\,C - m\,c$ weiter verlohren gehen; sie werden nur in die Atomensumme $M + m$ vertheilt, so dafs aus der Geschwindigkeit C eine kleinere $\mathfrak{C}$ werden mufs, die jetzt beiden Massen zukommt. Das jetzt entstehende Bewegungsmoment $(M + m) \,.\, \mathfrak{C}$ mufs also nothwendig noch dem $MC - mc$ gleich bleiben; man hat daher

$$20.)\quad (M + m) \,.\, \mathfrak{C} = M\,C - m\,c$$

und

$$21.)\quad \mathfrak{C} = \frac{M\,C - m\,c}{M + m}$$

Wäre m vor dem Stofse in Ruhe, so müfste man c also auch $mc = o$ setzen, und man hätte

$$21.)^*\quad \mathfrak{C} = \frac{M}{M + m} \,.\, C$$

Hätte m mit M einerlei Richtung der Bewegung, so ist nur dann ein Einholen des Körpers m möglich, wann $c < C$ ist; dann bewegt sich auch nach dem Stofse, m nach seiner anfänglichen Richtung fort. Es mag nun $m\,c <$ oder $> M\,C$ seyn, so mufs auch noch nach dem Stofse, wobei beide Körper mit einerlei Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ sich nach einerlei Richtung fortbewegen, $M \,.\, C + m \,.\, c = (M + m) \,.\, \mathfrak{C}$ bleiben, weil jetzt im Augenblick des Stofses keine Kräfte einander entgegen wirken, sondern solche sich nach *einer* Richtung mit einander bewegen. Man erhält also in diesem Falle

$$22.)\quad \mathfrak{C} = \frac{M\,C + m\,c}{M + m}$$

Die Ergänzung dieser Lehre siehe unten §. 53.

§. 17.

Das Unvermögen der Körper, als bloſse Masse, ihren Zustand in Bezug auf Ruhe oder Bewegnng zu verändern, heiſst ihre *Trägheit;* Aenderung ihres Zustandes kann nur durch Aenderung der ihnen beiwohnenden Kräfte bewirkt werden. Bloſse Masse ist keine Kraft, sie setzt daher auch für sich keinen Widerstand entgegen, der irgend eine Kraft vernichten könnte, worauf auch die Sätze des vorhergehenden §. beruhen, nach welchen die Trägheit die Geschwindigkeit einer anstoſsenden Masse nur darum mindert, weil die vorhandene Summe eingeprägter Kräfte weder vergröſsert noch verkleinert, sondern nur in eine gröſsere Atomenmenge vertheilt wird. Der Ausdruck *Kraft der Trägheit* (vis inertiae der älteren Physiker) ist daher ohne Sinn.

§. 18.

Wenn wir einen trockenen Schwamm mit den Händen zusammendrücken wollen, so empfinden wir, daſs er dieser Formänderung widersteht; wir überwinden bei hinlänglich starkem Drucke diesen Widerstand. Sobald wir aber den zusammengedrückten Schwamm wieder in freien Zustand versetzen, tritt er wieder in seine ursprüngliche Form zurück; diese der Formänderung entgegen wirkende und im Zustande der Freiheit die ursprüngliche Form wieder herstellende Kraft bemerken wir bei sehr vielen Körpern, nur nicht in gleichem Maaſse; wir nennen sie die *Elasticität.* Der Formänderung sind, bei hinlänglich angewendeter Kraft, alle Materien fähig, nicht aber in gleichem Maaſse auch der Wiederherstellung der ursprünglichen Form bei wieder erfolgtem freien Zustande. Beilegung einer *vollkommenen* Elasticität ist nur bei wenigen Materien gestattet; die meisten sind, in Bezug auf Wiederherstellung ihrer Form, nur mehr oder weniger elastisch. Ein Körper, welcher ohne Zerlegung seiner Theile jeder Formänderung fähig ist, wie feuchter Letten, eine Bleikugel u. dgl., ohne ein Streben zur Wiederherstellung seiner ursprünglichen Form zu äuſsern, heiſst *weich;* ein Körper, der ohne wirkliche Trennung seiner Theile keiner Formänderung fähig ist, heiſst *hart.* Harten Körpern kommt hiernach auch keine Elaticität zu, weil solche ohne mögliche Formänderung nicht denkbar ist. Ob wir aber *vollkommen harte* Körper in der Natur haben, ist eine andere Frage. Jeder Körper widersetzt sich seiner Formänderung mit einer bestimmten Kraft; ist die, welche wir zu dieser Aenderung anwenden, *kleiner* als jener Widerstand, so bleibt der Körper in seiner ursprünglichen Form. So kann also ein Körper in Bezug auf bestimmte Kräfte *hart* genannt werden, der bei angewandter gröſserer Kraft einer Formänderung und dann auch der Wiederherstellung seiner Form fähig ist. Man hat sogar Grund, mit mehreren Physikern zu vermuthen, daſs ein Körper desto mehr elastisch ist, d. h. der vollkommenen Elasticität sich desto mehr nähert, je härter er ist; nur muſs dann gröſsere Kraft, oder

bei dem Körper, welcher Formänderung leiden oder bewirken soll, gröfsere Geschwindigkeit angewendet werden.

Die Kraft des Stofses ist, wie wir gesehen haben, unermefslich viel gröfser, als die des Drucks. *) Die Elasticität einer elfenbeinernen Kugel ist durch Druck nicht kennbar; wir bemerken sie aber bei einem nur leisen Stofse in sehr hohem Grade, wenn wir eine Kugel gegen eine andere stofsen. Die Kugeln leiden bei diesem Stofse, so grofs auch ihre Geschwindigkeit seyn mag, doch keine bedeutende Formänderung. Diese besteht nur in einer momentanen uns unmerkbaren Abplattung an den Berührungspunkten, wo die Theilchen mit derselben Kraft wieder in ihre erste Form zurücktreten, mit der sie ihre Stelle beim Stofse verliefsen; daher sie sich mit derselben Kraft auch wieder gegenseitig zurück stofsen.

Bisher setzten wir diese Kraft ganz bei Seite, als ob die Körper vollkommen hart wären. Setzen wir aber vollkommen elastische Körper voraus, so mischt sich in der Wirkung auch noch die der Elasticität ein, und die Gesetze des Stofses lassen sich nun auch für diese Voraussetzung leicht bestimmen.

Der Körper M bewege sich in der Centrallinie wie vorhin gegen den m mit der Geschwindigkeit C, der m gegen den M mit der Geschwindigkeit c, so ist der Weg, um den sie sich in einer Sekunde einander nähern $= C + c$, welches auch ihre *relative* Geschwindigkeit genannt wird. Mit dieser Geschwindigkeit streben sich beide Körper nach vollendetem Stofse *wegen der Elasticität* auch wieder von einander zu entfernen. Der Körper M verliert hiermit eine Geschwindigkeit $= \frac{m}{M + m} \cdot (C + c)$, es bleibt ihm daher mit Bezug auf no. 21. nur noch die Geschwindigkeit

$$23.)\quad \mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M + m} - \frac{m}{M + m} \cdot (C + c)$$

Des m Geschwindigkeit nach dem Stofse ist

$$\mathfrak{C}' = \frac{mc - MC}{m + M} - \frac{M}{fm + M} \cdot (c + C)$$

Beider Geschwindigkeiten zusammengenommen nach dem Stofse giebt die Summe $= -(C + c)$, wie vor dem Stofse, nur nach entgegengesetzten Richtungen. Für $+ C$ gilt die Richtung von M nach m, für $+ c$ die Richtung von m nach M; $- C$ und $- c$ beziehen sich auf die entgegengesetzten Richtungen, oder auf rückwärts gehende Bewegungen von M und m.

*) Darum läfst sich zwischen *Stofs* und *Druck* auch gar kein Verhältnifs denken. Das Unendliche ist nur durch das Unendliche ausmefsbar. S. unten §.

§. 19.

Rechnungsbeispiele zu diesem Kapitel.

(Widerstand der Luft, wie überhaupt Widerstand jeder Art, wird hier bei Seite gesetzt.)

Zu §. 10. No. 3.) Wie grofs ist die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er 20 Sekunden lang frei herab fällt?

Hier ist $\mathfrak{g} = g = 15{,}09'$; also

$$C = 20 \,.\, 30{,}18 = 603{,}6'$$

Anmerk. Wollte man die Zeit des Falls zu 1 Stunde oder 3600 Sekunden annehmen, so würde man

$$C = 3600 \,.\, 30{,}18 = 108648'$$

finden. Aber um den Fall 1 Stunde lang fortsetzen zu können, müfste der Körper von einer Höhe herabfallen, bis zu welcher die Schwerkraft nicht mehr als unveränderlich angesehen werden könnte. Auf solche Beispiele darf man die Formel 3) nicht mehr anwenden.

Zu §. 10. No. 7.) Von welcher Höhe müfste ein Körper frei herabfallen, um eine Geschwindigkeit von 108648 Pariser Fufs zu erlangen?

Hier ist wie vorhin $\mathfrak{g} = 15{,}09'$; also

$$h = \frac{108648^2}{60{,}36} = \text{beinahe 184 Millionen Fufs}$$

was mehr als 93000 Meilen beträgt, also wenigstens 112 Erdhalbmesser, wo die Schwerkraft nur noch $= \frac{1}{112^2} = \frac{1}{12544}$ also $\mathfrak{g}$ nur noch $= \frac{15{,}09}{12544} = 0{,}0012'$ wäre. Die Frage kann also nicht nach no. 7. beantwortet werden. Doch ersieht man hieraus den Gang der Rechnung in hierher gehörigen Fällen.

Zu §. 13. Wie hoch wird ein Körper steigen, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 60' aufwärts geworfeu wird?

Hier ist $\frac{C^2}{4\mathfrak{g}} = \frac{3600}{60{,}36} = 59{,}6'$

Wie weit wird eine Kugel auf einer horizontalen Tafel fortlaufen, wenn sie durch einen Stofs eine Anfangsgeschwindigkeit $C = 30'$ erhalten hat, und die Reibung eine Hindernifs entgegensetzt, welche $\frac{1}{100}$ vom Gewicht der Kugel beträgt?

Hier ist $f = \frac{1}{100}$, also

$$v = \frac{30^2}{4 \,.\, \frac{1}{100} \,.\, 15{,}09} = \text{1491 Pariser Fufs.}$$

Zu §. 14. An einem Ende einer um eine Rolle gelegten Schnur sey ein Gewicht von 100 ℔, am andern eines von 50 ℔ angebracht; wenn nun Rolle und Schnur als unbedeutend bei Seite gesetzt werden dürfen: nach welchem Gesetze wird hier die Bewegung erfolgen?

Die bewegende Kraft, welche hier Bewegung hervorbringt, ist $= 100 - 50 = 50$ ℔; also $p = 50$.

Die Summe von Atomen, welche von dieser bewegenden Kraft auf gleiche Weise ergriffen werden, ist $100 + 50$, also $P = 150$, folglich

$$f = \frac{50}{150} = \tfrac{1}{3}.$$

Daher $\mathfrak{g} = \frac{1}{3} . 15{,}09 = 5{,}03$ Pariser Fuſs. Demnach sinkt das gröſsere Gewicht (oder steigt das kleinere) in der ersten Sekunde durch einen Raum von 5,03'. in t Sekunden durch einen Raum $= t^2 . 5{,}03'$, und die Geschwindigkeit ist am Ende der t^{ten} Sekunde $= t . 2\mathfrak{g} = t . 10{,}06'$. Um h Fuſse zu durchlaufen, ist eine Zeit $t = \sqrt{\frac{h}{\mathfrak{g}}}$ erforderlich; am Ende der h Fuſse ist die Geschwindigkeit $= \sqrt{4\mathfrak{g}h}$, und um eine verlangte Geschwindigkeit C zu erlangen, muſs jeder Atom, also jeder der beiden Körper einen Raum $= \frac{C^2}{4\mathfrak{g}}$ durchlaufen.

Zu §. 14.* *u.* 14.** 18.)* *u.* 18.)** Der im Mittelpunkte befestigte Faden vermag 10 ℔ zu tragen; wenn nun der daran befestigte Körper etwa mittelst eines Schlags in eine horizontale Umlaufsbewegung gebracht wird, wie groſs darf seine Geschwindigkeit seyn, bis der Faden zerreiſst?

Des Fadens mechanische Länge oder r wird bis zum Schwerpunkte des Körpers gemessen; diese sey $= 2$ Pariser Fuſs, seine Masse in Bezug auf unsere Schwere $= 3$ ℔, so muſs, wenn die bewegende Kraft von 3 ℔ Masse $= 10$ ℔ werden soll, in jeden Atom eine Kraft $= \frac{10}{3}$ wirken, wenn die unserer Schwere $= 1$ gesetzt wird. Es muſs also $p = \frac{10}{3}$ werden, daher $\frac{10}{3} = \frac{2v}{r} = \frac{2C^2}{4gr} = \frac{C^2}{2 . 15{,}09 . 2} = \frac{C^2}{60{,}36}$ u. $C = \sqrt{\frac{603{,}6}{3}} = 14{,}18$.

Zu §. 16. Eine Kugel M von 10 Lothen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $C = 12'$, eine andere m von 8 Lothen mit der Geschwindigkeit $c = 20'$, beide mit ihren Mittelpunkten in *einer* geraden Linie einander gerade entgegen: wie werden sich M und m nach dem Stoſse bewegen?

Für die Bewegung von M ist nach dem Stoſse (21.)

$$\mathfrak{C} = \frac{10 . 12 - 8 . 20}{10 + 8} = -\frac{40}{18} = -2\tfrac{2}{9} \text{ F.}$$

M bewegt sich also nach dem Stoſse mit einer Geschwindigkeit von $2\frac{2}{9}$ Fuſsen *rückwärts*, und m setzt seine Bewegung *vorwärts* fort, mit der Geschwindigkeit von $2\frac{2}{9}$ F.

Zu §. 18. No. 23.) Dieselben Körper seyen elastisch: wie werden sie sich nach dem Stoſse bewegen?

Die Geschwindigkeit von M nach dem Stofse ist jetzt

$$\mathfrak{C} = -2\tfrac{2}{9} - \frac{8}{10+8} \cdot (12+20) = -16\tfrac{4}{9}\ \text{F.}$$

Die Geschwindigkeit von m ist nach dem Stofse

$$= 2\tfrac{2}{9} - \frac{10}{8+10} \cdot (20+12) = -15\tfrac{5}{9}\ \text{F.}$$

Beide Körper springen also nach dem Stofse zurück:

der M mit einer Geschwindigkeit $= 16\tfrac{4}{9}$ F.

m — — — — — — $= 15\tfrac{5}{9}$ F.

Anmerk. Es gilt wohl gleichviel, ob die ganze Gewalt des Stofses zur Formänderung nur *eines* von beiden Körpern, oder zur Formänderung von beiden zugleich verwendet wird. In jenem Falle ist die Formänderung bei dem einen Körper desto bedeutender, und das Streben zur Entfernung nach dem Stofse, wie im letzteren der relativen Geschwindigkeit $C + c$ angemessen, die in beide Massen vertheilt wird. Sind nun die Massen unvollkommen elastisch, ihre Elasticität < 1, indem wir die vollkommene $= 1$ setzen, und bezeichnen wir die *gröfsere* Elasticität mit E, so hätte man allgemeiner

$$24.)\quad \mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M+m} - \frac{m}{M+m} \cdot E \cdot (C+c)$$

für die Geschwindigkeit von M nach dem Stofse.

Für den m wäre

$$25.)\quad \mathfrak{C} = \frac{mc - MC}{m+M} - \frac{M}{m+M} \cdot E \cdot (C+c).$$

Hieraus gäbe sich nach (no. 24)

$$26.)\quad E = \frac{MC - mc - (M+m) \cdot \mathfrak{C}}{m \cdot (C+c)}$$

Wirkliche Versuche, bei welchen M, m, C und c gegebene Gröfsen wären und $\mathfrak{C}$ gefunden würde, gäben dann E. Am bequemsten nimmt man dabei $M = m$, $C = c$ und beide Körper gleichartig, so dafs auch beide gleiche Elasticität haben müfsten. Ein Versuch gäbe $\mathfrak{C}$, und dann

$$E = -\frac{\mathfrak{C}}{C}$$

oder, die entgegengesetzten Richtungen der Bewegung vor und nach dem Stofse bei Seite gesetzt,

$$27.)\quad E = \frac{\mathfrak{C}}{C}.$$

Bei einem solchen Versuche läſst man die beiden Kugeln als Pendeln gegen einander schlagen. Man miſst dann den Winkel, um welchen ein solches Pendel zuerst erhoben wird, und dann auch den, um welchen es wieder zurück springt; ist jener $= \alpha$, dieser $= \beta$, die Pendellänge $= \lambda$, so ist

$$C = \sqrt{4g \cdot \lambda \cdot (1 - Cos.\,\alpha)},\ \mathfrak{C} = \sqrt{4g \cdot \lambda \cdot (1 - Cos.\,\beta)}$$

also

$$28.)\quad E = \frac{\sqrt{(1 - Cos.\,\alpha)}}{\sqrt{(1 - Cos.\,\beta)}}$$

II. Kapitel.

AEQUIVALENTE BEWEGENDE KRAEFTE. DAS KRAEFTEN-PARALLELOGRAMM, DIE SCHIEFE EBENE UND DER HEBEL.

§. 20.

Gleiche in gerader Linie einander gerade entgegengesetzte bewegende Kräfte, an einem Atome angebracht, erhalten einander nothwendig im Gleichgewicht. Dieses gilt also auch noch von einem Körper; er beharrt in Ruhe, wenn alle seine Atome von gleichgroſsen Kräften nach entgegengesetzten Richtungen angegriffen werden, und ein Körper, der sich im Zustande der Ruhe befindet, bleibt daher noch in Ruhe, wenn er von zwei Seiten nach gerade entgegengesetzten Richtungen gleichgroſse centrale Stöſse erhält, deren Bewegungsmomente nämlich gleich groſs sind.

Ein ruhig liegender Atom, der nach gerade entgegengesetzten Richtungen von ungleichen Kräften angegriffen wird, kann nicht in Ruhe beharren. Er muſs nothwendig der Richtung der gröſseren Kraft folgen. Dasselbe gilt von einem Körper, wenn von einer Seite her in durchaus parallelen Richtungen alle Atomen von gleichen Kräften angegriffen werden, von der andern aber geringere, jedoch gleichfalls gleichgroſse Kräfte angegriffen werden, von der andern aber geringere, jedoch gleichfalls gleichgroſse Kräfte in dieselben Atomen gerade entgegen wirken. Der Körper muſs vermöge des Ueberschusses der gröſseren Summe von Kräften nach ihren Richtungen in Bewegung kommen. Ist die Summe von Eindrücken von der einen Seite $= P$, die entgegengesetzte kleinere $= p$, und des Körpers Masse $= \mathfrak{P}$, wo alles z. B. in Pfunden ausgedrückt seyn kann, so muſs sich der Körper mit einer beschleunigenden Kraft

$$f = \frac{P - p}{\mathfrak{P}} \quad \text{(No. 18.)}$$

wirklich bewegen.

§. 21.

Sind mehrere Kräfte an *einem* Atome nach verschiedenen Richtungslinien, die nicht in eine einzige gerade fallen, angebracht, so kann der Atom nicht in Ruhe beharren; er muſs sich nach irgend einer dritten Richtung bewegen, wenn ihm nicht in dieser Linie ein hinlänglicher Widerstand entgegen gesetzt wird.

M N (*Fig.* 2.) sey eine steife Ebene, von welcher Gröſse man will; *a b* sey eine in derselben genommene gerade Linie, und nun an einem Atome in *b* eine bewegende Kraft *P* nach *b a* angebracht, so kann die Ebene nur dann in Ruhe beharren, wenn irgendwo in der steifen Linie *b a* eine gleiche *P* nach entgegengesetzter Richtung *a b* angebracht wird, diese entgegengesetzte Kraft mag nun in *c*, oder in *d* oder in welchem Punkte der steifen Linie man will, angebracht werden. Beide Kräfte sind, nach der Voraussetzung, im Zustande der Gleichheit und der entgegengesetzter Richtungen, d. h. im Zustande des Gleichgewichts, können also den Zustand der Ebene nicht abändern; sie haben auf diese Aenderung nicht den mindesten Einfluſs.

Es ist offenbar gleichgültig, ob wir uns den nach *b a* von der Kraft *P* angegriffenen Atom in *b*, oder in *c*, oder in *d* u. s. f. in der steifen Linie denken, wie es auch in Bezug auf die nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft *P* gleichgültig ist, in welcher Stelle wir uns solche angebracht denken mögen. Die Wirkung auf die Ebene bleibt immer $= o$.

§. 22.

Die feste Ebene *M N* (*Fig.* 2) sey in dem festen Punkte *C* so befestiget, daſs sie zwar an dieser Stelle nicht tiefer sinken, sich aber frei um solche herum drehen kann. Ist nun *C d* auf *a b* senkrecht, und wird irgendwo in der geraden *a b* ein Atom von einer Kraft *P* nach der Richtung *b a* angegriffen, so muſs sich die Ebene um den Punkt *C* herum drehen; es erfolgt *Umdrehungsbewegung*, die für die Mechanik von gröſster Wichtigkeit ist. Aber diese Umdrehungsbewegung wird vernichtet, aller Einfluſs auf Zustandsänderung der Ebene aufgehoben, sobald irgendwo in der geraden *a b* nach der Richtung *a c* eine gleiche Kraft *P* angebracht wird. Es gilt also gleichviel, ob der nach *b a* angegriffene Atom in *b*, oder in *c* oder in *d* liegt.

§. 23.

Man denke sich in der festen Ebene *M N* in *C* einen unverrückbaren Umdrehungspunkt, in der geraden *m a*, z. B. in *b* eine Kraft *P* nach *m a*, und in *c* nach *n g* eine Kraft *p*, so gilt es gleichviel, wo man den angegriffenen Atom in *a m* und in *g n* annehmen will, man kann ihn also auch im gemeinschaftlichen Punkte *e*, wo beide Richtungslinien einander durchschneiden, annehmen. Die Wirkung auf die Ebene ist also ganz dieselbe, als wäre am Atom in *e* die Kraft *P* nach *e a*, und die *p* nach *e g* angebracht.

Offenbar kann die Stelle *e*, also auch die ganze Ebene nur dann in Ruhe beharren, wenn die aus beiden Kräften entstehende mittlere Kraft nach *e C* wirkt, weil die Stelle *C* die einzige unverrückbare ist, jede andere aber sich um *C* drehen kann. Sind nun *Cd* und *Cf* auf *a m* und *n g* senkrecht, so ist jener Fall nur dann möglich, wann

$$Cd \times P = Cf \times p$$

wird, wie wir sogleich sehen werden.

§. 24.

Wirken zwei Kräfte (*Fig.* 4.) *P* und *p* nach *m a* und *m b*, unter dem Winkel *a m b*, auf den Atom *m*, so schneide man *m n* und *m w* in dem Verhältnisse *P* : *p* ab, und ergänze das Parallelogramm *m n o w*. Dieses heifst das *Kräftenparallelogramm*, und *mn*, *m w* (z. B. *m n* = 5 Zolle, wenn *P* = 5 ℔, und *m w* = 7″ wenn *p* = 7 ℔ wäre) die *Seitenkräfte*.

Die Diagonale *m o* ist die *mittlere* oder *effektive* Kraft der Gröfse und Lage nach, wie wir sogleich beweisen werden.

Nach unserem obigen Vortrage entsprechen den in den Atom *m* wirkenden Kräften *P* und *p* nach *m a* und *m b* die Geschwindigkeiten *c* und *C*, die sich wie *P* und *p* verhalten. Nehmen wir also die *m n* : *m w* = *c* : *C*, so hat man zugleich *m n* : *m w* = *P* : *p*.

Vermöge der Kraft *P* ist der Atom *m* bestimmt, der geraden $\gamma\,\alpha$, und vermöge der *p* ist er bestimmt, der geraden $\gamma\,\beta$ parallel mit den Geschwindigkeiten *c* und *C* sich zu bewegen. Er durchläuft die Räume *m n* und *m w* mit diesen verschiedenen Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten.

Ergänzen wir das Parallelogramm *m n o w*, so mufs sich, wenn beide Kräfte zugleich wirken, der Atom *m*, am Ende der Zeiteinheit, auf die sich *C* und *c* beziehen, nothwendig in *o* befinden, weil hiermit beiden Bewegungen vollständig Genüge geschehen ist; der von ihm durchlaufene Raum *m o* bezeichnet also jetzt die mittlere Geschwindigkeit, oder *mn* : *mo* und *mw* : *mo* bezeichnen die Verhältnisse der *Seitengeschwindigkeiten*, zur *mittleren*, folglich auch die *Verhältnisse* der *Seitenkräfte* zur *mittleren*. Bezeichnen wir diese mittlere Kraft mit 𝔐, so wird die Ebene bei *m* von einer Kraft 𝔐 nach der Richtung *m o* angegriffen, die jenen beiden *P* und *p* zusammengenommen *äquivalent ist;* man kann sie beide wegnehmen, und dafür die 𝔐 nach *m o* anbringen.

Ist *o* ein fester Umdrehungspunkt, der unverrückbar ist, so mufs die Ebene in ihrer Lage ruhig beharren.

Der Erfolg bleibt ganz derselbe, wenn *P* und *p* in *v* oder *z* nach *v a*, *v b* oder *z a*, *z b* angebracht wären. Werden *a z*, *a v* und *b z*, *b v* hier nach oben verlängert, bis sie sich schneiden, so giebt sich die Stelle *m*; schneidet man dann auf *m a*, *m b* die *m n* und

mw so ab, daſs $mn : mw = P : p$ wird, und ergänzt das Parallelogramm $mnow$, so hat man das *Kräftenparallelogramm;* mo ist dann Richtung und Gröſse der mittleren Kraft. Ist o ein unverrückbarer Umdrehungspunkt, so muſs die Ebene in Ruhe beharren.

§. 25.

In der Ebene MN (*Fig.* 5.) sey in n nach nq die Kraft p, und in o nach os die P angebracht; mk sey senkrecht auf qna, und mg senkrecht auf die soa, so beharrt die Ebene, welche sich um den unverrückbaren Punkt m frei herum drehen kann, in Ruhe, wenn

$$p \,.\, km = P \,.\, mg \text{ ist.}$$

Bew. Man verlängere die qn und so, bis sie einander in a schneiden, und ziehe die ma; durch a ziehe man senkrecht auf ma die vw. Jetzt schneide man die ad und ah so ab, daſs $ad : ah = p : P$ werde, und verzeichne die Rektangeln $afhc$ und $aedb$.

Beide Kräfte kann man sich in a angebracht denken. Weil nun ah die P bezeichnet, so sind af und ac die äquivalenten Seitenkräfte, und ebenso ab und ae die *äquivalenten* von ad oder von p.

Die af und ac bezeichnen die Pressungen oder bewegenden Kräfte nach am, die von dem unverrückbaren Punkte m aufgehoben werden; ab und ac aber sind einander gerade entgegengesetzte Kräfte, welche die Diagonale am um den Punkt m zu drehen streben.

Soll also auch keine Umdrehung erfolgen, und die Ebene in Ruhe beharren, so muſs $ab = ac$ seyn.

Es ist aber

$$ab : ad = km : am$$

$$ah : ac = am : gm$$

also

$$ab \,.\, ah : ad \,.\, ac = km : gm$$

und

$$ab : ac = ad \,.\, km : ah \,.\, gm$$

folglich für die Bedingung des Gleichgewichts

$$ad \,.\, km = ah \,.\, gm$$

oder

$$29.) \quad p \,.\, km = P \,.\, gm$$

§. 26.

Denkt man sich in einer Ebene einen unverrükbaren Umdrehungspunkt wie m (*Fig.* 5), und nun an ein paar Atomen (wie n, o) in derselben Ebene die Kräfte p, P so ange-

bracht, daſs sie die geraden unbeugsamen Linien mn und mo um die Stelle m herum zu drehen streben, so nennt man dieses System von Punkten einen *mathematischen Hebel*, bei dem nun verschiedene Modifikationen statt finden.

1. Die einfachste Darstellung ist die *Fig.* 6. Hier liegen die drei zum Hebel wesentlich erforderlichen Punkte n, m, o in einer geraden Linie no, und die Richtungslinien der Kräfte P und p machen mit den vom Umdrehungspunkte ausgehenden Linien rechte Winkel; diese Linien mn, mo heiſsen allemal, bei allen Modifikationen, *Aerme*, *Hebelärme*, welche hier auf verschiedenen Seiten des Punktes m liegen. Dieser Punkt heiſst allemal der *Umdrehungspunkt* oder auch der *Ruhepunkt*, und dieser Hebel ein *geradliniger zweiseitiger* Hebel (vectis heterodromus), auch *geradliniger Hebel der ersten Art.*
2. Die Darstellung (*Fig.* 7.) ist nur darin von der vorigen verschieden, daſs die Stellen n und o, in welchen die Kräfte P und p nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben auf einerlei Seite des Umdrehungspunktes m liegen. Dieser Hebel heiſst daher ein *einseitiger* geradliniger Hebel (vectis homodromus), auch geradliniger Hebel *der andern Art.* Er hat wie der vorige zwei Aerme.
3. Die Kräfte P, p können auch an vorigen beiden Arten unter schiefen Winkeln angebracht seyn. Ein Beispiel giebt *Fig.* 8.
4. Die Aerme mn, mo können unter einem Winkel nmo gegen einander geneigt seyn, und die Kräfte an ihnen nach senkrechten oder schiefen Linien wirken, wie *Fig.* 9. Ein solcher Hebel heiſst ein *Winkelhebel*, auch ein *gebrochner Hebel.*
5. Auch können mehrere Kräfte, d. h. Kräfte an mehr als zwei Punkten angebracht werden, wie *Fig.* 10. bei einem zweiseitigen, und *Fig.* 11. bei einem einseitigen Hebel, wo die Kräfte P und Q den Kräften p und q entgegen wirken. Hiermit erhält man einen *vielarmigen geradlinigen* Hebel, weil man hier vier Aerme hat, nm, Nm, om, Om (*Fig.* 11.), oder auch einen *vielarmigen Winkelhebel* wie *Fig.* 12.

§. 27.

Nach §. 25. sind Kräfte an einem Hebel *äquivalent*, wenn die Produkte aus den Kräften in die Entfernungen des Umdrehungspunktes von den Richtungslinien der Kräfte gleichgroſs sind.

Dieser Satz spricht das *Gesetz des Hebels* aus. Das Produkt aus einer Kraft in die Entfernung des Umdrehungspunktes von der Richtungslinie der Kraft heiſst das *statische Moment* der Kraft. Sollen z. B. die einander entgegenwirkende Kräfte *Fig.* 8, 9 und 10 einander äquivalent seyn, so muſs

$$P \,.\, mv = p \,.\, mw$$
$$P \,.\, mn + Q \,.\, mN = p \,.\, mw + q \,.\, mW$$

seyn; und dann erhalten die Kräfte einander im Gleichgewicht, wenn sie mit gleichen Summen statischer Momente einander entgegen wirken. Zur Abkürzung kann man die statischen Momente auch *Drehkräfte* nennen.

§. 28.

Ein Hebel, wie $n\,m\,o$ *Fig.* 8, an welchem die Kräfte nach $n\,P$ und nach $o\,p$ angebracht sind, kann nur dann in Ruhe erhalten werden, wann die *mittlere Richtung* $a\,m$ in m gehörig unterstützt ist, so daſs die Stelle m nicht nach $a\,m$ verrückt werden kann, und wann überdas $P \,.\, m\,v = p \,.\, m\,w$ ist.

Schneidet man $a\,\beta$, $a\,\alpha$ so ab, daſs $a\,\alpha : a\,\beta = P : p$ wird (z. B. $a\,\alpha = 5$ Zoll, $a\,\beta = 7$ Zoll, wenn $P = 5$ ℔, $p = 7$ ℔ ist), so bezeichnet $a\,\gamma$, nach demselben Maaſsstabe gemessen, die Gröſse des Drucks, welchen die Stelle m nach $a\,m$ auszuhalten hat.

Dasselbe gilt vom Winkelhebel $n\,m\,o$ (*Fig.* 13); ist hier $a\,\alpha : a\,\beta = P : p$, so ist keine Umdrehungsbewegung möglich, wofern $P \,.\, m\,v = p \,.\, m\,w$ ist, und keine fortrükkende Bewegung, wenn die Stelle m nach $a\,m$ den Druck $a\,\gamma$ auszuhalten vermag.

Denkt man sich $n\,m$, $m\,o$, $o\,n$ als drei steife Linien, so würde der mittlere Druck nach $a\,m$ durch ε durchgehen; wäre also die $n\,o$ in ε so unterstützt, daſs sie nach $a\,m$ einen Druck $= a\,\gamma$ aushalten könnte, so würde, wenn $P \,.\, m\,v = p \,.\, m\,w$ wäre, der Hebel $n\,m\,o$ gleichfalls in Ruhe beharren; ε ist der *Mittelpunkt* des Drucks, den die gerade Linie $n\,o$ von den Kräften P und p leidet.

§. 29.

Die beiden Dreiecke $a\alpha\gamma$ und $a\beta\gamma$ sind allemal kongruent, sind γx und γy Perpendikel, so folgt $\gamma x \,.\, a\alpha = \gamma y \,.\, a\beta$; oder $\gamma x \,.\, P = \gamma y \,.\, p$, also auch $mv \,.\, P = mw \,.\, p$.

Ist also die Diagonale jenes Parallelogramms hinlänglich unterstützt, so ist keine Bewegung möglich.

Sobald daher die Kräfte P, p mit ihren Richtungslinien gegeben sind, ist auch der Unterstützungspunkt bestimmt, für welchen Gleichgewicht und Ruhe der Hebellinie *möglich* und zugleich *nothwendig* werden.

$d\,c\,e$ sey eine gebrochene Linie (*Fig.* 14.), an welcher in d und e nach $d\,P$ und $e\,p$ Kräfte P und p angebracht sind, so läſst sich fragen, wo diese Linie unterstützt werden müsse, um den so entstehenden Hebel in Ruhe zu erhalten?

Er bleibt in Ruhe, wenn man $a\alpha : a\beta = P : p$ nimmt, dann das Parallelogramm $a\alpha\gamma\beta$ verzeichnet, und nach der Richtung der Diagonale $a\gamma$ die am zieht. Hiermit wird $P \,.\, mv = p \,.\, mw$, also die Umdrehungsbewegung unmöglich gemacht; und es ist nichts weiter nöthig, als daſs die Stelle w so unterstützt werde, daſs sie in der Richtung am nicht nachgeben könne. Man erhält hiermit eigentlich den Winkelhebel dme, der

nunmehr in Ruhe beharrt, und dieser reducirt sich auf den geradlinigen $d\varepsilon c$, der nun gleichfalls im Zustande der Ruhe erhalten wird, wenn man ihn in ε unterstützt. Hier ist also wieder ε der Mittelpunkt des Drucks zwischen d und c.

§. 30.

Die Hebellinie ab sey in a, c, d und b (*Fig.* 15) nach den Richtungen aO, cP, dQ und bR von Kräften O, P, Q, R angegriffen: man soll den Mittelpunkt m des Drucks, die Gröſse und Richtung des mittlern Drucks angeben.

Auflösung. Man nehme $a\alpha = O$, $c\delta = P$, $d\varepsilon = Q$, $b\theta = R$, und ziehe die βa, γc, ζd, ηb auf die ab senkrecht, die $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, $\eta\theta$ der ab gleichlaufend.

Ist nun m der Mittelpunkt des Drucks, und mn, senkrecht auf ab, $= a\beta + c\gamma + d\zeta + b\eta$; on, senkrecht auf mn, $= \alpha\beta + \delta\gamma + \varepsilon\zeta - \eta\theta$, so ist mn der senkrechte Druck auf ab in m, mo die Richtung und Gröſse des mittlern Drucks in m, und no die Kraft, mit welcher die Linie ba nach ihrer Richtung ba gezogen wird.

Läſst man die Hebellinie um a drehen, so ist in Bezug auf diesen Umdrehungspunkt die Summe der statischen Momente

$$= ca \,.\, c\gamma + da \,.\, d\zeta + ba \,.\, b\theta$$

Weil nun eine Kraft S in m angebracht allen angebrachten O, P, Q, R, äquivalent seyn soll, so hat man

$$ma \,.\, mn = ca \,.\, c\gamma + da \,.\, d\zeta + ba \,.\, b\theta$$

also

$$ma = \frac{ca \,.\, c\gamma + da \,.\, d\zeta + ba \,.\, b\theta}{mn}$$

oder auch

$$30.)\quad ma = \frac{ca \,.\, P \,.\, Sin\,\delta + da \,.\, Q \,.\, Sin\,\varepsilon + ba \,.\, R \,.\, Sin\,\theta}{O \,.\, Sin\,\alpha + P \,.\, Sin\,\delta + Q \,.\, Sin\,\varepsilon + R \,.\, Sin\,\theta}$$

womit die Stelle des Mittelpunkts des Drucks bestimmt ist. Alles bleibt in Ruhe, wenn m ein unbeweglicher Punkt ist.

§. 31.

Sind alle Richtungslinien unter sich gleichlaufend, alle Kräfte unter einerlei Winkel α an der Hebellinie angebracht, so wird

$$31.)\quad ma = \frac{ca \,.\, P + da \,.\, Q + ba \,.\, R}{O + P + Q + R}$$

und die mittlere Richtung mo bildet dann mit der ab gleichfalls den Winkel α.

Dann hängt also die Gröfse *ma* blos von den Kräften *O, P, Q, R*, und den Entfernungen der angegriffenen Punkte von der Stelle *a* ab; der Winkel α hat in diesem Falle, wie aus No. 31 erhellet, auf den Werth von *ma* keinen Einflufs.

Sind die Kräfte Eindrücke der Schwere, wie wenn *O, P, Q, R* angehängte Gewichte wären, so heifst der Mittelpunkt des Drucks insbesondere der *Schwerpunkt* (centrum gravitatis.)

§. 32.

Der Schwerpunkt einer Reihe von Atomen in gerader Linie liegt nothwendig in ihrer Mitte.

Liegen mehrere solche Reihen in einer Ebene unmittelbar neben einander, so bilden die Mittelpunkte dieser Reihen eine gerade, gebrochene oder krumme *Schwerpunktslinie*. Denkt man sich z. B. das Fünfeck (*Fig.* 16) *abcde* von *ae* bis *c* aus lauter neben einander liegenden Atomenreihen gebildet, und geht die punktirte *nmoc* durch die Mitte aller dieser Reihen durch, so ist *nmoc* eine Schwerpunktslinie, die aus drei geraden *nm*, *mo* und *oc* zusammengesetzt ist. Jetzt sind aber die Atome von *n* bis *m*, und so auch die von *m* bis *o* und von *o* bis *c* ungleich belastet. Allemal giebt es aber doch für *nm* einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt z. B. *v*, und so auch für die *mo* einen *t*, und für die *oc* einen *w*.

Man hat jetzt dasselbe, als hätte man, an der gebrochenen Linie *nmoc* in *v*, *t* und *w* Gewichte, die den zugehörigen Flächen proportional wären. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser Punkte oder der gebrochenen *vtw* wird nach vorigem §. bestimmt.

Es giebt aber unzählige solche Schwerpunktslinien, nachdem man die parallelen Reihen von Atomen ordnen will.

Z. B. *Fig.* 17 ist *vtw* die Schwerpunktslinie, wenn *v*, *t*, *w*, die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke sind.

Es ist dasselbe, als wären in *v*, *t* und *w* Gewichte angebracht, die den Dreiecken *abe*, *ebd* und *bdc* proportional wären.

Eine Reihe unmittelbar an einander liegender Atomenschichten bildet einen Körper oder ein System von Atomenschichten. Eine Linie durch die Schwerpunkte aller Schichten dieses Systems ist wiederum eine Schwerpunktslinie deren Schwerpunkt eine bestimmte Lage hat. Dieser Schwerpunkt ist dann der Schwerpunkt des ganzen Systems. Wird dieser durch eine unbeugsame lothrechte Linie unterstützt, so ist keine Umdrehungsbewegung des Körpers möglich, die Schwerpunktslinie mag übrigens in welcher Neigung man will auf dieser Unterstützungslinie aufliegen.

Im ruhigen Zustande, wo nämlich jener Schwerpunkt unterstützt ist, kann man sich nun auch unzählige andere Systeme paralleler Atomenschichten denken, die denselben

Körper bilden. Für jedes andere System mufs aber derselbe Schwerpunkt Statt haben, weil bei einer bestimmten Lage des Körpers, man mag ihn aus dieser oder aus jener parallelen Schichtenreihe zusammengesetzt denken, nur die Unterstützung eines einzigen Punktes die Umdrehungsbewegung verhindern kann.

Es müssen also alle mögliche Schwerpunktslinien, die Schwerpunktslinien aller möglichen Systeme paralleler Atomenschichten desselben Körpers, einander nothwendig in einem gemeinschaftlichen Punkte durchschneiden, welcher der *Schwerpunkt des Körpers* ist.

§. 33.

Unterstützung des Mittelpunkts des Drucks, oder seine Unverrückbarkeit nach der Richtung der mittleren Kraft, wie nach mo (*Fig.* 15), verhindert blos *Umdrehungsbewegung*, sichert aber die Hebellinie noch nicht gegen alle Bewegung, da dort no die Gröfse der Seitenkraft bezeichnet, mit der die Hebellinie nach ba abzugleiten strebt. Es mufs also der Punkt m, wenn alles in Ruhe beharren soll, auch nach ma gegen die Möglichkeit einer Verschiebung gesichert werden.

Eine Kraft nach ms, in der Verlängerung von om, die $= om$ wäre, sichert die vollständige Ruhe; sie hebt nicht nur das Streben der Stelle nach mo auf, sondern auch das Streben nach ma, denn die Verzeichnung des Kräftenparellelogramms $mtsu$ giebt $mu = mn$ und $mt = no$, also gleiche entgegengesetzte Kräfte an m.

Wären alle Richtungen $a\alpha$, $c\delta$, $d\varepsilon$ und $b\theta$ lothrecht, so wäre auch die mittlere mo lothrecht, also auch die ms; jetzt bliebe also das ganze System, an einem lothrechten Faden ms getragen oder aufgehängt, in vollständiger Ruhe; m wäre jetzt der Schwerpunkt, und die Lage von ab wäre dabei ganz gleichgültig, wenn gleich, wenn ab eine schiefe Lage hat, mo und mn nicht zusammenfallen.

§. 34.

Der Schwerpunkt sinkt immer bis zur tiefsten Stelle, die er, wenn ihm kein Hindernifs entgegen ist, erlangen kann, weil dieses der Charakter der Schwere ist. Die tiefste Stelle wird dann durch angegebene Umstände bestimmt oder läfst sich aus angegebenen Bedingungen ableiten. Wir wollen hier als Beispiel die folgende Frage vorlegen:

a, b seyen feste Punkte lothrecht über der horizontalen AB (*Fig.* 18); an diesen Stellen sey eine vollkommen beugsame Schnur oder Kette amb mit ihren Enden befestigt, aber die Länge dieser Schnur gröfser als die gerade ab; so mufs die Schnur etwa wie amb herabhängen. Die krumme Linie amb heifst die *Kettenlinie;* ihre Bildung hängt von dem Streben eines jeden einzelnen Theilchens ab, tiefer zu sinken; die Grenzen des Tiefersinkens werden durch die gegenseitigen Wirkungen aller Theilchen des ganzen in

amb vereinten Systems bestimmt. Siehe mein *Handbuch der gemeinen und höheren Mecanik.* (Heidelberg 1807). Hier bleibt die nähere Betrachtung dieser Linie entbehrlich.

Nun werde aber an dieser Schnur etwa mittelst eines Rings ein Körper z. B. eine Laterne aufgehängt, die an derselben ungehindert bis zur tiefsten Stelle abgleiten kann: an welcher Stelle wird sie ruhig hängen bleiben?

Auflösung. Die Stellen a und b betrachte ich als Brennpunkte einer Ellipse (*Fig.* 19). Mit einem Stift, mit dem wir die Schnur straff anspannen, können wir die Ellipse $MkNDM$ beschreiben. Dabei ist dann die Axe MN die ganze Schnurlänge, die ich $= a$ setze; die gegebene ab sey $= \lambda$, so ist $aM = bN = \frac{1}{2}(a - \lambda)$; DE ist die kleine Axe, C der Mittelpunkt; der Parameter p ist $= \frac{a^2 - \lambda^2}{a}$. Den Winkel NAB, welchen die Axe mit einer horizontalen AB macht, wollen wir mit α bezeichnen. Nun sey aus einem beliebigem Punkte w in NA die wz der AB gleichlaufend gezogen, welche die elliptische Linie in 2 Punkten ζ und ε schneidet, so gehört zu jedem dieser Punkte eine Abscisse x und eine zugehörige Ordinate y, und für jeden hat man

$$1.)\ y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

und, wenn der Abstand der Stelle w vom Scheitel M, also die Mw mit z bezeichnet wird,

$$2.)\ y^2 = (z + x)^2 \ . \ tang\,\alpha^2$$

Soll aber k der tiefste Punkt der elliptischen Linie seyn, so ist die horizontale mn eine Berührungslinie an k; beide Durchschnittspunkte fallen jetzt in k zusammen, und beide Werthe von y werden gleich groſs; man hat also jetzt

$$px - \frac{px^2}{a} = (z^2 + 2zx + x^2) \ . \ tg\,\alpha^2$$

oder

$$\left(\frac{p}{a} + tg\,\alpha^2\right) . \ x^2 + (2z \ . \ tg\,\alpha^2 - p) \ . \ x = - z^2 \ . \ tg\,\alpha^2$$

demnach

$$x = - \frac{z \ . \ tg\,\alpha^2 - \frac{1}{2}p}{\frac{p}{a} + tg\,\alpha^2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{z \ . \ tg\,\alpha^2 - \frac{1}{2}p}{\frac{p}{a} + tg\,\alpha^2}\right) - \frac{z^2 \ . \ tg\,\alpha^2}{\frac{p}{a} + tg\,\alpha^2}\right)}$$

Diese Gleichung scheint, weil auch z noch unbekannt ist, eine *unbestimmte* zu seyn, sie wird aber im jetzigen Falle dadurch bestimmt, daſs die beiden Werthe von x hier gleich groſs seyn müssen, was nur dadurch möglich wird, daſs die Wurzelgröſse $= o$ ist also

$$z^2 \ . \ tg\,\alpha^4 - pz \ . \ tg\,\alpha^2 + \frac{1}{4}p^2 = \left(\frac{p}{a} + tg \, . \, \alpha^2\right) z^2 \ . \ tg\,\alpha^2$$

oder

$$z^2 + az = \frac{ap}{4\,tg\,\alpha^2}$$

Daher *Mm* oder

$$32.)\quad z = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,.\,\sqrt{\left(\frac{p}{a.tg\,\alpha^2} + 1\right)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,.\,\sqrt{\left(1 + \frac{p}{a}\,Cot\,\alpha^2\right)}$$

Und nunmehr

$$33.)\quad x = \frac{\tfrac{1}{2}p - z\,.\,tg\,\alpha^2}{\frac{p}{a} + tg\,\alpha^2} = \frac{\tfrac{1}{2}ap - az\,.\,tg\,\alpha^2}{p + a\,.\,tang\,\alpha^2}$$

wo $p = \frac{a^2 - \lambda^2}{a}$ ist.

Für $\alpha = 90^\circ$ wird also $x = -z$, aber nach No. 32, in diesem Falle $z = o$, also auch $x = o$.

Für $\alpha = o$, wird $x = \frac{\frac{1}{2}ap}{p} = \frac{1}{2}a$; in diesem Falle liegt ab horizontal, und die angehängte Laterne sinkt bis in E.

§. 35.

Die Bestimmung des Schwerpunkts eines Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit kann hier füglich auf Körper beschränkt werden, die nach einem bestimmten Gesetze der Elementargeometrie geformt sind. Wir werden daher hier nur prismatische und pyramidische Körper betrachten.

Die Seitenflächen eines Prisma sind allemal Parallelogramme, die Grundflächen parallele kongruente 3 bis 4 oder mehrseitiger Figuren. Die Schwerpunkte aller den Grundflächen parallelen Atomenschichten liegen in einer einzigen geraden Linie, die durch die Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen durchgeht. Und da alle parallele Schichten ganz identisch sind, so ist der Erfolg derselbe, als hätte man eine gerade Linie, die in alle Punkten von gleichen Kräften nach parallelen Richtungen angegriffen würde. Es liegt also der Schwerpunkt eines aus einer gleichdichten Materie bestehenden materiellen Prisma oder prismatischen Körpers in der Mitte der durch die Schwerpunkte der den beiden Grundflächen anliegenden Atomenschichten gezogenen geraden Linie. Es kommt daher hier eigentlich darauf an, den Schwerpunkt einer jeden vielseitigen Figur oder vielseitigen Atomenschichte zu finden, Da sich nun jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen läfst, so darf man nur wissen, wie der Schwerpunkt eines Dreiecks bestimmt wird.

§. 36.

abc sey eine Atomenschichte (*Fig.* 20), deren Aussenflächen Ebenen bilden, $dc = db$, $ae = eb$; zieht man nun die ad und ce, so theilen diese alle der bc und der ab parallelen Atomenreihen in zwei gleiche Theile; es ist also ad und so auch ce nothwendig eine Schwerpunktslinie; die Atomenschichte von einer steifen festen Linie ad unterstützt, müſste nothwendig in Bezug auf Umdrehungsbewegung in Ruhe beharren, und so auch bei einer Unterstützung in cd; es muſs also der Schwerpunkt dieser Atomenschichte sowohl in ad als in ce liegen, also nothwendig im Durchschnittspunkte k.

Die Geometrie lehrt, daſs $ck = \frac{2}{3} ce$, und $ak = \frac{2}{3} ad$ sey. Zieht man also aus einer Spitze des Dreiecks, wie a, durch die Mitte der gegenüber liegenden Grundlinie eine Theilungslinie, wie ad, so erhält man für den Schwerpunkt k

$$34.)\quad ak = \tfrac{2}{3} ad$$

§. 37.

Es sey nun (*Fig.* 21) $abcde$ ein Fünfeck, und die Diagonalen ad, ac durch ef, cf und bn in zwei gleiche Theile getheilt, und $em = \frac{2}{3} ef$, $ch = \frac{2}{3} cf$ und $bg = \frac{2}{3} bn$, so sind m, h und g die Schwerpunkte der 3 Dreiecke.

Man verzeichne nun in willkührlicher Lage einen rechten Winkel BAC, und fälle aus m, h, n die 6 Perpendikel

$$m\alpha\,,\ m\gamma;\ h\zeta\,,\ h\varepsilon;\ g\beta\,,\ g\delta.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks dae sey $= A$, der des $dac = B$, und der des $cab = C$.

Des Fünfecks Schwerpunkt sey k, und $k\lambda$, $k\tau$ auf AB, AC senkrecht, so hat man

$$m\alpha \,.\, A + h\zeta \,.\, B + g\beta \,.\, C = k\lambda \,.\, (A + B + C)$$
$$m\gamma \,.\, A + h\varepsilon \,.\, B + g\delta \,.\, C = k\tau \,.\, (A + B + C)$$

also

$$35.)\quad \begin{cases} k\lambda = \dfrac{m\alpha \,.\, A + h\zeta \,.\, B + g\beta \,.\, C}{A + B + C} \\[2ex] k\tau = \dfrac{m\gamma \,.\, A + h\varepsilon \,.\, B + g\delta \,.\, C}{A + B + C} \end{cases}$$

womit der Schwerpunkt k bestimmt ist.

Auf gleiche Weise verfährt man auch bei Vielecken von mehr Seiten, womit dann zugleich nach vorigem §. der Schwerpunkt eines jeden Prisma gefunden wird, der nämlich in der Mitte der durch die Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen laufenden geraden Linie liegt.

§. 38.

DAE (*Fig.* 22) sey ein mit *CA* beschriebener Kreisbogen, $DA = AE$. In diesem Bogen seyen Atomen stetig neben einander gereihet; man soll den Schwerpunckt dieses Bogens finden.

Auflösung. Man denke sich *DAED* als einen steifen Kreisabschnitt, der nur in dem Bogen *DAE* Atome enthalte, in welche die Schwere wirke; *Dm*, *mo*, *oq* seyen unmefsbar kleine Theilchen, so dafs sie für gerade gelten können. Ueberdas sey die Fläche *DAED* unverrückbar, so dafs sie sich nur um *C* drehen läfst, nicht aber um *A*.

Nun sey der lothrechte Eindruck der Schwere in ein solches Theilchen, wie *Dm*, *mo* &c. $= z$, so zerlegt sich solcher bei *D* in $D\delta$ und $D\alpha$. Der nach $D\delta$, welcher durch *C* durchgeht, kann keine Umdrehung um *C* bewirken; es bleibt also nur die Seitenkraft $D\alpha$ übrig, die senkrecht auf *CD* wirkt; diese $D\alpha$ ist $= z \,.\, \mathrm{Sin}\, Dmn$, d. h. das lothrecht wirkende Gewicht *z* wirkt nach $D\alpha$ senkrecht auf *CD* nur als eine bewegende Kraft $z \,.\, \mathrm{Sin}\, Dmn = Dn$. Eben so wirkt das Gewicht *mo* ($= z$) in senkrechter Richtung auf *Cm* als eine bewegende Kraft $mo \,.\, \mathrm{Sin}\, mo\beta = np$; das Gewicht *oq* senkrecht auf *Co* als eine Kraft $= oq \,.\, \mathrm{Sin}\, oq\gamma = ps$ u. s. f.

Der Erfolg ist also ganz derselbe, als wirkte

statt des Bogenstücks *Dq* nur die Atomenreihe *Ds* senkrecht auf den Halbmesser, so dafs sein stat. Mom. $= CA \,.\, Ds$ wird.

Demnach stat. Mom. von $DAE = CA \,.\, DE$; wäre also *a* des Bogens Schwerpunkt, so hätte man

$$Ca \times DAE = CA \,.\, DE$$

und

$$36.)\quad Ca = \frac{DE}{DAE} \,.\, CA$$

§. 39.

Den Schwerpunkt des Kreisausschnittes *CDAEC* zu finden (*Fig*. 23).

Auflösung. Man denke sich den Bogen *DAE* in unendlich kleine Theilchen *Dm*, *mn*, *no* &c. getheilt, wodurch sich die Dreieckchen *DCm*, *mCn*, *nCo* &c. ergeben, und beschreibe mit $Cd = \frac{2}{3} CD$ den Bogen *dae*, so ist dieser die Schwerpunktslinie aller unendlich schmalen Dreieckchen. Nimmt man also jetzt $Cv = \frac{de}{dae} \,.\, Ca = \frac{DE}{DAE} \,.\, Ca$, so erhält man für den Schwerpunkt *v*

$$37.)\quad Cv = \frac{DE}{DAE} \,.\, \tfrac{2}{3} CA$$

§. 40.

Den Schwerpunkt vom Stück einer Ringfläche zu bestimmen, wie von $DAEcad$ (*Fig.* 24).

Auflösung. Hier sey v der Schwerpunkt der Ringfläche, w der Schwerpunkt des gröfseren Kreisausschnitts, z der des kleineren; der Flächeninhalt des Rings $= k$, der des gröfseren Ausschnitts $= \mathfrak{K}$, der des kleineren $= \mathfrak{k}$, also $k = \mathfrak{K} - \mathfrak{k}$, so hat man

$$Cw \,.\, \mathfrak{K} = Cz \,.\, \mathfrak{k} + Cv \,.\, (\mathfrak{K} - \mathfrak{k})$$

also

$$38.) \quad Cv = \frac{Cw \,.\, \mathfrak{K} - Cz \,.\, \mathfrak{k}}{\mathfrak{K} - \mathfrak{k}}$$

Auf gleiche Weise findet man auch den Schwerpunkt eines Kreisabschnittes wie $DAED$. Es sey jetzt $\mathfrak{K}$ wie vorhin, $\mathfrak{k}$ der Flächeninhalt des Dreiecks CDE, w wie vorhin, z der Schwerpunkt des Dreiecks, t der Schwerpunkt des Kreisabschnittes, so hat man

$$39.) \quad Ct = \frac{Cw \,.\, \mathfrak{K} - Cz \,.\, \mathfrak{k}}{\mathfrak{K} - \mathfrak{k}}$$

§. 41.

Den Schwerpunkt eines Kegels, v *Fig.* 25, zu finden.

Auflösung. Wir denken uns den Kegel aus unermefslich vielen unendlich dünnen Scheiben zusammengesetzt, und setzen in diesem Bezuge $ad = h$, so dafs h die Anzahl von Atomen bezeichnen soll, welche von a bis d neben einander liegen, dafs also h eine unermefslich grofse Zahl ist. Eben so sey $cd = r$ in Bezug auf die Anzahl neben einander liegender Atome von d bis c.

Der kubische Inhalt des Kegels ist $\pi \,.\, r^2 \,.\, \frac{1}{3}h$, unter π die bekannte Zahl 3,141.... verstanden; es ist also in Bezug auf a als Umdrehungspunkt

$$\text{stat. Mom. des Kegels} = av \,.\, \pi r^2 \,.\, \tfrac{1}{4}h$$

Es sey nun irgend ein willkührliches Stück $ab = x$ auf ad abgeschnitten, wo x sich wieder auf die Anzahl neben einander liegender Atome bezieht, so ist die zugehörige Atomenscheibe cg, wenn $bc = y$ gesetzt wird, $= \pi y^2 \,.\, 1$, und ihr statisches Moment

$$= x \,.\, \pi y^2 \,.\, 1 = x \,.\, \pi \,.\, \left(\frac{r}{h} \,.\, x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} \,.\, x^3$$

Nimmt man nun von a aus bis d alle der Grundfläche parallele Atomenschichten für $x = 1$, für $x = 2$, für $x = 3$ u. s. f. bis zu $x = ad = h$, so wird

statisches Moment der 1sten Atomenschichte $= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 1^3$

2ten $= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 2^3$

3ten $= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot 3^3$

etc.

also die Summe der statischen Momente aller Atomenschichten

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots\ldots + h^3)$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{(h^2+h)^2}{4} = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \tfrac{1}{4} h^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{h}\right)^2$$

Hier verschwindet der Bruch $\frac{1}{h}$, weil h unermeſslich groſs ist; es ist also eine Summe schlechthin $= \frac{\pi r^2 h^2}{4}$. Demnach muſs

$$av \cdot \pi r^2 \cdot \tfrac{1}{3} h = \frac{\pi r^2 h^2}{4}$$

seyn; dieses giebt

$$40.) \quad av = \tfrac{3}{4} h = \tfrac{3}{4} ad.$$

Ebendiese Bestimmung gilt für alle Pyramiden.

§. 42.

abdc (*Fig.* 26), sey eine Ebene mit horizontaler Grundlinie *ab*, unter irgend einem Winkel gegen die durch *ab* laufende Horizontalfläche geneigt, so heiſst sie eine *schiefliegende Ebene.* In jeder schiefliegenden Ebene läſst sich auf der horizontalen *ab* ein Rektangel verzeichnet denken, um für die hierher gehörigen Bestimmungen eine Begrenzung zu erhalten. Man versteht daher unter der *schiefen Ebene* in der Mechanik allemal ein *Rektangel abdc* auf der *horizontalen ab*, wo *bd* mit der horizontalen Ebene einen schiefen Winkel macht, der sich ergiebt, indem wir auf die durch *ab* laufende horizontale *Grundfläche* ein Perpendikel *dc* fällen, und nun die *bcf* ziehen. So erhält man das lothrecht stehende Dreieck *bcd*, wo *cd* lothrecht und *bc* horizontal ist; *bd* heiſst die *Länge*, *bc* die *Grundlinie* und *cd* die *Höhe* der schiefen Ebene, *dbc* ihr *Neigungswinkel.*

§. 43.

Zur Entwickelung der verschiedenen Wirkungen eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers, dessen Masse oder Gewicht *M* gegeben ist, ist es hinlänglich, nur den

durch des Körpers Schwerpunkt laufenden lothrechten Durchschnitt zu betrachten, wie *Fig.* 27, wo abc die Stelle des Dreiecks bcd (*Fig.* 26) vertritt, also ab horizontal, bc lothrecht und bac der Neigungswinkel der in ac angedeuteten schiefen Ebene ist, und M den lothrechten Durchschnitt durch den Schwerpunkt v eines aufliegenden Körpers bezeichnet.

Die verschiedenen Wirkungen, welche hier bestimmt werden sollen, sind nun:

I. Die Wirkung nach vz, parallel mit ca, die ich mit P bezeichne.

II. Die auf ac senkrechte nach vy, die ich S nennen will.

III. Die horizontale nach vr, parallel mit ba, welche $\mathfrak{P}$ heifsen soll.

Die lothrechte nach vw ist hier durch das Gewicht M gegeben.

Es sey nun $vx = M$ (z. B. vx in so viele gleiche Theile getheilt, als M Pfunde enthält), und vy auf ac senkrecht, so ergiebt sich das Rektangel $vtxy$, also

$$41.)\quad \begin{cases} \text{I.}\;\; P = vt = vx \,.\, Sin\, txv = M \,.\, Sin \,.\, a. \\ \text{II.}\;\; S = vy = vx \,.\, Sin\, vxy = vx \,.\, Cos\, txv = M \,.\, Cos\; a. \end{cases}$$

Um den Körper durch einen horizontalen Zug $\mathfrak{P}$ nach rv in Ruhe zu erhalten, setze man $vu = \mathfrak{P}$, und verzeichne das Rektangel $vyus$; nun wird erfordert, dafs der aus vu entstehende Zug nach vs, parallel mit ac, $= P$ werde, wofern v, nach vz abzugleiten verhindert werden soll; also $P = vs = vu \,.\, Cos\; uvs$, oder

$$M \,.\, Sin\; a = \mathfrak{P} \,.\, Cos\; uvs = \mathfrak{P}\; Cos\; a.$$

und

$$41'.)\quad (\text{III})\;\; \mathfrak{P} = \frac{M \,.\, Sin\; a}{Cos\; a} = M \,.\, tang\; a$$

Für $a = 90°$ wird ca lothrecht, der Körper M fällt jetzt lothrecht herab, und der von einer horizontalen Kraft $\mathfrak{P}$ nach vs angewendete Theil $\mathfrak{P} \,.\, Cos\; a$ ist jetzt $= o$, auch $M = \mathfrak{P} \,.\, \frac{Cos\; a}{Sin\; a} = o$, was auch $\mathfrak{P}$ für einen Werth haben mag, d. h. das Gewicht von M müfste jetzt $= o$ seyn, wenn es von irgend einer horizontalen Kraft ruhig erhalten werden sollte. Die Gleichung (III) giebt in diesem Falle, weil *tang* 90° unendlich ist, $\mathfrak{P}$ *unendlich grofs.* Weil aber in diesem Falle jede horizontale Kraft ebenso auf den Körper nach oben wie nach unten wirkt, so kann auch das *Unendliche* hier durchaus nichts dazu beitragen, das Sinken des Körpers zu verhindern. Der wahre Ausspruch liegt in der Bestimmeng $M = \frac{\mathfrak{P}}{tg\, a}$, welcher das Gewicht M giebt, was durch eine bestimmte Kraft $\mathfrak{P}$ bei dem Neigungswinkel a in Ruhe erhalten werden kann, das dann, für $a = 90°$, $= \frac{\mathfrak{P}}{tg\, 90°} = o$ giebt.

Anmerk. Es versteht sich, dafs bei allen solchen Bestimmungen nur diejenigen Kräfte in Betrachtung kommen, welche ausdrücklich genannt werden, was dann auch von Widerständen gilt. Widerstand der Luft, Reibung etc. werden daher hierbei noch nicht berücksichtigt. S. unten §. 258.

§. 44.

Die Sätze des vorigen §. haben eine weit allgemeinere Deutung, als die, in der sie dort ausgesprochen werden. Sie enthalten überhaupt die Lehre von den verschiedenen Wirkungen beim schiefen Druck.

Es leide z. B. ein auf ac *Fig.* 28 (wo abc senkrechter Durchschnitt eines Prisma seyn könnte) liegender Atom m nach willkührlicher Richtung nm einen Druck $= M$, so darf man nur die nm nach o verlängern, und die $c\gamma$ senkrecht durch no ziehen, dann die $a\beta$ senkrecht auf $c\gamma$. Denkt man sich nun die $c\beta$ horizontal, also die $a\beta$ lothrecht, da dann $ac\beta = \alpha$ der Neigungswinkel von ac wäre, so erhält man die drei Wirkungen des Drucks M ganz so, wie im vorigen §., nur α statt a gesetzt; die Kraft, welche den Atom nach ma halten müſste, wäre $= M \,.\, Sin\, \alpha$; die, welche ihn nach mq ziehen müſste, $= M \,.\, tang\, \alpha$; und die senkrechte Wirkung auf ac nach $mp = M \,.\, Cos\, \alpha$.

Es fällt gleich ins Auge, daſs diese Lehre der Vorstellung einer schiefen Ebene gar nicht bedürft hätte, da sie bloſse leichte Anwendung des Kräftenparallelogramms ist.

III. Kapitel.

AEQUIVALENTE MASSEN IN BEZUG AUF BESCHLEUNIGENDE KRÄFTE. — TRÄGHEITSMOMENTE. — ANWENDUNGEN AUF UNGLEICHFÖRMIGE BEWEGUNGEN.

§. 45.

Es sey N (*Fig.* 29) eine Scheibe, deren Masse in Vergleichung mit den Massen der an einer darum gelegten Schnur befestigten Gewichte P und p als unbedeutend bei Seite gesetzt werden könnte; ebenso sey auch Masse und Gewicht der aufliegenden und nach dm, cn herabhängenden Schnur unbedeutend, so ist nach den Lehren des I. Kap. die beschleunigende Kraft, mit der das gröſsere Gewicht P sinkt, und das kleinere p steigt,

$$f = \frac{P - p}{P + p}$$

$$\mathfrak{g} = f \cdot g$$

der in der Zeit t (in t Sekunden) durchlaufene Raum

$$\mathfrak{h} = t^2 \cdot \mathfrak{g}$$

die Zeit, in welcher P den Raum $\mathfrak{h}$ durchlauft,

$$t = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{g}}}$$

und die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit

$$c = t \cdot 2\mathfrak{g}$$

Alle diese Bestimmungen beziehen sich auf den hier eintretenden Fall, daſs $cd = ce$ ist, wobei alle Atome gleiche Geschwindigkeit erhalten, also die Ueberwucht $P - p$ unter alle Atomen gleichmäſsig vertheilt wird. Es wäre ganz dasselbe, wenn die Masse $P + p$ im Umfange der Scheibe gleichmäſsig vertheilt, und am Atom m nur eine bewegende Kraft $= P - p$, in n aber gar keine angebracht wäre.

§. 46.

Ganz anders verhält sich die Sache *Fig.* 30.

Hier sind um eine gemeinschaftliche Axe c zwei Scheiben N und W angebracht. Indem hier P niedersinkt und p steigt, ist in jedem Augenblick die Geschwindigkeit von P im Verhältnisse $\frac{cd}{c\beta}$ gröſser, als von p. Statt $\frac{cd}{c\beta}$ will ich $\frac{R}{r}$ schreiben. Die Atomen von P und p werden also hier mit ungleichen Geschwindigkeiten getrieben, die ich mit C und c bezeichnen will. Die Masse von P läſst sich wie vorhin so betrachten, als wären sie im Umfange $d\,\delta\,e\,\varepsilon$ gleichmäſsig vertheilt, wenn nur der Atom m von einer Kraft $= P$ angegriffen wird. Statt der Kraft p an n können wir eine $Q = \frac{r}{R} \cdot p$ an c anbringen, die in den Atom k wirkt, und die Ueberwucht ist $= P - \frac{r}{R} \cdot p$. Aber die Masse von p, deren Atome mit der Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt werden, läſst sich nicht so ansehen, als wäre sie am Umfange $\delta\,\varepsilon$ gleichmäſsig vertheilt, weil dieser mit der Geschwindigkeit $C = \frac{R}{r} \cdot c$ herumläuft, und zur Bewirkung gröſserer Geschwindigkeit bei derselben Masse nothwendig eine gröſsere Kraft gehört.

Es ist also die Frage:

> Wie groſs ist die Masse, deren Atome am Umfange $\delta\,e\,\varepsilon\,d$ gleichmäſsig vertheilt für die Ueberwucht $P - \frac{r}{R} \cdot p$ ganz dasselbe wären, was die Atomen der Masse p (die nämlich mit dem Gewicht p verbunden ist) an n thun?

Bezeichnen wir diese reducirte Masse mit X, so wird für die Bewegung von P

$$42.)\quad f = \frac{P - \frac{r}{R} \cdot p}{P + X}$$

woraus sich alle übrigen Bestimmungen wie im vorigen §. ergeben. Man soll also hier den Werth der reducirten Masse X finden.

Auflösung. An dem festen Punkte C sey eine steife Linie Cm angebracht, dabei $Cd = de = ef = fm$ genommen. Senkrecht auf Cm wirke in d eine bewegende Kraft $= p$, an Cm werde irgendwo eine Masse $= q$ angebracht (die nämlich von der Schwere angegriffen ein Gewicht $= q$ erhalten würde), so ist der Erfolg in Bezug auf die von der Kraft p angegriffene Stelle d sehr verschieden, nachdem die Masse q in der Linie Cm näher oder entfernter vom Umdrehungspunkte C angebracht wäre.

Man denke sich nun die Masse q zuerst in d, so ist für die Bewegung dieser Stelle $f = \frac{p}{q}$; $\mathfrak{g} = \frac{p}{q} \cdot g$; $t = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{g}}}$; setzt man die Länge des Bogens $d\tau = \mathfrak{h}$, so

ist $t = \sqrt{\frac{d\tau}{\mathfrak{g}}}$ die Zeit, in welcher d den Bogen $d\tau$ durchlauft. Wird aber die Masse q nach e verrückt, so wird die von der Kraft p angegriffene Stelle d langsamer in Bewegung gesetzt. Jener Kraft in d ist eine $= \frac{Cd}{Ce} . p$ hier $= \frac{1}{2}p$ äquivalent; es wirkt also jetzt in die Masse q bei e nur eine Kraft $= \frac{1}{2}p$, und man hat daher für die Stelle e jetzt nur $f = \frac{\frac{1}{2}p}{q}$; $\mathfrak{g} = \frac{\frac{1}{2}p}{q} . g$, $\mathfrak{h} = t^2 . \mathfrak{g} = t^2 . \frac{\frac{1}{2}p}{q} . g$ u. s. f. Jetzt durchlauft die Stelle e in der Zeit t, in welcher die d vorhin den Bogen $d\tau$ durchlief, nur einen Raum $= \frac{1}{2} d\tau = es = \frac{1}{4} eu$, wodurch die von der Kraft angegriffene Stelle d nur bis in g gelangt, so daſs $dg = \frac{1}{4} d\tau$ wird. Rückt man dieselbe Masse bis in f, so ist eine Kraft $= \frac{1}{3}p$, in f mit der p in d äquivalent, es wirkt also in die Masse q in f jetzt nur die bewegende Kraft $\frac{1}{3}p$, und die beschleunigende Kraft ist in f nur $= \frac{\frac{1}{3}r}{q}$; $\mathfrak{g} = \frac{\frac{1}{3}p}{q} . g$; $\mathfrak{h} = t^2 . \frac{\frac{1}{3}p}{q} . g$; jetzt durchlauft also die Stelle f in der Zeit t, in welcher anfangs die Stelle d den Bogen $d\tau$ durchlief, nur einen Raum $= \frac{1}{3} d\tau = \frac{1}{9} fw$.

Allgemein:

> Wenn in d eine bestimmte bewegende Kraft p senkrecht auf die Linie Cm wirkt, und nun eine Masse q zuerst in d, dann in irgend einer andern Stelle α angebracht wird, und wenn nun im ersteren Falle die Stelle d in einer bestimmten Zeit t den Weg $d\tau$ durchlauft, und $Cd = r$, $C\alpha = R$ gesetzt wird, so durchlauft im letzteren Falle die Stelle α in derselben Zeit t nur einen Raum $= \frac{r^2}{R^2} . \alpha\beta$.

Soll aber die Stelle d im letzteren Falle, wo die Masse sich in α befindet, in derselben Zeit den Raum $d\tau$ durchlaufen, wie wenn sich die Masse in d befindet, so müſste die Linie aus der Lage $C\alpha$ in die $C\beta$ kommen, also der Punkt α den Raum $\alpha\beta$ durchlaufen, statt des $\frac{r^2}{R^2} . \alpha\beta$. Dieses wird aber bei ungeänderter Kraft p, wenn solche in der Stelle d angebracht bleibt, nur dadurch möglich, daſs, statt q in d, die Masse $\frac{r^2}{R^2} . q$ in α angebracht wird. Jetzt hat man für die Stelle α die bewegende Kraft $= \frac{r}{R} . p$,

$$f = \frac{\frac{r}{R} . p}{\frac{r^2}{R^2} . q} = \frac{R}{r} . \frac{p}{q}; \; \mathfrak{g} = \frac{R}{r} . \frac{p}{q} . g; \; \mathfrak{h} = t^2 . \frac{R}{r} . \frac{p}{q} . g; \text{ aber } d\tau = t^2 . \frac{p}{q} . g,$$

also $\mathfrak{h} = \frac{R}{r} . d\tau = \alpha\beta$.

Ist die Geschwindigkeit der Stelle d in irgend einem Augenblick $= c$, und die gleich-

zeitige Geschwindigkeit der Stelle $\alpha = C$, so ist $\frac{r}{R} = \frac{c}{C}$, und weil es hier eigentlich auf *Verschiedenheit der Geschwindigkeiten* ankommt, so folgt:

Wenn an einem Systeme von Massen irgendwo eine bewegende Kraft p angebracht ist, welche eine Stelle mit irgend einer Geschwindigkeit c in Bewegung setzt, an der sich eine Masse q befindet, und wenn C die gleichzeitige Geschwindigkeit einer andern Stelle desselben Systems ist, so erhält die von der Kraft p angegriffene Stelle immer dieselbe beschleunigte Bewegung, wenn statt der Masse q an der Stelle, welcher die Geschwindigkeit c zugehört, eine Masse $X = \frac{c^2}{C^2} \cdot q$ an einer anderen Stelle angebracht wird, welcher die Geschwindigkeit C zugehört. Oder:

Für die Beschleunigung einer von einer bewegenden Kraft p angegriffenen Stelle sind Massen q und X, welche mit Geschwindigkeiten c und C gleichzeitig in Bewegung gesetzt werden, völlig äquivalent, wenn

$$43.)\quad C^2 \cdot X = c^2 \cdot q \text{ ist.}$$

Diese Producte, aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten, wie $C^2 . X$, $c^2 . q$, heifsen *Trägheitsmomente* der Massen. Weifs man das Trägheitsmoment einer Masse $q = c^2 . q$, so findet man die der q äquivalente Masse X für eine Stelle, deren Geschwindigkeit C ist, durch die Gleichung

$$44.)\quad X = \frac{c^2 q}{C^2}$$

§. 47.

Hiernach läfst sich nun die Masse p (*Fig.* 30) von der Stelle n oder β auf die k oder e leicht reduciren; ihr ist in e eine Masse $X = \frac{c^2}{C^2} \cdot p = \frac{r^2}{R^2} \cdot p$ äquivalent, und man erhält hiermit in No. 42.

$$44.)^* \quad f = \frac{P - \frac{r}{R} \cdot p}{P + \frac{r^2}{R^2} \cdot p}$$

Hierbei darf nicht übersehen werden, dafs in der Formel $C^2 X = c^2 q$ unter X und q nur Massen verstanden werden können, die in allen ihren Theilen einerlei Geschwindigkeit haben; alle Atome der Masse X müssen die Geschwindigkeit C, und alle Atomen der Masse q die Geschwindigkeit c haben.

Darum haben wir im vorigen §. bei *Fig.* 30 die Massen der Scheiben und der Welle

noch bei Seite gesetzt, weil hier für die zahllosen Mengen von Atomen auch zahllose verschiedene Entfernungen von der Axe, also auch zahllose verschiedene Geschwindigkeiten Statt haben, folglich das Trägheitsmoment einer Scheibe oder eines Cylinders auf der Summirung unzähliger einzelner Trägheitsmomente beruht.

§. 48.

Das Trägheitsmoment des aus einer gleichförmigen Materie bestehenden Cylinders *abcd* (*Fig.* 32) zu finden.

Auflösung. Es ist vom Trägheitsmomente in Bezug auf die Umdrehungsaxe *A B* die Rede.

Wir sehen den Cylinder als einen aus lauter in einander steckenden cylindrischen Wänden zusammengesetzten Körper an; und bestimmen alle Maafse in Bezug auf Atomen; der Halbmesser *e d* bestehe aus x Atomen, so ist für die erste cylindrische Atomenwand, deren Länge *ef* wir $= \lambda$ setzen,

das Trägheitsmoment $= 1^2 \cdot 2\pi \cdot \lambda$
das der zweiten $= 2^2 \cdot 4\pi \cdot \lambda$
das der dritten $= 3^2 \cdot 6\pi \cdot \lambda$
⋮
das der letzten x^{ten} $= x^2 \cdot 2x\pi \cdot \lambda$

also das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders

$$= 2\pi \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots\ldots + x^3) \cdot \lambda$$

In meiner Anleitung zur Analysis (Heidelberg 1817) findet man die Summirung solcher Reihen; hiernah wird der vorstehende Ausdruck $= \frac{2\pi\lambda \cdot x^4}{4} = \frac{1}{2}\lambda x^2 \cdot \pi x^2$

Bezeichnen wir den kub. Inhalt des Cylinders mit K, so ist $K = \lambda \cdot \pi x^2$, also, wenn wir den Halbmesser des Cylinders, der aus x Atomen besteht, $= r$ setzen.

45.) Trägheitsmoment des Cylinders $= r^2 \cdot \frac{1}{2} K$

Wird die Kraft durch ein Gewicht ausgedrückt, so mufs auch K nach Gewicht ausgedrückt werden. Man sieht, dafs der Erfolg derselbe ist, als wäre des Cylinders halbe Masse in der Entfernung r angebracht oder an seinem Umfange gleichmäfsig vertheilt.

Ex. An einer sechspfündigen Welle, deren Halbmesser $= \frac{1}{8}$ Par. Fufs wäre, ist mittelst eines darum gelegten dünnen Fadens ein Gewicht von 2 ℔ angehängt, das ihn frei um seine Axe dreht: man soll das Gesetz der Bewegung für das angehängte Gewicht bestimmen.

Die am Umfange wirkende Kraft ist = 2 ℔.
Die am Umfange angehängte Masse = 2 ℔ }
Die auf den Umfang reducirte Masse des Cylinders $= \frac{6}{2}$ = 3 ℔ } = 5 ℔.

Man hat also

$$f = {}^2/_5 \text{ oder } = o,4$$
$$\mathfrak{g} = o,4 \,.\, 15{,}09 = 6{,}036'$$
$$\mathfrak{h} = t^2 \,.\, 6{,}036 \text{ (z.B. in 3 Sek. } = 54{,}324')$$
$$t = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{g}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{6{,}036}}$$

§. 49.

Hieraus giebt sich nun auch das Trägheitsmoment eines Ringes *MN* (*Fig.* 33.) Es sey $cd = r$, $ce = R$, die Dicke des Ringes $= \lambda$, so ist

Trägheitsmoment einer Scheibe vom Halbmesser R und der Dicke λ nach vorigem §.............. $= \frac{1}{2}\pi R^2 \,.\, \lambda \,.\, R^2$

Trägheitsmoment einer Scheibe vom Halbmesser r und der Dicke λ.............................. $= \frac{1}{2}\pi r^2 \,.\, \lambda \,.\, r^2$

Also

46.) Trägheitsmoment des Ringes $= \frac{1}{2}\pi\lambda \,.\, (R^4 - r^4)$

§. 49.*

Das Parallelepipedum (*Fig.* 34) soll sich um die durch die Kante cd durchgehende Axe mn drehen: sein Trägheitsmoment für diese Axe zu finden

Auflösung. Die Länge cg bestehe aus l Atomen, die Breite cq aus b Atomen, die Höhe cd aus h Atomen, so kann man sich die Fläche $cdkg$ aus l Perpendikeln wie cd zusammengesetzt denken; jedes solches Perpendikel ist $= h$ in Bezug auf die Anzahl seiner Atome; wäre $co = x$ d. h. aus x Atomen zusammengesetzt, so wäre

Trägheitsmoment von $ov = x^2 \,.\, h$

z. B. für $x = 1 \ldots = 1^2 \,.\, h$

$x = 2 \ldots = 2^2 \,.\, h$

$\vdots$

$x = l \ldots = l^2 \,.\, h$

Demnach

Trägheitsmoment der ganzen Fläche $cdkg = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + l^2) \,.\, h$

Das ganze Parallelepipedum besteht aus b solchen parallelen Atomenschichten, die parallel mit der vordern hintereinander durch $ouvw$ durchgehen, so daſs von jeder ein Perpendikel in $ouvw$ fällt. Z. B. von der zehnten Atomenschichte, der $cdkg$ parallel genommen, hat man das zehnte Perpendikel von ov nach uw; dieses Perpendikel besteht wieder aus h Atomen, und seine Entfernung von cd ist die Hypohenuse eines rechtwinklichten Dreiecks, dessen einer Kathetus $= co = x$, der andere $= 10$ ist; sein Trägheitsmoment ist also $(10^2 + x^2) \,.\, h$.

Für jedes x^{te} Perpendikel der n^{ten} Atomenschichte ist das Trägheitsmoment $= ((n-1)^2+x^2).h$, also

Trägheitsmoment aller Perpendikel der zweiten mit *cdkg* parallelen Atomenschichten $= ((1^2+1^2) + (1^2+2^2) + (1^2+3^2)\ldots.+(1^2+l^2)).h$

Trägheitsmoment aller Perpendikel der dritten Atomenschichte............. $= ((2^2+1^2) + (2^2+2^2) + (2^2+3^2)\ldots\ldots.+(2^2+l^2)) . h$

Trägheitsmoment aller Perpendikel der vierten Atomenschichte............... $= ((3^2+1^2) + (3^2+2^2) + (3^2+3^2)\ldots\ldots.+(3^2+l^2)) . h$

⋮

Trägheitsmoment aller Perpendikel der letzten oder b^{ten} Schichte.. $= [((b-1)^2+1^2) + ((b-1)^2+2^2) + ((b-1)^2+3^2)\ldots.+((b-1)^2+l^2)] . h$

Diesemnach das Trägheitsmoment aller b Schichten zusammengenommen =

$$\left.\begin{matrix} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + l^2 \\ + l . (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (b-1)^2) \\ +(b-1)(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + l^2) \end{matrix}\right\} . h$$

$$= (\tfrac{1}{3}l^3 + l . \tfrac{1}{3}(b-1)^3 + (b-1) . \tfrac{1}{3}l^3) . h$$

$$= b . \tfrac{1}{3}l^3 + l . \tfrac{1}{3}(b-1)^3) . h$$

Weil nun b eine unermeſsliche Zahl ist, so daſs auch b statt $b-1$ geschrieben werden kann, so erhält man hiermit

47.) Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipedums

$$= \tfrac{1}{3}h . (b . l^3 + l . b^3) = \tfrac{1}{3}hbl . (l^2 + b^2)$$

Bezeichnen wir den kub. Inhalt des Parallelepipedums mit K, so ist $K = hbl$, also auch

48.) Trägheitsmoment $= \tfrac{1}{3}K . (l^2 + b^2)$

In der Zeichnung ist $l^2 + b^2$ das Quadrat der auf die Axe *mn* senkrechten Diagonale *cp*.

Der Erfolg ist also derselbe, als wäre $\frac{1}{3}$ der ganzen Masse K am Ende der Diagonale *cp* angebracht.

Geht die Axe *mn* senkrecht durch die obere und untere Grundfläche des Parallelepipedums wie *Fig.* 35, so stoſsen 4 Parallelepipeden mit einer Kante in der gemeinschaftlichen Umdrehungsaxe *cd* zusammen; für jedes erhält man das Trägheitsmoment nach No. 47.) oder No. 48.) Die Summe der 4 Trägheitsmomente ist jetzt das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipedums für die Axe *mn*.

§. 50.

In der Maschinenlehre kommen zuweilen parallelepipedische Massen vor, die sich in schiefer Stellung, wie *ab Fig.* 36, um eine Axe *mn* drehen. In diesem Falle ziehe man

die az der nm gleichlaufend, und ziehe die Mittellinie ac, hiermit erhält man die reducirte Länge de statt der ac; zieht man die vw der nm gleichlaufend, so ist der Inhalt der Fläche von a bis $e = dc \times vw$; macht man also $dt = vw$, so ist das Rektangel $dest$ dem Parallelogramm ac äquivalent. Bei ungeänderter Dicke des Parallelepipedums ist nun jeder mit vw korrespondirende Querschnitt $\alpha\beta$ dem vw gleich, und das Parallelepipedum $dest$, welches mit dem schiefen einerlei Dicke hat, hat mit diesem auch einerlei Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment für die Länge fe sey $= \mathfrak{T}$, das für die Länge $fd = \mathfrak{t}$, so ist

49.) Trägheitsmoment des Parallelepipedums $ac = \mathfrak{T} - \mathfrak{t}$.

§. 51.

Hierher gehörige Betrachtungen in Bezug auf flüssige Massen sind von mir zuerst in die Mechanik eingeführt worden. Wegen des wissenschaftlichen Zusammenhangs mufs ich sie hier beifügen.

A sey ein cylindrisches Gefäfs (*Fig.* 37), an dessen innere Wandfläche ein Kolben k genau anschliefse.

Dieser Cylinder sey mit einer aufwärts steigenden Röhrenleitung $\alpha\beta\gamma$ verbunden, und nebst der Röhrenleitung ganz mit Wasser angefüllt.

Auf den Kolben k drücke eine unveränderliche Kraft P: Nach welchem Gesetze wird der Kolben niedersinken?

Ich nehme vor der Hand als bekannt an, dafs der Druck des Wassers gegen des Kolbens Grundfläche, die ich $= W$ setze, so grofs sey als das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe $\gamma\delta$ über der horizontalen $k\beta\delta$, deren Grundfläche $= W$, wäre. Dieser Druck ist also, nach kub. Inhalt, $= W.H'$, wenn wir $\gamma\delta = H'$ setzen. Drücken wir diese dem Kolben entgegen wirkende Last in kub. Fufsen aus, so mufs die Kraft P gleichfalls in kub. Fufsen Wassers ausgedrückt werden, deren Gewicht nämlich der Kraft gleich wäre. Hiernach ist die zur Bewegung der Wassermasse vorhandene Ueberwucht $= P - H'.W$.

Jetzt kommt es noch auf die Wassermasse an, welche durch den Niedergang des Kolbens in Bewegung gesetzt werden mufs. Die Höhe $k\alpha$ sey $= h$; der Weg des Kolbens, durch den er niedergedrückt werden soll, $= b$, so können wir seinen mittleren Stand über $\alpha = h - \frac{1}{2}b$, nämlich seine mittlere Tiefe unter $k = \frac{1}{2}b$ setzen, so dafs die mittlere Druckhöhe gegen des Kolbens Grundfläche $= H' + \frac{1}{2}b$ wird; diese mittlere Druckhöhe bezeichnen wir mit H; hiermit wird die mittlere Ueberwucht $= P - H.W$.

Die mittlere Wassermasse im Cylinder ist $= (h - \frac{1}{2}b).W$; alle Atomen dieser Masse werden mit derselben Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, mit welcher der Kolben sinkt, die wir für irgend einen Augenblick mit c bezeichnen. Die Wassermasse aber, welche durch einen Schub von der Höhe b aus dem Cylinder in die Steigröhre getrieben

wird, also die $b. W$ füllt in der Steigröhre, deren Querschnitt wir mit w bezeichnen, auf die Länge x einen kubischen Raum aus, der $= x \,.\, w$ ist; weil nun $x \,.\, w = b \,.\, W$ seyn mufs, so hat man $x = \frac{W}{w} \,.\, b$; bezeichnen wir also die gleichzeitige Geschwindigkeit der Wassertheilchen in der Steigröhre mit C, für den Augenblick, da die des Kolbens $= c$ ist, so ist für jeden Augenblick $C = \frac{W}{w} \,.\, c$.

Die wirklich vorhandene Wassermasse in der Steigröhre, deren Länge wir $= \lambda$ sezzen, ist $\lambda \,.\, w$. Hätte sie nur die Geschwindigkeit des Kolbens $= c$, so hätte man $f = \frac{P - HW}{(h - \frac{1}{2}b)\, W + \lambda w}$; weil aber ihre Geschwindigkeit $= C = \frac{W}{w} \,.\, c$ ist, so hat die Masse λw denselben Einfluss auf die beschleunigende Kraft, als wäre sie $= \frac{C^2}{c^2} \,.\, \lambda w = \frac{W^2}{w^2} \,.\, \lambda w = \frac{W}{w} \,.\, \lambda W$. Eine Masse X bei der Geschwindigkeit c wäre nämlich der Masse λw bei der Geschwindigkeit C äquivalent, wenn $c^2 \,.\, X = C^2 \,.\, \lambda w$ d. h. wenn ihre Trägheitsmomente gleich grofs wären, man hat also hier

$$X = \frac{C^2}{c^2} \,.\, \lambda w = \frac{W}{w} \,.\, \lambda w$$

welches die auf die Geschwindigkeit c reducirte Masse in der Steigröhre ist. Diese mufs statt λw in dem Werthe von f substituirt werden, und man erhält hiermit, alle sonstige Bewegungshindernisse bei Seite gesetzt, für den Niedergang des Kolbens die beschleunigende Kraft

$$50.)\quad f = \frac{P - HW}{\left(h - \frac{1}{2}b + \frac{W}{w}\lambda\right) . W} = \frac{\frac{P}{W} - H}{h + \frac{W}{w}\lambda - \frac{1}{2}b}$$

wo $h - \frac{1}{2}b$ in Vergleichung mit $\frac{W}{w} \,.\, \lambda$ in der Ausübung gewöhnlich bei Seite gesetzt werden kann.

$\frac{P}{W}$ ist die Höhe einer auf den Kolben drückenden Wassersäule, deren Gewicht der Kraft P gleich wäre. Bezeichnen wir diese Höhe mit $\mathfrak{H}$, so wird für den Niedergang des Kolbens

$$51.)\quad f = \frac{\mathfrak{H} - H}{h + \frac{W}{w}\lambda - \frac{1}{2}b}$$

wo $\frac{W}{w} \,.\, \lambda$ die *reducirte* Länge der Steigröhre ist. Man hat also den in der ersten Sekunde durchlaufenen Raum

$$52.)\quad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{H} - H}{h + \frac{W}{w}\lambda - \frac{1}{2}b} \cdot g$$

und wenn der Raum b oder die ganze Tiefe des Kolbenschubs in t Sekunden durchlaufen wird, so hat man $b = t^2 g$, also hier

$$b = \frac{t^2 . (\mathfrak{H} - H) . g}{\frac{W}{w} . \lambda + h - \frac{1}{2}b}$$

und für die Anwendung noch hinlänglich genau

$$53.)\quad b = \frac{t^2 . (\mathfrak{H} - H) . g}{\frac{W}{w} . \lambda} = \frac{t^2 . w . g . (\mathfrak{H} - H)}{W . \lambda}.$$

Daher auch $$\mathfrak{H} - H = \frac{b . W . \lambda}{t^2 . w . g}$$

also $$54.)\quad \mathfrak{H} = H + \frac{b . W . \lambda}{t^2 . w . g}$$

Weil nun $\mathfrak{H} . W = P$ ist, so hat man auch

$$55.)\quad P = H . W + \frac{b . W . \lambda}{t^2 . w . g} . W$$

Für den Zustand des Gleichgewichts wäre $P = H . W$, also ist $\frac{b\,W\lambda}{t^2\,w\,g}.\,W$ die Ueberwucht, welche die Kraft nöthig hat, um den Kolben in der Zeit t durch den Raum b nieder zu treiben.

> *Anmerkung.* Von Maschinen ist hier noch nicht die Rede, sondern nur von allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung unter bestimmten Bedingungen.

§. 52.

Man denke sich ein System von Massen, bei welchem alle Atome eine bestimmte Geschwindigkeit erhalten, sobald ein einziger eine bestimmte Bewegung erhält, und bei dem der von der Kraft angegriffene Punkt in der Zeit t den Weg B durchlaufe.

Diese Kraft sey unveränderlich $= P$.

Der Widerstand oder die Last, welche diese Kraft zu überwinden hat, kann an Stellen vertheilt seyn, welche sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen (wie an verschiedenen Stellen eines Hebels); sie lassen sich aber alle auf eine einzige Stelle bringen, der eine bestimmte Bewegung zukommt; der Raum, den diese Stelle in derselben Zeit t, in welcher der Kraftpunkt durch den Raum B kommt, durchlauft, sey $= b$.

Die gesammte auf diesen Punkt gebrachte unveränderliche Last sey $= Q$.

Die gleichzeitig in Bewegung gesetzten Massen, welche bei der Bewegung des Kraftpunktes *immerfort in Bewegung bleiben*, lassen sich allemal nach der Bestimmung ihres Trägheitsmoments auf den vorhin gedachten gemeinschaftlichen *Lastpunkt* bringen. Ihr so reducirter Werth sey $= \Pi$.

Jedesmal nach t Sekunden falle ein Theil der ganzen in Bewegung gewesenen Masse ab, an dessen Stelle aber ein gleicher Theil wieder ergriffen werde; dieser Theil, der nicht unter Π begriffen ist, sey nach derselben Reduction auf den Lastpunkt $= \Sigma$.

Wenn nun gleich der von der Kraft P angegriffene Punkt wegen der erfolgenden Beschleunigung keiner gleichförmigen Bewegung fähig ist, also keines gleichförmigen Beharrungsstandes, so kann oder *muſs* doch unter bestimmten Bedingungen ein *ungleichförmiger Beharrungsstand* eintreten d. h. eine ungleichförmige Bewegung, die sich periodisch immer wiederholt, so daſs gröſste und kleinste Geschwindigkeit immer in dieselben Grenzen fallen, und der von der Kraft angegriffene Punkt periodisch immer wieder denselben Weg in derselben Zeit durchläuft.

Würde P so genommen, daſs $P . B = Q . b$ würde, also $P = \frac{b}{B} . Q$, und nun der Kraftpunkt auf irgend eine Weise einmal in Bewegung gesetzt, z. B. mit der Geschwindigkeit C, so müſste diese Geschwindigkeit C bei derselben Kraft P immer fortdauern, *wofern die einmal in Bewegung gesetzten Massen immer in Bewegung blieben.*

Dadurch aber, daſs nach jedesmaligem Verfluſs der Zeit t eine neue Masse ergriffen und erst aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden muſs, wird die im Augenblick dieses Ergreifens Statt habende Geschwindigkeit C z. B. in die $\frac{m}{n} C$ verwandelt, aus der dann in der nächstfolgenden Zeit t wegen des neuen Angriffs die $\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} . C\right)$ oder die $\frac{m^2}{n^2} . C$ u. s. f. also nach $\alpha . t$ Sekunden die Geschwindigkeit $= \left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha} . C$ werden müſste, wenn nicht nach jedem Angriffe der neuen Masse (z. B. eines neuen Stampfers in einer Stampfmühle, wobei das stat. Moment der Last ungeändert bleibt) durch eine beschleunigende Kraft in der Zeit t die Geschwindigkeit C wieder hergestellt wird.

Zur Gewinnung einer beschleunigenden Kraft ist aber Ueberwucht nöthig, es muſs also $P > \frac{b}{B} . Q$ seyn, was wir durch die noch unbestimmte allgemeine Gleichung

56.) $P = \frac{b}{B} . Q + V$ $\Big\{$ in Bezug auf die von der Kraft P unmitelbar angegriffene Stelle.

ausdrücken wollen.

§. 53.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen haben wir es nun mit der Aufgabe zu thun:

In der Formel No. 56 die Ueberwucht V zu bestimmen, bei welcher der von der Kraft unmittelbar angegriffene Punkt in einen ungleichförmigen Beharrungsstand tritt, so daſs er jedesmal in der Zeit t den Raum B durchlauft, und der gemeinschaftliche Lastpunkt, an welchem die gesammte Last $= Q$ ist, den Raum b.

Auflösung. 1. Zuvorderst ist in Bezug auf die in Bewegung kommende Masse diejenige, welche während dem Gange der Maschine immer in Bewegung bleibt, von der, welche nach t Sekunden jedesmal ergriffen und erst von neuem in Bewegung gesetzt werden soll, zu unterscheiden (z. B. die Masse des Wasserrades und des Räderwerks in einer Stampfmühle von der eines Stampfers); wir wollen erstere die Masse I, letztere die Masse II nennen, wo wir nicht besondere Buchstaben dafür gebrauchen.

2. Zunächst haben wir nun die oben schon vorgetragene Lehre vom Stoſse für die jetzige Anwendung noch zu ergänzen.

Es sey (*Fig.* 38ᵃ) vx eine steife Linie, die sich um d drehe, so daſs $vd = dx$ sey; in v sey die Masse M, in x die gleiche Masse M angebracht. Soll nun v mit einer bestimmten Geschwindigkeit C nach vw in Bewegung gesetzt werden, so entspricht dieser Geschwindigkeit eine gewisse Summe von Eindrücken, die wir für die Masse M in $v = S$ setzen wollen; dieselbe Summe von Eindrücken muſs aber in diesem Falle auch für die Masse M in x angenommen werden, so daſs in beide Massen zusammengenommen eine Summe von Eindrücken $= 2S$ wirken muſs. Offenbar ist es nun für die Bewegung der Stellen v und x ganz dasselbe, als wäre nur in Einer der beiden Stellen die Masse $2M$ mit den Eindrücken $2S$ angebracht, sey es in v oder in x.

Kommt nun bei dieser Bewegung die steife Linie vx in die Lage wy, und befindet sich in y eine Masse m, auf welche die vereinten beiden Massen $2M$ mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit C einen centralen Stoſs ausüben können, so wird im Augenblick des Stoſses die Geschwindigkeit C in eine kleinere $\mathfrak{C}$ verwandelt, und wir erhalten, Elasticität bei Seite gesetzt, nach No 21* (§. 16.)

$$\mathfrak{C} = \frac{2M}{2M + m} \cdot C$$

3. Aber hier haben wir es insbesondere mit dem Falle zu thun, wo vd und dx ungleich sind, auch in v und x ungleiche Massen angebracht seyn können. *Fig.* 38ᵇ.

Wirkt jetzt in die Masse M eine zur Geschwindigkeit C gehörige Summe von Eindrücken S bei v, so ist, dieser Kraft S in v, eine s in x äquivalent. Schiebt man also aus v, wo indessen die bewegende Kraft S nach vw angebracht bleiben soll, blos die träge Masse M in x herab, so wirkt jene bewegende Kraft, die noch in v fortwirkend angenommen wird, an der Stelle x als eine Kraft $\frac{vw}{xy} \cdot S$ oder $\frac{C}{c} \cdot S$, wenn wir die gleichzeitige Geschwindigkeit der Stelle x mit c bezeichnen.

In derselben Zeit, in welcher vorher die in v angebrachte *Masse* M vermöge der bewegenden Kraft S z. B. den Raum vw durchlief, mufs sie jetzt, in x angebracht, vermöge der bewegenden Kraft $\frac{C}{c} \cdot S$ einen Weg $= \frac{C}{c} \cdot vw$ durchlaufen, also die Stelle v einen Weg $= \frac{dv}{dx} \cdot \left(\frac{C}{c} \cdot vw\right) = \frac{C^2}{c^2} \cdot vw.$

Soll daher X eine Masse seyn, die statt der M in v, in x angebracht, die Bewegung der Stelle v ganz ungeändert läfst, so mufs $X = \frac{C^2}{c^2} \cdot M$ genommen werden, weil hiermit die Wirkung in die einzelnen Atome bei derselben bewegenden Kraft S im Verhältnisse $\frac{c^2}{C^2}$ vermindert wird, so dafs dann der Weg $\frac{C^2}{c^2} \cdot vw$ wieder in den $\frac{c^2}{C^2} \cdot \left(\frac{C^2}{c^2} \cdot vw\right) = vw$ verwandelt wird.

Ist also in y (*Fig.* 38[c]) eine harte (nämlich nicht elastische) Masse m; an der steifen Linie vx, die sich um d dreht, in v die Masse M; und in x die $\mathfrak{M}$ angebracht, so dafs die M mit der Geschwindigkeit C nach w, die $\mathfrak{M}$ mit der Geschwindigkeit c nach y sich bewegt, so ist der Erfolg ganz derselbe, als wäre die M in v nicht vorhanden, dagegen aber in x eine Masse $= \mathfrak{M} + \frac{C^2}{c^2} \cdot M$ angebracht, die nun mit der Geschwindigkeit $c = \frac{xy}{vw} \cdot C$ an die Masse m anstöfst, wodurch nun die Geschwindigkeit c in die

$$\mathfrak{C} = \frac{\left(\mathfrak{M} + \frac{C^2}{c^2} \cdot M\right) \cdot c}{\mathfrak{M} + \frac{C^2}{c^2} M + m}$$

verwandelt wird, und die C in die $\frac{\mathfrak{M} + \frac{C^2}{c^2} \cdot M}{\mathfrak{M} + \frac{C^2}{c^2} M + m} \cdot C.$

Wären an den steifen Linien (*Fig.* 38[d]), die sich um die gemeinschaftliche Axe bei d drehen, die Massen M, $\mathfrak{M}$ und μ, m angebracht, und stöfst nun die $\mathfrak{M}$ mit der Geschwindigkeikt c an die m, so wird im Augenblick des Stofses an die m aus der Geschwindigkeit c die $\frac{\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} \cdot M}{\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} \cdot M + m + \frac{dw^2}{dy^2} \cdot \mu} \cdot c.$ Würde hier M weggenommen, oder $M = o$, so würde aus c nach dem Stofse die $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} + m + \frac{dw^2}{dy^2} \cdot \mu} \cdot c.$

Diese Betrachtungen schienen mir hier nöthig, um zu zeigen, dafs die Reduktion der Massen bei allen Arten von Bewegungen, wo Massen, die zu einem System gehören und in diesem Systeme nothwendig verschiedene Geschwindigkeiten annehmen müssen, auf

einen gemeinschaftlichen Punkt gebracht werden sollen, immer nach dem Verhältnisse der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten zum Quadrate der Geschwindigkeit des bestimmten gemeinschaftlichen Punktes geschehen müsse, und dafs daher dieselbe Reduktion selbst beim Stofse, den ein System von Massen ausübt, ihre Anwendung behalte. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, mit der die Masse $\mathfrak{M}$, welche mit der Geschwindigkeit c an die m anstöfst, ihre Bewegung nach dem Stofse (*Fig.* 38[d]) fortsetzt, mit $\mathfrak{C}$, so hat man allemal

$$57.)\quad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} \cdot M}{\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} \cdot M + m + \frac{dw^2}{dy^2} \cdot \mu}$$

wo die Brüche die Verhältnifszahlen für die Quadrate der Geschwindigkeiten sind.

§. 54.

4. Bei der Auflösung unserer Aufgabe gilt es nun gleichviel, ob wir die Bewegung des Kraftpunktes oder die des Lastpunktes berücksichtigen. Wir wollen hier die Erscheinungen *in Bezug auf den Lastpunkt* betrachten.

Es sey nun

die auf den Lastpunkt reducirte Gröfse der beim Gange der Maschine in beständiger Bewegung bleibenden Massen..... $= \Pi$

Die periodisch jedesmal nach t Sekunden von neuem aus der Ruhe in Bewegung zu setzende Masse, gleichfalls auf den angenommenen Lastpunkt reducirt........................ $= \Sigma$

Der Weg, welchen der Lastpunkt in diesen t Sekunden durchlauft.. $= b.$

Der Weg, den der Kraftpunkt in t Sekunden durchlauft.... $= B.$

Die Geschwindigkeit des Kraftpunktes im Augenblick vor dem neuen Angriff $= C$

also diese Geschwindigkeit am Lastpunkte................ $= \frac{b}{B} \cdot C$

Die Geschwindigkeit des Kraftpunktes im ersten Momente nach dem Stofse oder nach Ergreifung der neuen Masse $= c$

also diese Geschwindigkeit am Lastpunkte................ $= \frac{b}{B} \cdot c$

so ist $\frac{b}{B} = \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot \frac{b}{B} \cdot C$ oder

$$58.)\quad c = \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C$$

5. Die Kraft am Lastpunkte ist $\frac{B}{b}P$, also die zur Bewegung noch übrige bewegende Kraft oder die Ueberwucht, welche in die gesammte Masse $\Pi + \Sigma$ wirkt, $= \frac{B}{b}P - Q$. Demnach die beschleunigende Kraft

$$= \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma}$$

6. Vermöge dieser beschleunigenden Kraft durchlauft der an der Last angreifende Punkt in t Sekunden den Weg

$$t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma} \cdot g$$

Weil er aber am Anfange dieser beschleunigten Bewegung schon die Geschwindigkeit $\frac{b}{B} \cdot c$ hatte, und $c = \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C$ ist, so durchlauft er deſshalb auch noch den Weg $t \cdot \frac{b}{B} \cdot c$ also überhaupt in der Zeit t den Weg

$$t \cdot \frac{b}{B} \cdot c + t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma} \cdot g$$

oder (nach No. 4) den Weg

$$b = t \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C + t^2 \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma} \cdot g$$

7. Während der jedesmaligen Beschleunigungszeit t erlangt der angegriffene Punkt *durch die beschleunigende Kraft* die Geschwindigkeit

$$2t \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma} \cdot g$$

welche zu der Anfangsgeschwindigkeit $\frac{b}{B} \cdot c$ oder $\frac{b}{B} \cdot \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C$ noch hinzu kommt; also ist am Ende der jedesmaligen Beschleunigungszeit t

$$\text{Geschwindigkeit des Lastpunktes} = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C + 2t \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi + \Sigma} \cdot g$$

Weil nun am Ende einer jeden solchen Periode die Geschwindigkeit des Kraftpunktes $= C$, also die des Lastpunktes $= \frac{b}{B} \cdot C$ seyn soll, so erhält man

$$\frac{b}{B} \cdot C = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Pi}{\Pi+\Sigma} \cdot C + 2t \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi+\Sigma} \cdot g$$

oder

$$\frac{\Sigma}{\Pi+\Sigma} \cdot \frac{b}{B} \cdot C = 2t \cdot \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi+\Sigma} \cdot g$$

Also

$$59.)\quad \frac{b}{B} \cdot C = \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Sigma} \cdot 2tg$$

Diesen Werth von $\frac{b}{B} \cdot C$ im letzten Ausdrucke No. 6 gebraucht, giebt

$$60.)\quad b = \frac{2t^2 g \cdot \Pi \cdot \left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right)}{(\Pi + \Sigma) \cdot \Sigma} + \frac{\left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right) \cdot t^2 g}{\Pi + \Sigma}$$

§. 55.

Hieraus folgt $\Sigma \cdot (\Pi + \Sigma) \cdot b = t^2 g \cdot \left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right) \cdot (2\Pi + \Sigma)$

und

$$61.)\quad P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\Sigma \cdot (\Pi + \Sigma) \cdot b}{t^2 g \cdot (2\Pi + \Sigma)}\right)$$

8. Für gleichförmigen Beharrungsstand wäre

$$P = \frac{b}{B} \cdot Q$$

Also ist die zum beständigen Ersatze der durch den Stofs beim Ergreifen einer neuen Masse verloren gehenden Geschwindigkeit erforderliche Ueberwucht

$$62.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot (\Pi + \Sigma) \cdot b}{t^2 g \cdot (2\Pi + \Sigma)}$$

9. Wäre Σ in Vergleichung mit Π unbedeutend, so hätte man

$$63.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot \Pi \cdot b}{t^2 g \cdot 2\Pi} = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot b}{2t^2 g}$$

Wäre dagegen Π gegen Σ unbedeutend, so wäre

$$64.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot \Sigma \cdot b}{t^2 g \cdot \Sigma} = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot b}{t^2 g}$$

Also fällt V allemal zwischen die beiden Grenzen

$$\frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma b}{t^2 g} \text{ und } \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma b}{2t^2 g}$$

10. Kann also Π vergröfsert werden, ohne zugleich Q zu vergröfsern, so wird V,

also auch die zur Betreibung der Maschine erforderliche Kraft desto kleiner, je gröſser Π gemacht wird; nie aber kann diese Ersparung an Kraft die Hälfte derjenigen Ueberwucht ausmachen, welche nöthig wäre, wenn $\Pi = o$ würde; in der Ausübung um so weniger, da mit der Vergröserung von Π allemal die Reibung also zugleich Q vergröſsert wird. Uebrigens versteht es sich von selbst, daſs ein bestimmter Werth von Π allemal mit der kleinst möglichen Masse, welche die Festigkeit fordert, verbunden seyn muſs.

11. Aus (No. 7) hat man die gröſste Geschwindigkeit des Lastpunktes

$$\frac{b}{B}\ C = \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Sigma} \cdot 2tg$$

Also ist die gröſste Geschwindigkeit des Last- und eben darum auch die des Kraftpunktes von Π ganz unabhängig, in so fern Aenderungen von Π nicht auch Aenderungen von Q zur Folge haben.

§. 56.

Der Zusammenhang führt uns hier noch auf eine zur Maschinenkunde gehörige Aufgabe, die der Leser bis zu ihrer vorkommenden Anwendung überschlagen kann.

An einem Systeme sind Kraft und Last so angebracht, daſs zum Wege B des Kraftpunktes der Weg b des Lastpunktes gehört; aber auf dem Wege b hat die Last 2 verschiedene Werthe Q und $\mathfrak{Q}$; es ist nämlich b aus zwei Theilen $\mathfrak{b}$ und β zusammengesetzt; auf dem Wege $\mathfrak{b}$ ist die Last $= Q$, auf dem β $= \mathfrak{Q}$; zum Wege $\mathfrak{b}$ gehört die Zeit $\mathfrak{t}$, zu dem β die Zeit τ; der Kraftpunkt soll den (zu $\mathfrak{b} + \beta$ also zu b gehörigen) Weg B in der Zeit t ($= \mathfrak{t} + \tau$) durchlaufen: man soll die hierzu erforderliche Kraft P bestimmen.

Auflösung. 1. Der Widerstand am jedesmaligen Anfange der Zeit t durch den Weg $\mathfrak{b}$ sey Q, so ist die Ueberwucht am Lastpunkte für die Zeit $\mathfrak{t} = \frac{B}{b} \cdot P - Q$.

Die auf vorige Weise auf den Lastpunkt reducirte Masse aller in Bewegung kommenden Theile des Systems, die dabei in beständiger Bewegung bleiben, sey $= \Pi$, so ist in Bezug auf den Lastpunkt

für den Weg $\mathfrak{b}$ und die Zeit $\mathfrak{t}$, die beschleunigende Kraft. . $\mathfrak{f} = \dfrac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi}$

der vermöge dieser beschleunigenden Kraft in der Zeit $\mathfrak{t}$ durchlaufene Weg....... $= \mathfrak{t}^2 \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{t}^2 \cdot \dfrac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Pi} \cdot g$

2. Wir nehmen aber an, der Lastpunkt habe am Anfange der Zeit $\mathfrak{t}$ schon eine Geschwindigkeit $= c$, vermöge der er in der Zeit $\mathfrak{t}$ ohne die Beschleunigung den Raum $\mathfrak{t} \cdot c$ durchlauft; demnach ist

$$t.c + t^2 . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . g = \mathfrak{b}$$

3. Die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t sey $= C$, so hat man

$$C = c + 2t . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . g$$

4. Jetzt folgt der gröſsere Widerstand Ω, und man erhält

für den Weg β und die Zeit τ die beschleunigende Kraft $\varphi = \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi}$

den wegen dieser Kraft durchlaufenen Weg $= \tau^2 . \mathfrak{g} = \tau^2 . \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . g$

Aber wegen der Anfangsgeschwindigkeit C am Anfange dieses Weges durchläuft der Lastpunkt in der Zeit τ schon den Weg $\tau . C = \tau c + \tau . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . 2\,t\,g$ (No. 3),

folglich $\tau . c + \tau . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . 2\,t\,g + \tau^2 . \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . g = \beta$

5. Aus No. 2 und 4 giebt sich $\mathfrak{b} + \beta$ oder

$$b = (t+\tau) . c + \tau . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . 2t\,g + t^2 . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . g + \tau^2 . \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . g$$

6. Die Geschwindigkeit am Ende des zweiten Zeitabschnittes haben wir (No. 2) $= c$ gesetzt; sie ist aber

vermöge der Anfangsgeschwindigkeit................ $= C$

vermöge der (negativ) beschleunigenden Kraft....... $= 2\tau . \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . g$

wo Ω gröſser als $\frac{B}{b} P$ ist, also

$$c = C + \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . 2\tau g$$

$$= c + 2t . \frac{\frac{B}{b}.P - Q}{\Pi} . g + 2\tau . \frac{\frac{B}{b}.P - \Omega}{\Pi} . g$$

und daher $$\mathfrak{t} \cdot \left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right) = \tau \cdot \left(\mathfrak{Q} - \frac{B}{b} \cdot P\right)$$

oder $$\tau \cdot \frac{B}{b} \cdot P - \mathfrak{t} \cdot Q = \tau \cdot \mathfrak{Q} - \mathfrak{t} \cdot \frac{B}{b} \cdot P$$

Demnach $$\mathfrak{t} \cdot \frac{B}{b} \cdot P = \tau \cdot \left(\mathfrak{Q} - \frac{B}{b} P\right) + \mathfrak{t} \cdot Q$$

$$\frac{B}{b} \cdot (\mathfrak{t} + \tau) \cdot P = \tau\, \mathfrak{Q} + \mathfrak{t} \cdot Q$$

also $$\frac{B}{b} \cdot P = \frac{\tau \mathfrak{Q} + \mathfrak{t} Q}{\tau + \mathfrak{t}} = \frac{\tau \mathfrak{Q} + t Q}{t}$$

und $$P = \frac{\tau \cdot \mathfrak{Q} + t Q - \tau \cdot Q}{t} \cdot \frac{b}{B}$$

$$= \frac{\tau \cdot (\mathfrak{Q} - Q) + t Q}{t} \cdot \frac{b}{B}$$

oder $$65.) \quad P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\tau \cdot (\mathfrak{Q} - Q)}{t}\right)$$

$$66.) \quad \tau = \frac{\left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right)}{\mathfrak{Q} - Q} \cdot t$$

$$67.) \quad t = \frac{(\mathfrak{Q} - Q) \cdot \tau}{\frac{B}{b} \cdot P - Q} \text{ und } \tau = \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\mathfrak{Q} - Q} \cdot t;$$

$$68.) \quad b = \frac{B \cdot P}{Q + \frac{\tau \cdot (\mathfrak{Q} - Q)}{t}}$$

$$69.) \quad \mathfrak{b} = \frac{B \cdot P}{Q + \frac{\tau}{t} (\mathfrak{Q} - Q)} - \beta$$

Es ist aber $\beta = b - \mathfrak{b}$, also auch

$$70.) \quad \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{B \cdot P}{Q + \frac{\tau}{t} (\mathfrak{Q} - Q)} - b\right)$$

Ferner $$\mathfrak{t} = t - \tau = t - \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\mathfrak{Q} - Q} \cdot t$$

oder $$71.) \quad \mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b} \cdot P}{\mathfrak{Q} - Q} \cdot t$$

Wenn der Lastpunkt den Raum $\mathfrak{b}$ durchlaufen hat und hiermit seine Geschwindigkeit $= C$ geworden ist, nun aber die beschleunigende Kraft $\dfrac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,.\,P}{\Pi}$ entgegen wirkt, so durchlauft er in der folgenden Zeit τ den Weg $\tau\,.\,C - \tau^2\mathfrak{g} = \tau\,.\,C - \tau^2 g\,.\,\dfrac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,.\,P}{\Pi}$
So wurde (No. 4)

$$\tau\,.\,c + \tau\,.\,\frac{\frac{B}{b}\,.\,P - Q}{\Pi}\,.\,2\mathfrak{t}g + \tau^2\,.\,\frac{\frac{B}{b}\,.\,P - \mathfrak{Q}}{\Pi}\,.\,g = \beta = b - \mathfrak{b}$$

Hieraus und aus (No. 2) geben sich zwei Werthe von c. Beide gleich gesetzt, giebt

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}g\,\frac{\frac{B}{b}\,.\,P - Q}{\Pi} = \frac{b - \mathfrak{b}}{\tau} - \frac{\frac{B}{b}\,.\,P - Q}{\Pi}\,.\,\mathfrak{t}g + \tau^2 g\,.\,\frac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,.\,P}{\Pi}$$

also $\dfrac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}} + \dfrac{\mathfrak{b}}{\tau}$ oder $\dfrac{\tau + \mathfrak{t}}{\mathfrak{t}\,.\,\tau}\,.\,\mathfrak{b} = \dfrac{b}{\tau} - \dfrac{\frac{B}{b}\,.\,P - Q}{\Pi}\,.\,\mathfrak{t}g + \tau^2 g\,.\,\dfrac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,.\,P}{\Pi}$.

und 72.) $$\mathfrak{b} = \frac{b\,.\,\mathfrak{t}}{t} - \frac{\frac{B}{b}\,.\,P - Q}{\Pi}\,.\,\frac{\mathfrak{t}^2\,.\,\tau}{t}\,g + \frac{\mathfrak{t}\,.\,\tau^3}{t}\,g\,.\,\frac{\mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,.\,P}{\Pi}$$

Hier sind nun B, b, P, Q, $\mathfrak{Q}$, Π und t gegeben, woraus man nach No. 71 $\mathfrak{t}$ findet womit man zugleich $\tau = t - \mathfrak{t}$ erhält. Man findet also $\mathfrak{b}$ und dann auch $\beta = b - \mathfrak{b}$.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daſs die Zeitabschnitte $\mathfrak{t}$ und τ blos von den Kräften abhängen, die zugehörigen Räume aber $\mathfrak{b}$ und β zugleich von der reducirten Masse Π

Ex. Es sey $b = 2'$, $B = 12'$, $P = 40$ ℔, $Q = 180$ ℔, $\mathfrak{Q} = 360$ ℔, $\Pi = 6000$ ℔, $t = 3$ Sekunden; so hat man (No. 67)

$$\tau = \frac{6\,.\,40 - 180}{360 - 180}\,.\,3 = \frac{60}{180}\,.\,3 = 1 \text{ Sekunde}$$

also $\mathfrak{t} = t - \tau = 2$ Sekunden, wie auch No. 71 gemäſs ist.

Es ist ferner $\dfrac{\mathfrak{t}}{t} = \frac{2}{3}$, $\dfrac{\mathfrak{t}^2\,\tau}{t} = \frac{4}{3}$, $\dfrac{\mathfrak{t}\,.\,\tau^3}{t} = \frac{2}{3}$;

$$\frac{B}{b}\,.\,P - Q = 60; \quad \mathfrak{Q} - \frac{B}{b}\,P = 360 - 240 = 120.$$

also $$\mathfrak{b} = 2\,.\,\tfrac{2}{3} - \frac{60}{6000}\,.\,\tfrac{4}{3}\,.\,15{,}09 + \tfrac{2}{3}\,.\,15{,}09\,.\,\frac{120}{6000}.$$

$$= 1{,}3333 - 0{,}2012 + 0{,}2012 = 1{,}3333'$$

daher $$\beta = b - \mathfrak{b} = 2 - 1{,}3333 = 0{,}6667'.$$

Hier wältigt also am Lastpunkte eine Kraft von 240 ℔

auf dem Wege $\mathfrak{b}$ (= 1,3333′) eine Last von 180 ℔

— — β (= 0,6667′) eine Last von 360 ℔.

Zum Wege $\mathfrak{b}$ gehören jedesmal 2 Sekunden = $\mathfrak{t}$

— — β — — 1 Sekunde = τ.

dabei ist $\mathfrak{b}$ doppelt so grofs als β.

Je gröfser Π ist, desto kleiner wird $\mathfrak{b}$, also desto gröfser β, insofern mit der Vergröfserung von Π nicht etwa zugleich eine Lastvergröfserung verbunden ist, welche ihr diesen Schlufs nicht gestattete.

Der kleinst mögliche Werth von $\mathfrak{b}$ bleibt doch immer, wenn man auch Π unendlich grofs machen wollte, = 1,3333, also müfste β immer kleiner bleiben als $2 - \frac{4}{3}$ oder kleiner als $\frac{2}{3}$′.

7. Auf periodische Ergreifung neuer in Bewegung zu setzenden Massen Σ und $\mathfrak{S}$ ist hier keine Rücksicht genommen worden; überhaupt habe ich die *Masse* der Last ganz bei Seite gesetzt, was nur gestattet ist, wenn immer dieselbe Masse in Bewegung bleibt. Meistens genügt es aber, wenn am Ende der Rechnung noch eine Korrektion vorgenommen wird, durch die man der erforderlichen Ueberwucht beiläufige Rechnung thut, indem man die Rechnung ganz so, wie vorhin, führt, dann aber die erforderliche Kraft nicht $= P$, sondern $= P + \frac{b}{B} \cdot \left(\frac{(\Sigma + \Pi)\,\beta}{\tau^2 . g . (\Sigma + 2\Pi)} + \frac{(\mathfrak{S} + \Pi)\,.\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}^2 . g\,(\mathfrak{S} + 2\Pi)} \right)$ setzt (No. 62), wo Σ die reducirte Masse für die Zeit τ, und $\mathfrak{S}$ die reducirte Masse für die Zeit $\mathfrak{t}$ bezeichnet.

Im vorstehenden Exempel bliebe dann alles ungeändert, aber die zur Hervorbringung der angegebenen Wirkung erforderliche Kraft wäre nicht = 40 ℔; sondern es müfste die hier angegebene Ueberwucht noch zu 40 addirt werden.

IV. Kapitel.

ANWENDUNG DER LEHRE VOM HEBEL AUF DIE VERTHEILUNG DES DRUCKS BEI MEHREREN UNTERSTÜZZUNGSPUNKTEN.

§. 57.

Der parallelepipedische Balken, dessen Schwerpunkt a (*Fig.* 39) in seiner Mitte liegt, sey in 3 Punkten m, n, v, die in einer horizontalen Linie liegen, unterstützt. Sein Druck auf m sey $= P$ in der Entfernung $am = \alpha$
— n — $= S$ — — — $an = \gamma$
— v — $= Q$ — — — $av = \beta$.

so ist
$$P : Q : S = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma} = \beta\gamma : \alpha\gamma : \alpha\beta$$

Nun ist, wenn wir des Balkens Gewicht $= R$ setzen, $P + Q + S = R$, also
$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \beta\gamma : P$$
$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \alpha\gamma : Q$$
$$(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) : R = \alpha\beta : S$$

und

$$73.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \\[2ex] Q = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \\[2ex] S = \dfrac{\alpha\beta}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \end{cases}$$

Im Werthe von P fehlt im Zähler seine Entfernung α
Q — — — — — β
S — — — — — γ

Der Nenner enthält alle Amben, die sich aus α, β, γ machen lassen.

§. 58.

Statt P, Q, S, die zu den Entfernungen α, β, γ gehören, wollen wir A, B, C schreiben. Käme nun eine vierte Unterstützung bei o in der Entfernung δ von a hinzu, die vom Balken einen Druck D auszuhalten hätte, so wäre jetzt

$$74.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \,.\, R \\[2ex] B = \dfrac{\alpha\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \,.\, R \\[2ex] C = \dfrac{\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \,.\, R \\[2ex] D = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} \,.\, R \end{cases}$$

wo in den Zählern von A, B, C, D, die Entfernungen α, β, γ, δ fehlen, die Nenner aber die Summe aller Ternen sind, welche sich aus allen Entfernungen α, β, γ, δ machen lassen.

Hieraus erhellet zur Genüge das allgemeine Gesetz für die Bildung der Werthe von A, B, C, D, E *&c.* für jede Anzahl von Unterstützungen.

§. 59.

Die Grundfläche eines Körpers sey $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ oder von sonst beliebiger Gestalt (*Fig.* 40); v sey der lothrecht unter dem Schwerpunkte liegende Punkt der Grundfläche, der also als Schwerpunkt dieser Fläche angesehen werden kann.

Diese Grundfläche sey in 3 Punkten A, B, C unterstützt, wo A, B, C zugleich den Druck bezeichnen sollen, den diese Stellen vom Körper leiden: *man soll die Werthe* A, B, C *finden*, (das Gewicht des Körpers $= R$ gesetzt.)

Auflösung. Man fälle die Perpendikel

$$Aa = a,\quad v\alpha = \alpha$$
$$Bb = b,\quad v\beta = \beta$$
$$Cc = c,\quad v\gamma = \gamma$$

so ist $a \,.\, A = \alpha \,.\, R$; $b \,.\, B = \beta \,.\, R$; $c\, C = \gamma \,.\, R$;

also

$$A = \frac{\alpha}{a} \cdot R$$

$$B = \frac{\beta}{b} \cdot R$$

$$C = \frac{\gamma}{c} \cdot R$$

was allemal richtig bleibt, v mag wo man will im Dreieck ABC liegen.

Dieses giebt dann, weil allemal die drei Unterstützungen die ganze Last zu tragen haben, also $A + B + C$ nothwendig $= R$ seyn mufs, den schönen geometrischen Satz

$$75.) \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1$$

der sich auch geometrisch beweisen läſst.

§. 60.

𝔄 𝔅 ℭ 𝔇 (*Fig.* 41) sey die, wie man will, gestaltete Grundfläche eines Körpers, v wie vorhin der lothrecht unter des Körpers Schwerpunkt liegende Punkt der Grundfläche, welche in vier Punkten A, B, C, D unterstützt ist, und in diesen Stellen wie von Gewichten A, B, C, D: *man soll die Werthe von A, B, C, D bestimmen.*

Auflösung. Man ziehe $v\gamma$, dann Cc und Dd auf BA senkrecht, so ist,

für die Umdrehung um AB 1) $Dd \,.\, D + Cc \,.\, C = v\gamma \,.\, R$

— — — — — BC 2) $eD \,.\, D + aA \,.\, A = \alpha v \,.\, R$

— — — — — CD 3) $Af \,.\, A + Bh \,.\, B = v\beta \,.\, R$

— — — — — AD 4) $kB \,.\, B + mC \,.\, C = v\delta \,.\, R$

Man hat also

5) $(Dd + De) \,.\, D + (Cc + mC) \,.\, C + (Bh + Bk) \,.\, B + (Aa + Af) \,.\, A = (v\alpha + v\beta + v\gamma + v\delta) \,.\, R$

Aus no. 2 ist I) $A = \dfrac{\alpha v \,.\, R - eD \,.\, D}{aA}$

Aus no. 3 II) $A = \dfrac{\beta v \,.\, R - hB \,.\, B}{Af}$

Aus no. 3 III) $B = \dfrac{v\beta \,.\, R - fA \,.\, A}{Bh}$

Aus no. 4 IV) $B = \dfrac{v\delta \,.\, R - mC \,.\, C}{Bk}$

Aus no. 1 V) $C = \dfrac{v\gamma \,.\, R - dD \,.\, D}{Cc}$

Aus no. 4 VI) $C = \dfrac{v\delta \,.\, R - kB \,.\, B}{Cm}$

Aus no. 2 VII) $D = \frac{v\alpha . R - aA . A}{De}$

Aus no. 1 VIII) $D = \frac{v\gamma . R - cC . C}{Dd}$

Aus III und IV giebt sich C durch A, so auch aus VII und VIII, die III und IV geben

$$Bk . v\beta . R - Bk . fA . A = Bh . v\delta . R - Bh . mC . C$$

also
$$C = \frac{(Bh . v\delta - Bk . v\beta) . R + Bk . fA . A}{Bh . mC}$$

die no. VII und VIII geben

$$Dd . v\alpha . R - Dd . aA . A = De . v\gamma . R - De . cC . C$$

also
$$C = \frac{(De . v\gamma - Dd . v\alpha) . R + Dd . aA . A}{De . cC}$$

Demnach

$$\frac{(Bh . v\delta - Bk . v\beta) . R + Bk . fA . A}{Bh . mC} = \frac{(De . v\gamma - Dd . v\alpha) . R + Dd . aA . A}{De . cC}$$

oder
$$De . cC . (Bh . v\delta - Bk . v\beta) . R + De . cC . Bk . fA . A$$
$$= Bh . mC . (De . v\gamma - Dd . v\alpha) . R + Bh . mC . Dd . aA . A$$

Daher
$$(De . cC . Bk . fA - Bh . mC . Dd . aA) . A$$
$$= Bh . mC . (De . v\gamma - Dd . v\alpha) . R - De . cC . (Bh . v\delta - Bk . v\beta) . R$$

und

$$76.) \quad A = \frac{Bh . mC . (De . v\gamma - Dd . v\alpha) . De . cC. (Bh . v\delta - Bk . v\beta)}{De . cC . Bk . fA - Bh . mC . Dd . aA} . R.$$

Nunmehr hat man zuerst B aus VII.
Dann C aus VI
und D aus VII.

Wird eine der vier Entfernungen $v\alpha$, $v\beta$, $v\gamma$, $v\delta = o$, so verschwinden zwei Werthe von A, B, C, D, weil dann der Schwerpunkt in eine unterstützte gerade Linie fällt. Liegt z. B. v in β, so werden blos C und D gedrückt. Der Druck in C ist dann $= \frac{\beta D}{DC} . R$, der in $D = \frac{\beta C}{DC} . R$.

§. 61.

Die vorstehende Untersuchung ist streng mathematisch richtig, wo man es, wie die Lehre vom mathematischen Hebel voraussetzt, mit steifen unbeugsamen Linien zu thun hat. In der Ausübung hat man es aber immer mit Grundlagen zu thun, die bei einer nur etwas bedeutenden Last etwas nachgeben, und dieser Umstand macht alle vorstehende Bestimmungen ganz unbrauchbar, sobald es etwas ins Große geht. Die auf dem in c, d, e unterstützten Balken ab (*Fig.* 42) ruhende Mauer M mag immerhin unter ihrem Schwer–

punkte bei v unterstützt seyn, so hat die mittlere Unterstützung d keineswegs die Last M allein zu tragen. Schon bei der Aufführung der Mauer liegt der Balken in a und b wie in v auf, und die Mauer wird nicht als ein einziger fester Körper aufgestellt, sondern in allen Stellen nach und nach aus einzelnen drückenden Theilen zusammengesetzt. Es ist daher ganz dasselbe, als wäre der Balken ab aus zwei in v nur zusammenstofsenden Stücken av und bv zusammengesetzt, so daſs $\frac{1}{2}M$ auf av, und $\frac{1}{2}M$ auf bv ruht. Es drückt daher in a $\frac{1}{4}M$, in b gleichfalls $\frac{1}{4}M$, und in v $\frac{1}{4}M + \frac{1}{4}M$ oder $\frac{1}{2}M$.

Wären noch Unterstützungen z. B. in m und n angebracht, so wäre

$$\text{Druck auf } am = \frac{am}{ab}.M, \text{ also in } a = \tfrac{1}{2}\frac{am}{ab}.M, \text{ in } m = \tfrac{1}{2}\frac{am}{ab}.M$$

$$— \; — \; mv = \frac{mv}{ab}.M, \text{ also in } m \text{ nochmals} = \tfrac{1}{2}\frac{mv}{ab}.M, \text{ in } v = \tfrac{1}{2}\frac{mv}{ab}.M$$

$$— \; — \; vn = \frac{vn}{ab}.M, \text{ also in } v \text{ nochmals} = \tfrac{1}{2}\frac{vn}{ab}.M, \text{ in } n = \tfrac{1}{2}\frac{vn}{ab}.M$$

$$— \; — \; nb = \frac{nb}{ab}.M, \text{ also in } n \text{ nochmals } \tfrac{1}{2}\frac{nb}{ab}.M, \text{ in } b = \tfrac{1}{2}\frac{nb}{ab}.M.$$

Daher 77.)

$$\left\{\begin{aligned} \text{Druck in } a &= \tfrac{1}{2}\frac{am}{ab}.M \\ m &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{am}{ab}+\frac{mv}{ab}\right).M \\ v &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{mv+vn}{ab}\right).M \quad *) \\ n &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{vn+nb}{ab}\right).M \\ b &= \tfrac{1}{2}\frac{nb}{ab}.M \end{aligned}\right.$$

§. 62.

Man denke sich den bloſsen Balken ab (vor. *Fig.*) vom Gewicht Q; dieser werde von vier Arbeitern in a, m, n, b getragen: wie groſs ist die Last, welche jeder zu tragen hat?

Man findet solche Fragen schon in älteren Schriften, wo sie dann, wie in neueren, sehr unrichtig nach der Hebellehre beantwortet werden. Eigentlich gehört die Aufgabe zu den unbestimmten. Die Arbeiter in a und b können die Hälfte der ganzen Last Q tra-

*) In der Ausübung genügt meistens das *beinahe wahr seyn*. Bei der Ungewiſsheit, ob eine Kraft z. B. = 30 oder = 31 ℔ sey, erhalten wir doch immer ein Resultat für den Effekt, das als beinahe richtig gelten kann; aber die Voraussetzung einer völligen Unbeugsamkeit in Bezug auf die Folgen beim Druck ist von der Voraussetzung einer nur *geringen* Beugsamkeit *so* verschieden, daſs erstere gar nicht gebraucht werden kann.

gen, dann bleibt für die beiden andern noch die Hälfte übrig; erstere können $\frac{3}{4}\,Q$ tragen, so bleibt den übrigen zusammen nur noch $\frac{1}{4}\,Q$ übrig. Es könnte sogar noch ein fünfter unter dem Schwerpunkte v angestellt werden, der, anstatt den *ganzen* Druck Q auszuhalten, *gar nichts* trüge. Hier kommt alles darauf an, wie jeder Arbeiter seine Schultern an den Balken andrücken will. Hier ist also auch die Bestimmung des vorigen §. unanwendbar.

§. 63.

Eine ähnliche Bewandnifs, wie im vorigen §. hat es mit Lasten, die auf Pfählen ruhen.

Wäre z. B. das Gewicht der Mauer M (§. 61) $= 10000$ ℔, und $am = 3'$, $mv = 2'$, $vn = 4'$, $nb = 3'$, also $ab = 12'$, und unter a, m, v, n, b, Pfähle eingeschlagen, so wäre

$$\text{Druck in } a = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} \cdot 10000 = 1250\,\text{℔}$$

$$m = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3+2}{12} \cdot 10000 = 2083\tfrac{1}{3}\,\text{℔}$$

$$v = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2+4}{12} \cdot 10000 = 2500\,\text{℔}$$

$$n = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4+3}{12} \cdot 10000 = 2916\tfrac{2}{3}\,\text{℔}$$

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} \cdot 10000 = 1250\,\text{℔}$$

$$\overline{10000\,\text{℔}}$$

wenn alle Pfähle hinlänglich festen Stand haben.

Wir wollen aber annehmen, der Pfahl bei m vermöge nur eine Last von $1283\frac{1}{3}$ ℔ zu tragen, ohne tiefer zu sinken; der bei n nur eine Last von $1800\frac{2}{3}$ ℔, so kommt für a und v noch ein Druck von 800 ℔ hinzu, für v und b noch eine Last von 1116 ℔, und man hat jetzt

$$\text{Druck in } a = 1250 + \frac{mv}{av} \cdot 800 = 1570\,\text{℔}$$

$$m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1283\tfrac{1}{3}\,\text{℔}$$

$$1)\quad v = 2500 + \frac{am}{av} \cdot 800 = 2980\,\text{℔ (wegen } m)$$

$$n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1800\tfrac{2}{3}\,\text{℔}$$

$$2)\ \text{noch in } v = \frac{bn}{bv} \cdot 1116 = \ldots\ldots\ 478\tfrac{2}{7}\,\text{℔ (wegen } n)$$

$$\text{in } b = 1250 + \frac{vn}{bv} \cdot 1116 = 1887\tfrac{5}{7}\,\text{℔}$$

$$\overline{10000\,\text{℔}}$$

dafs also jetzt der Druck in $v = 3458$ ℔ ist.

§. 64.

Zuweilen wird ein Körper am einen Ende von einer festen wagrechten und am andern von einer lothrechten Ebene so unterstützt, dafs er Freiheit behält an beiden abzugleiten. Sein Gewicht sey Q.

GC sey horizontal, AC lothrecht, AB an AC angelehnt, man sucht die verschiedenen Pressungen des angelehnten Balkens nach AF, nach AB, und nach BK und AC lothrecht, (*Fig.* 43).

Auflösung. Der Schwerpunkt AB liegt in der Mitte m, daher, indem wir uns in der Mitte m das Gewicht Q denken, jeder der Punkte B und A einen Druck $= \frac{1}{2} Q$ vom Gewicht unmittelbar niederwärts leidet, aus welchem sämmtliche hier Statt habende Pressungen abgeleitet werden müssen. Wir wollen diese Gewichte ($\frac{1}{2} Q$) durch AD und Bk ausdrücken. Werden nun die zugehörigen Parallelogramme gezeichnet, so wird (ohne Rücksicht auf Reibung)

78.) Der horizontale Seitendruck $AF = ED = AD \,.\, tang\, BAC = \frac{1}{2} Q \,.\, Cot\, \alpha$

Der schiefe Druck $AE = \frac{AD}{Sin\, \alpha} = \frac{Q}{2.Sin\, \alpha}$; dieselbe Wirkung hat man noch einmal bei B nach BJ; also

79.) Der gesammte Druck nach $AB = \frac{Q}{Sin\, \alpha} = Q \,.\, Cosec\, \alpha$ (also nie $< Q$).

Bezeichnet jetzt BJ den gesammten Druck nach AB $\left(= \frac{Q}{Sin\,.\,\alpha}\right)$, so hat man zuerst.

80.) Druck nach $BG = BJ \,.\, Cos\,.\,\alpha = \frac{Q\,.\,Cos\,.\,\alpha}{Sin\, \alpha} = Q \,.\, Cot\, \alpha$.

81.) Aber der Balken AB strebt in B abwärts nach Bv zu fallen, mit einer Kraft $= \frac{1}{2} Q \,.\, Cos\, \alpha$; soll diese durch eine Kraft K nach BG aufgehoben werden, so mufs $K \,.\, Sin\, \alpha = \frac{1}{2} Q \,.\, Cos\, \alpha$, also $K = \frac{1}{2} Q \,.\, Cot\, \alpha$ seyn, welches also die Wirkung nach nach Bn ausdrückt. Demnach

80.*) Wirkung $BH = Q \,.\, (Cot\, \alpha - \frac{1}{2} Cot\, \alpha) = \frac{1}{2} Q \,.\, Cot\, \alpha$.

und 81.*) Druck $Bk = BJ \,.\, Sin\, \alpha = Q$.

§. 65.

Die schwere Linie (oder der Balken) *gehe jetzt, wie Bo* (*Fig.* 43) *über die lothrechte Wand CA weg, so dafs sie in A aufliegt: man sucht die verschiedenen Pressungen.*

Auflösung. Der Schwerpunkt des Balkens Ao sey z. B. r, so ist jetzt der auf Bo senkrechte Druck $Ak = \frac{Br}{BA} \,.\, Q \,.\, Cos\, \alpha$.

Eine Kraft, welche in A, nach kA wirkend, den Punkt A ruhig erhalten sollte, müſste also $= \frac{Br}{BA} . Q . Cos\,\alpha$ seyn. Die Wirkung dieser Kraft nach Ae in der Verlän- von FA wäre $= \frac{Br}{BA} . Q . Cos\,\alpha . Sin\,\alpha$. Da nun diese Kraft das Streben nach AF aufheben muſs, so hat man auch

$$\text{Druck } AF = \frac{Br}{BA} . Q . Cos\alpha . Sin\,\alpha$$

Der lothrechte Druck nach AC wird hier durch Aw ausgedrückt, oder, wenn wir den Druck $Ak = P$ setzen, durch $P . Cos\,\alpha$. Demnach hat man

$$\text{Druck nach } AC = \frac{Br}{BA} . Q . Cos\,\alpha^2.$$

Der Balken AB hat ein Streben, abwärts nach AB zu gleiten, $= Q . Sin\,\alpha$; also Streben nach $BG = Q . Sin\,\alpha . Cos\,\alpha$. Indem aber AB bei B sich nach $B\,v$ mit einer Kraft $\frac{Ar}{AB} . Q . Cos\,\alpha$ zu drehen strebt, woraus das Streben $Bn = Bv . Cos\,n\beta v = \frac{Ar}{AB} . Q . Sin\,\alpha . Cos\,\alpha$ entsteht, so bleibt das Streben nach BG nur noch $= \left(1 - \frac{Ar}{AB}\right) . Q . Sin\,\alpha . Cos\,\alpha = \frac{Br}{BA} . Q . Sin\,\alpha . Cos\,\alpha$, so groſs als der Druck AF.

Auch folgt aus $Bv \left(= \frac{Ar}{AB} . Q . Cos\,\alpha\right)$ der lothrechte Druck nach $Bk = Bv . Cos\,\alpha = \frac{Ar}{AB} . Q . Cos\,\alpha^2$. Aus $BJ\,(= Q . Sin\,\alpha)$ folgt aber noch ein Druck nach $Bk = BJ . Sin\,\alpha = Q . Sin\,\alpha^2$, also gesammter lothrechter Druck in B nach $Bk = \frac{Ar}{AB} . Q . Cos\,\alpha^2 + Q . Sin\,\alpha^2$; und die lothrechten Pressungen nach AC und Bk zusammengenommen $= \frac{Br + Ar}{AB} . Q . Cos\,\alpha^2 + Q . Sin\,\alpha^2 = Q$, wie sich gehört.

82.) Man hat also die nachstehenden Bestimmungen:

Horizontaler Druck $AF =$ Druck $BH = \frac{Br}{BA} . Q . Sin\,\alpha . Cos\,\alpha$

Lothrechter Druck $AD = \frac{Br}{BA} . Q . Cos\,\alpha^2$.

83.) Schiefer Druck des ganzen Balkens nach $AB = Q . Sin\,\alpha$

Wagrechter $BH =$ Druck AF

Lothrechter $Bk = \left(\frac{Ar}{AB} . Cos\,\alpha^2 + Sin\,\alpha^2\right) . Q$

Lothrechte Pressungen in A und B zusammen $= Q$.

Alles ohne Bezug auf Reibung. Siehe unten §. 258.

V. Kapitel.

VERSCHIEDENE ARTEN VON KRAEFTEN, WELCHE UNS DIE NATUR ZUM GEBRAUCHE BEI MASCHINEN DARBIETET.

§. 66.

Zu den Kräften, welche uns bei Maschinen und ihren Wirkungen zu Gebot stehen, oder dabei mitwirken, gehören:

Die *Schwere* (bei oberschlächtigen Wasserrädern, bei Laufrädern, bei der Tretscheibe u. s. w.)

Die *Muskelkraft* belebter Geschöpfe oder thierische Kräfte (bei Flaschenzügen, bei Fuhrwerken, bei Göpelkünsten u. s. w.)

Die *Stoſskraft* (bei unterschlächtigen Wasserrädern, bei Windmühlenflügeln, beim hydraulischen Stöſser, bei der Rammmaschine, bei Stampfwerken, bei Hammerwerken, bei Schleiſmühlen u. d. g.)

Die *Expansivkraft* der Luft, der Wasserdämpfe, elastischer Federn (bei der Luftmaschine, bei dem Pumpen, bei den Dampfmaschinen, bei den Uhren.)

Die *Centrifugalkraft* (bei dem Segnerischen Wasserrade, bei der Saugschwungmaschine.)

I. Die Schwere.

§. 67.

Wir haben die Schwere, die wir hier als eine unveränderliche absolute Kraft ansehen können, als beschleunigende Kraft schon kennen gelernt. Sie beruht nothwendig auf

allgemeinen Naturgesetzen, die wir aber zu wenig kennen, um ein Maafs für ihre Wirkung daraus ableiten zu können; wir müssen hierzu wirkliche Beobachtungen zu Hülfe nehmen, deren Resultate uns auch vollkommen genügen. Diese haben uns gelehrt, dafs

$$g = 15{,}09 \text{ Pariser} = 15{,}625 \text{ rhl. Fufs}$$
$$\lambda = 3 \text{ Fufs } 8\tfrac{1}{2} \text{ Linien (Pariser)}$$

sey, wenn wir unter g die Tiefe des freien Falls eines nur von der Schwere getriebenen Körpers in der ersten Sekunde und unter λ die Länge eines einfachen Sekundenpendels verstehen. (S. oben §. 3). Diese Bestimmung gilt für jeden Atom, in den die Schwere wirkt.

Weil es aber bei Maschinen nicht blos auf die Wirkung der Schwere in die einzelnen Atome ankommt, sondern auch auf die Menge der gesammten Atome eines Körpers, also auf sein Gewicht, welches der in einem Körper enthaltenen Atomenmenge proportional ist, so müssen wir die verhältnifsmäfsige Dichtigkeit einiger hierher gehörigen Materien näher kennen lernen. Man legt dabei das Gewicht irgend eines Volumens von Regenwasser zum Grunde, welches man als die Einheit betrachtet, nach welchem das Gewicht einer jeden andern Materie von gleichem Volumen bei derselben Temperatur angegeben wird. Die so bestimmten verhältnifsmäsigen Gewichte nennt man die *specifischen Gewichte* (auch specifischen Schweren) der Materien. Die nachstehenden Bestimmungen können bei einer Temperatur von 12° bis 15° Reaum. für alle Anwendungen in der Maschinenlehre als hinlänglich genau angesehen werden.

		Specifische Gewichte.
Wasser u. Luft.	Regenwasser	1,000
	Salzwasser, wenn sich unter 100 Lothen gesalznen Wassers φ Lothe Salz befinden	$1+0{,}007 \cdot \varphi$
	Luft, atmosphärische beiläufig	0,00118
Metalle.	Blei, englisches	11,325
	» teutsches	11,310
	Eisen	7,645
	Kupfer, schwedisches	8,784
	Messing, gegossenes	8,000
	» geschlagenes	8,349
	Stahl, weicher	7,738
	» harter	7,704
	Zinn, englisches	7,471
	Quecksilber, englisches	13,593
	» teutsches	14,000

		I. Grüne	II. Völlig dürre.
Holzarten.	Ahorn	0,903	0,659
	Buchen	0,971	0,592
	Eichenholz, vom Stamme	1,060	0,678
	» vom Zweige	1,060	0,615
	Eschenbaum	0,903	0,644
	Fichten	0,870	0,471
	Förlen	0,912	0,539
	Tannenholz	0,894	0,554
	Ulmen	0,948	0,552
Steinarten.	Gips, gemeiner		2,3
	Alabaster		2,7
	Marmor		2,7
	Granit		2,5 bis 2,7
	Sandstein		1,93 — 2,08

Bei einer Temperatur von 14° bis 15° Reaum. wiegt der rheinländische Kubikfuſs Regenwasser

	Berliner ℔.	Cöllner ℔.	Nürnberger ℔.	Pariser ℔.
	65,93	65,97	60,5	62,93
Der Pariser K. F.	73,24	73,28	67,2	69,90

Sehr gut stimmt hiermit die Angabe von *Callet* zusammen, welcher in seinen Logarithmentafeln (S. 120) den Par. K. F. bei 10° R. zu 69 ℔., 15 Unzen, 4 Quint. = 69,97 Pariser ℔ angiebt.

§. 68.

Da ohne Kenntniſs der eingeführten Gewichts- und Fuſsmaaſse in vorkommenden Fällen keine Vergleichung angestellt werden kann, so füge ich noch die nachstehenden Täfelchen bei.

TAFEL zur Vergleichung verschiedener landüblicher Gewichte, das Nürnberger Pfund als Einheit angenommen.

NAMEN DER OERTER.	VERHAELTNISSZAHL FÜR 1 ℔.	NAMEN DER OERTER.	VERHAELTNISSZAHL FÜR 1 ℔	NAMEN DER OERTER.	VERHAELTNISSZAHL FÜR 1 ℔
Altona	0,9500	Cassel	0,6210	Heidelberg	0,9890
Amsterdam	0,9688	Cölln	0,9169	Mannheim	0,9707
Ansbach	0,9998	Dänemark	0,9791	München	1,1000
Augsburg	0,9644	Dresden	0,9157	Paris	0,9615
Bamberg	0,9522	Englisch Troy ℔	0,7323	Prag	1,0075
Basel	0,9616	Erfurt	0,9257	Rom	0,6923
Bayreuth	1,0151	Erlangen	0,9998	Ruſsland	0,8023
Berlin	0,9187	Frankfurt a. Main, Pfundgew.	0,9208	Ulm	0,9193
Bern	1,0217			Wien	1,1018
Braunschweig	0,9157	Frankfurt a. d. Oder.	0,9178	Würzburg	0,9355
Bremen	0,9783	Freyberg	1,0524	Zelle	0,9524
Breslau	0,7949	Hamburg	0,9500		
Brüssel	0,9139	Hannover	0,9547		

Anmerkung. Noch andere hierher gehörige Angaben findet man z. B. in den Schulzischen trigonometrischen Tafeln und in Nelkenbrechers Taschenbuch für Münz- Maafs- und Gewichtskunde 1820.

Das Wiener Pfund kommt bei den Dampfmaschinen öfters vor. Nach vorstehenden Verhältnifszahlen ist ein Wiener Pfund = 1,2016 Cölln.

Wir werden meistens das Cöllnische Pfund gebrauchen. Es ist aber

Das Cöllnische ℔ = 2 Cöllnische *Mark*

Die Cöllnische Mark = 16 Loth *)

= 16 . 240 Gran = 3840 Gr.

= 65536 Richtpfennige.

also 1 Gr. = 17,07 Rpf.

Nach *neufranzösischem Gewicht* ist

Ein Centigramme =	2,8	Cölln.	Richtpf.
Ein Decigramme =	28,0	»	»
Ein Gramme =	280,5	»	»
Ein Dekagramme =	2805,0	»	»
Ein Hektogramme =	28050,1	»	»
Ein Kilogramme =	280500,6	»	» = 2,136 Cölln. ℔.
Ein Myriagramme =	2805006,2	»	»

§. 69.

Ich werde in der Folge, wo von bestimmten Fufsen die Rede ist und nichts besonders erinnert wird, allemal den *rheinl.* Fufs verstehen. Zur Reduction dient nachstehende

VERGLEICHUNGS-TAFEL verschiedener Fussmaasse nach dem Längen-, Flächen- und kubischen Maasse.

Den Pariser Fufs = 1 gesetzt.

NAMEN DER OERTER.	LAENGEN-FUSS.	QUADRAT-FUSS.	KUBIK-FUSS.	NAMEN DER OERTER.	LAENGEN-FUSS.	QUADRAT-FUSS.	KUBIK-FUSS.
Amsterdam........	0,8715	0,759	0,661	Braunschweig.....	0,8784	0,771	0,677
Ansbach...........	0,9166	0,840	0,769	Bremen	0,8902	0,792	0,705
Augsburg..........	0,9111	0,830	0,756	Breslau............	0,8750	0,766	0,670
Basel	0,9185	0,843	0,774	Brüssel	0,8958	0,802	0,718
Bayern **)	0,8984	0,807	0,724	Calenberg	0,8993	0,809	0,727
Berlin.............	0,9534	0,908	0,866	Cleve	0,9097	0,827	0,752
Bern..............	0,9028	0,815	0,735	Cölln	0,8472	0,718	0,608

*) 4 *Quinten* oder *Drachmen* machen 1 Loth; 2 Lothe eine *Unze.* Nach *Medizinalgewicht* ist 1 Pfund = 12 Unzen.

**) Die Angaben von Bayern und München in den Schulzischen Tafeln sind augenscheinlich unrichtig. Nach erhaltenen späteren Notizen wäre der Bairische Kubikfufs = 0,803 rheinl. K. F. also = 0,803 . 0,902

NAMEN DER OERTER.	LAENGEN-FUSS.	QUADRAT-FUSS.	KUBIK-FUSS.	NAMEN DER OERTER.	LAENGEN-FUSS.	QUADRAT-FUSS.	KUBIK-FUSS.
Copenhagen.......	0,9662	0,933	0,902	Nürnberg..........	0,9354	0,875	0,818
Danzig............	0,8833	0,780	0,689	Oldenburg	0,9118	0,831	0,757
Dresden...........	0,8715	0,759	0,661	Osnabrück	0,8597	0,739	0,635
England...........	0,9386	0,881	0,826	Pommern	0,8993	0,809	0,727
Erfurt	0,8727	0,761	0,664	Prag	0,9292	0,863	0,802
Frankfurt a. M.....	0,8819	0,777	0,686	Rheinl. Fuſs.......	0,9662	0,933	0,902
Genf..............	1,5021	2,256	3,389	Rom...............	0,9069	0,822	0,746
Genua, Palmi	0,7729	0,597	0,461	Rostock...........	0,8092	0,792	0,705
Gieſsen...........	0,9166	0,840	0,796	Russischer **).....	1,6569	2,745	4,548
Griechischer.......	0,9432	0,890	0,839	Savoyen...........	0,8333	0,694	0,578
Haag	1,0000	1,000	1,000	Schweden.........	0,9138	0,835	0,762
Halle (im Magdeb.)	0,9166	0,840	0,769	Stettin	0,8701	0,757	0,659
Hamburg..........	0,8819	0,777	0,686	Straſsburg.........	0,8910	0,794	0,707
Hannover	0,8993	0,809	0,727	Stuttgart..........	0,8806	0,775	0,682
Harlem	0,8799	0,774	0,681	Turin.............	0,9944	0,988	0,983
Heidelberg........	0,8576	0,735	0,630	Ulm	0,8895	0,791	0,703
Hollstein..........	0,9187	0,844	0,775	Utrecht............	0,8403	0,706	0,593
Königsberg........	0,9472	0,897	0,849	Venedig	1,0694	1,143	1,222
Leipzig............	0,8687	0,754	0,655	Wien ***).........	0,9861	0,972	0,958
Lübeck............	0,8958	0,802	0,718	Wittenberg........	1,0312	1,063	1,095
Lüttich............	0,8854	0,784	0,693	Zelle..............	0,8972	0,805	0,722
Mannheim.........	0,8930	0,797	0,712	Zürch	0,9243	0,854	0,789
Mainz.............	0,9270	0,859	0,784				
Mecklenburg.......	0,8958	0,802	0,718				
München*)........	0,6847	0,468	0,320				
Neapel............	0,8118	0,659	0,534				

Der *englische* Fuſs ist 0,9715 rheinländische, also engl. Quadratfuſs = 0,9438 rheinl. und der engl. Kubikfuſs = 0,9169 rheinl.

Nach dem neufranzösischen Maaſse ist

1 Meter = 3,0784 Par. Fuſs = 3,187′ rheinl.

1 Par. Fuſs = 0,32484 Meter.

Man wählte nämlich hiezu in Paris $\frac{1}{10000000}$, vom Quadranten des Erdmeridians (vom Abstande des Nordpols vom Aequator). Hiernach wurden nun gröſsere und kleinere Maaſse auf folgende Weise festgesetzt.

1 Dekameter = 10 Meter.	1 Decimeter = 0,1 Meter.
1 Hektometer = 100	1 Centimeter = 0,01
1 Kilometer = 1000	1 Millimeter = 0,001
1 Myriameter = 10000	sehr nahe = 0,0037 Par. Zoll.

= 0,724 Par. K. F., welches mit der in der Tafel angegebenen Zahl genau zusammenstimmt. Herr *Magold* giebt in seiner Polygonometrie (S. 171) 6,75 Bayrische Fuſs = 873,315 Par. Linien an, woraus ich die Zahlen in der Tafel berechnet habe.

*) Siehe die Note **) auf voriger Seite.

**) Man bedient sich aber in Ruſsland, besonders bei mathematischen Bestimmungen, meistens des engl. Fuſses.

***) Im ersten Bande der Wiener polytechnischen Jahrbücher kommen vielerlei Bestimmungen von Herrn *Arzberger* vor, aus deren Vergleichung ich für Wien die drei Zahlen 0,9729, 0,9465, 0,9208 abgeleitet habe. Hiernach findet man das Gewicht von 1 Wiener Kubikfuſs Wasser sehr nahe = 56,3 Wiener ℔; wie es auch Herr *Arzberger* angiebt.

Die neuen Badischen Längenmaafse sind

1 Ruthe	=	10 Badische Fufs		=	3 Meter
1 Fufs	=	1	» »	=	3 Decimeter
1 Zoll	=	0,1	» »	=	3 Centimeter
1 Linie	=	0,01	» »	=	3 Millimeter
1 Punkt	=	0,001	» »	=	0,3 Millimeter.

II. Die Muskelkraft belebter Geschöpfe.

§. 70.

Dieser Gegenstand ist für die Maschinenlehre wichtig, weil wir in unzähligen Fällen die menschlichen Kräfte, und so auch die Kräfte der Thiere, die, wo sie gebraucht werden können, immer mit wenigeren Kosten als die ersten verbunden sind, benutzen müssen. Die Bestimmung ihres Effects hat ihre eigene Schwierigkeiten und ist schon oft vergeblich versucht worden; man kann sagen: sie ist unmöglich, weil sie gegen die Verschiedenheit der Thiere, selbst derer von einerlei Art, streitet. Eine auf alle Fälle passende Bestimmung ist aber auch darum, bei einem und demselben Geschöpfe, unmöglich, weil der Effect auch von der Art der Anwendung abhängt, die man von der Kraft belebter Geschöpfe macht: ob zum Tragen, oder zum Zuge, oder zum Drucke, oder zum Stofse? Dann ist klar, dafs die Zeit der Anstrengung auf die Gröfse des Effects einen sehr bedeutenden Einflufs haben mufs. Bei neunstündiger Dauer der Anstrengung kann ein Bestimmtes Geschöpf stündlich nicht soviel leisten, als bei nur dreistündiger.

Ohne gehörige Berücksichtigung der Bedingungen hatte man von *Bouguer* und von *Euler* die nachstehenden Formeln eingeführt, und bald die eine bald die andere gebraucht:

1.) $p = P \cdot \left(1 - \frac{c}{C}\right)$; 2.) $p = P \cdot \left(1 - \frac{c^2}{C^2}\right)$; 3) $p = P \cdot \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2$

Die erstere ist von *Bouguer*, die beiden letzteren von *Euler*, der selbst die no. 3 der no. 2 vorzog.

p ist hierbei die Kraft, deren das Geschöpf bei der Geschwindigkeit c der von ihm angegriffenen Stelle fähig ist;

P die Kraft, die das Geschöpf anzuwenden vermag, ohne zugleich eine merkliche Bewegung zu bewirken;

c die zur Kraft p gehörige Geschwindigkeit;

C das Maximum der Geschwindigkeit, mit welcher ein Geschöpf zu wirken vermag, wenn der Widerstand höchst unbedeutend ist und in dieser Hinsicht als Null angesehen werden kann.

Euler meinte die Sache mit No. 2 recht gut getroffen zu haben, wenn man für Menschen $P = 60$ ℔ und $C = 6$ Fufse setzte.

In Herrn *Gilberts* Annalen der Phys. (1812) findet man eine Abhandlung von Herrn *Coulomb* über die Kraftanwendung des Menschen, wo er (S. 62) 145 Kilogramme ($= 145 . 2{,}136$ oder sehr nahe 310 Cöllnische ℔ als das gröſste Gewicht ansieht, das ein Mensch von *mittlerer* Stärke nur eine kleine Strecke weit forttragen könnte. Wiewohl ich nun selbst Arbeiter gefunden habe, welche gut 3½ Zentner auf eine ziemliche Strecke zu tragen vermogten, so sind dergleichen doch so selten als eine Fichte von 3 Fuſs Durchmesser am dicken Stammende, und müssen als gar nicht vorhanden betrachtet werden. Es kann hier selbst in der Bestimmung von P, wenn vom Tragen die Rede ist, nur auf Arbeiter Rücksicht genommen werden, wie man sie überall haben kann, so daſs man fordert, P soll als das beiläufige Maximum gelten, was ein solcher Arbeiter etwa tausend Fuſse weit, ohne die Last abzustellen, zu tragen vermag. Wir nehmen dabei weder das Land der Riesen noch das der Zwerge zum Muster, und glauben, das Mittel der Erfahrungsresultate ziemlich zu treffen, wenn wir in diesem Sinne, Arbeiter vorausgesetzt, die des Tragens gewohnt sind,

für die Bedingung des Tragens

$P = 120$ Cölln. ℔ setzen.

Wir setzen zugleich die Bedingung fest:

Die wirkliche Dauer der Anstrengung soll, in 24 *Stunden,* 9 *volle Stunden betragen — nach Abzug der Zwischenruhe, und Pausen.*

Dieser Bedingung zufolge setzen wir das Maximum der Geschwindigkeit für einen des Gehens gewohnten Fuſsgänger, der keine Last zu tragen hat, sondern ganz frei geht, = 5 rheinl. Fuſs. Dabei wird horizontaler Weg, ohne Wechsel von Steigen und Fallen vorausgesetzt. *)

Nach diesen Voraussetzungen schlieſsen wir uns in Bezug auf Menschen und zwar beim Tragen an die Bouguersche Formel an, und setzen bestimmter

84.) $p = 120 . (1 - \frac{1}{5} c)$ Cölln. ℔.

§. 71.

Aber die vorstehende Formel bedarf noch einer allgemeineren Form, um sie auch auf Wege anwendbar zu machen, die unter irgend einem Winkel α aufwärts steigen. Wir setzen daher

85.) $p = 120 . (1 - \frac{1}{5} c - 2 . Sin\, \alpha)$ in Cölln. ℔.

$= 24 \times (5 - c - 10 . Sin\, \alpha)$.

Geht der Fuſsgänger leer, so wird hiernach $1 - \frac{1}{5} c - 2 . Sin\, \alpha = o$, also

86.) $c = 5 . (1 - 2 . Sin\, \alpha)$; $Sin\, \alpha = 0{,}5 - 0{,}1 . c$

s. auch unten §. 75.

*) S. §. 76 in der Note.

Ich setze hierbei Ausdauer voraus, so dafs bei zwölfstündiger Anstellung allemal die Berechnung für neun Stunden geführt werden kann.

Die Länge des Weges zu einer bestimmten Höhe verhält sich wie $\frac{1}{Sin\,\alpha}$, also die hierzu erforderliche Zeit wie $\frac{1}{c\,.\,Sin\,\alpha}$ oder wie $\frac{1}{(1-2\,.\,Sin\,\alpha)\,.\,Sin\,\alpha}$.

Diese wird ein Minimum, wenn der Nenner ein Maximum wird, d. i. für $Sin\,\alpha = 0,25$ oder für $\alpha = 14^\circ$. Steigt der natürliche Boden (die Erde) einmal über 9°, so fängt der Tritt des Fufsgängers an, schon etwas unsicher zu werden, da dann der vortheilhafteste Werth von α etwas kleiner ausfallen könnte.

Dieses Resultat wird durch eine Beobachtung, die Herr *Wesermann* in seinem Taschenbuch S. 126 mittheilt, sehr gut bestätigt. Von drei Strafsen, die zu einem bestimmten Punkte führen, steigt die erste unter einem Winkel von 5 Gr., die zweite unter einem Winkel von 7 bis 8 Gr., die dritte unter einem Winkel von 11 Gr. Alle Fuhrwerke wählen die erste, alle Reuter die zweite und alle Fufsgänger die dritte.

Aus No. 85 wird auch allgemein

87.) $$c = 5 - (0{,}0416\,.\,p + 10\,.\,Sin\,\alpha)$$

d. h. ein des Gehens gewohnter Arbeiter kann täglich diesen Weg 32400 (= 3600 . 9) mal zurücklegen.

Es sey z. B. $\alpha = 0$, $p = 20$ ℔, so wird $c = 5 - 0{,}832 = 4{,}168$; dieses mit 32400 multiplicirt gibt für den Tag

$$\text{den ganzen Weg} = 135043' \text{ rheinl.}$$

$$= \frac{1350{,}43}{236} \text{ oder } 5{,}72 \text{ teutsche Meilen.}$$

Ich finde hierbei die Bemerkung nöthig, dafs auf Wege von mehreren Meilen $Sin\,\alpha$ nie $= 0$ gesetzt werden kann, und dafs dann, wenn man einen solchen Weg auch im Ganzen für *eben* (horizontal) ausgiebt, doch allemal $Sin\,\alpha = 0{,}04$ in die Formel eingeführt werden kann, was dann im vorstehenden Falle nur etwa 5,15 Meilen geben würde, die auch der Erfahrung gemäfs ein Bothe, der nur 20 ℔ zu tragen hat, in der Tageslänge von 12 Stunden gar wohl zurücklegen kann.

Wäre $Sin\,\alpha = \frac{1}{6}$, so hätte man

$$p = 24\,.\,(5 - c - 3{,}33) = (1{,}66 - c)\,.\,24$$

z. B. für $c = 1'$ würde $p = \frac{2}{3}\,.\,24 = 16$ ℔.

§. 72.

Nimmt man den Werth von p aus No. 85, und bezeichnet den Effekt mit E, so wird

$$E = p\,.\,c = 24\,.\,(5c - c^2 - 10\,.\,c\,.\,Sin\,\alpha)$$

und E wird ein Maximum, wenn

$$(5 - 10 \cdot Sin\,\alpha) \cdot c - c^2 \text{ ein Maximum wird}$$

d. i. für 88.) $c = 2{,}5 - 5 \cdot Sin\,\alpha$. *)

Substituirt man diesen Werth von c in No. 85, so erhält man

$p = 24 \cdot (5 - 2{,}5 + 5 \cdot Sin\,\alpha - 10 \cdot Sin\,\alpha)$ oder

89.) $p = 24 \cdot (2{,}5 - 5 \cdot Sin\,\alpha)$

Für $\alpha = o$ wäre

die vortheilhafteste Geschwindigkeit $= 2{,}5'$

und zugleich die vortheihafteste Last $= 24 \cdot 2{,}5 = 60$ ℔.

Für $Sin\,\alpha = \frac{1}{5}$ wäre $p = 24 \cdot 1{,}5 = 36$ und $c = 1{,}5'$.

Eine Anwendung hievon wäre, wenn ein Haufwerk (Erde, Getraide, Holz u. dgl.) auf eine Anhöhe gebracht werden sollte.

Man mufs nie vergessen, dafs hier von *ausdauernder* Arbeit die Rede ist, also neunstündige Anstrengung in 24 Stunden verstanden werden mufs.

§. 73.

In der Folge wird der Fall vorkommen, wo der Effekt vom Werthe des Produkts $c \cdot (Sin\,\alpha - Sin\,\varphi)$ abhängt, wo φ ein bestimmter Winkel ist. Wegen des Zusammen-

*) In der Folge kommt sehr oft die Forderung vor:

den Werth von x zu finden, für welchen der Ausdruck $m \cdot x - n \cdot x^2$ ein Maximum wird.

Für Leser, die des Differentialkalkuls unkundig sind, setze ich die folgende Auflösung her:

Statt $mx - nx^2$ setze man $n \cdot \left(\frac{m}{n} \cdot x - x^2\right)$, und suche nun den Werth von x, für welchen der veränderliche Faktor $\frac{m}{n} \cdot x - x^2$ am gröfsten wird. $\frac{m}{n}$ sey $= a$; denkt man sich nun einen Kreis vom Durchmesser a, und schneidet vom Durchmesser ein Stück zur Linken $= x$ ab, so bleibt zur Rechten noch der andere Theil $a - x$ übrig; und wenn man am Ende des Stücks x ein Perpendikel bis zum Umfange aufrichtet, und dieses Perpendikel mit y bezeichnet, so hat man aus der Geometrie die bekannte Proportion

$$x : y = y : (a - x)$$

also

$$ax - x^2 = y^2$$

wo nun x so bestimmt werden soll, dafs y^2 ein Maximum werde.

Die Geometrie belehrt uns aber, dafs das gröfstmögliche Perpendikel auf dem Durchmesser dasjenige ist, welches im Mittelpunkte des Kreises steht, dafs man also, um das gröfste y (oder den gröfsten Werth von $ax - x^2$) zu erhalten, $x = \frac{1}{2}a$ nehmen mufs.

Hier ist $a = \frac{m}{n}$, also, für das Maximum von $mx - nx^2$ oder auch von $\frac{m}{n} \cdot x - x^2$,

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \text{ oder } \frac{m}{2n}$$

Ist nun $\frac{m}{n} = 5 - 10 \cdot Sin\,\alpha$, und $x = c$, so wird $(5 - 10 \cdot Sin\,\alpha) \cdot c - c^2$ am gröfsten, wenn $c = \frac{1}{2} \cdot (5 - 10 \cdot Sin\,\alpha) = 2{,}5 - 5 \cdot Sin\,\alpha$ wird.

hangs der Rechnung wollen wir hier für diesen Fall die vortheilhaftesten Werthe von c und α suchen.

Weil für den hier angenommenen Fall, da $p = o$ seyn soll, nach No. 86 allemal $c = 5 \,.\, (1 - 2 \,.\, Sin\, \alpha)$ ist, so wird

$$c \,.\, (Sin\, \alpha - Sin\, \varphi) = 5 \,.\, (Sin\, \alpha - 2 \,.\, Sin\, \alpha^2 - Sin\, \varphi + 2 \,.\, Sin\, \alpha \,.\, Sin\, \varphi)$$

Weil nun $Sin\, \varphi$ eine unveränderliche Gröfse seyn soll, so erhält dieses Produkt den gröfstmöglichen Werth, wenn

$$(0{,}5 + Sin\, \varphi - Sin\, \alpha) \,.\, Sin\, \alpha$$

ein Maximum wird; daher (weil hier $\frac{m}{n} = 0{,}5 + Sin\, \varphi$ ist)

$$90.)\quad Sin\, \alpha = 0{,}25 + 0{,}5 \,.\, Sin\, \varphi$$

und nun $c = 5 \,.\, (1 - 2 \,.\, Sin\, \alpha)$ oder

$$91.)\quad c = 2{,}5 - 5 \,.\, Sin\, \varphi$$

z. B. $Sin\, \varphi = \frac{1}{4}$ giebt

$$c = 2{,}5 - 1{,}25' = 1{,}25'$$

$$Sin\, \alpha = 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375$$

Daher $\alpha = 22^\circ$ genau genug.

§. 74.

Da sich dem Gebrauch der menschlichen Körperkraft keine so bestimmten Verhältnisse vorschreiben lassen, wie in der Geometrie *die* sind, nach welchen die Seiten und Winkel eines Dreiecks von einander abhängen; da es überdas hier nur auf Resultate ankommt die der Wahrheit nahe liegen, und da endlich von 12 Tagesstunden hier nur 9 in Anschlag gebracht worden sind, auch mehrere einzelne Anwendungen gewissen allgemeinen Erfahrungen sehr gut entsprechen, so darf man an der Brauchbarkeit der höchst einfachen Grundformel (No. 85.) gar nicht zweifeln.

Ungerne bemerke ich, die grofsen Verdienste des Herrn *Coulomb* längst anerkennend, dafs seine oben erwähnte Abhandlung zu nichts nützen kann. Seine Bestimmungen der beim Tragen vorkommenden Verhältnisse, auf die sie allein beschränkt ist, sind nicht aus der Natur der Sache geschöpft, sind nichts weniger als einfach, nichts weniger als allgemein, und liefern darum auch für die wenigsten Fälle brauchbare Resultate, wohl aber sehr viele, deren Unstatthaftigkeit gleich ins Auge fällt. Seine Angabe von $P = 310$ ℔ führt auf ungeheure Resultate und ist wie aus einer Terra incognita genommen. Hat es mit *Desaguliers* Behauptung seine Richtigkeit, dafs 7 Franzosen auf 5 Engländer zu rechnen sind, so wäre hiernach für Engländer $P = 434$ ℔ — eine Tragkraft, die man keinem Pferde zuschreibt! Man mufs nicht vergessen, dafs *Coulomb* keineswegs von Aus-

nahmen der Natur spricht, sondern von Menschen nach dem Mittelschlage. Noch begeht er den Fehler, dafs er beim Steigen das Gewicht des Menschen selbst, das ihm auf horizontalem Wege gar nicht zur Last falle, als aufgeladene Last in Rechnung bringt. Wie Mancher, der 150 ℔ wiegt, vermag auf horizontalem Wege keine 120 ℔ zu tragen, und steigt dennoch auf einer steilen Leiter hinauf!

Uebrigens lassen sich bei der Bouguerschen Formel, die wir hier (mit den nöthigen Ergänzungen) zum Grunde gelegt haben, die Gröfsen P und p durch angemessene Benennungen sehr gut unterscheiden, wenn man P die *absolute* Tragkraft nennt, und p die *relative*.

Druck- und Zugkraft bei Menschen.

§. 75.

Wir behalten auch hier die Benennungen von *absoluter* und *relativer* Kraft bei. *Regnier* hat durch Beobachtungen mit dem Kraftmesser die *absolute Druckkraft* bei mehreren sehr kraftvollen Individuen zu 200 bis 300 Kilogrammen, also zu 427 bis 641 Cölln. ℔ gefunden.

In Bezug auf die *relative* Druckkraft will ich ein paar fremde Erfahrungen mittheilen. Die erste ist kolossalisch; man findet sie in Recueil de divers Mémoires par *Lesage*. (Paris 1806 I. Bd. S. 273). Der Kurbelgriff bei einem Scheiben-Paternosterwerk wurde eine Stunde lang ohnunterbrochen mit einer Geschwindigkeit von 6,94 Par. Fufs oder 7,18 rheinl. Fufs herumgetrieben, wobei jeder Arbeiter einen Widerstand von etwa 27 ℔ Cölln. zu wältigen hatte. Hier war also $p \,.\, c = 194$.

Perronet theilt uns dagegen in seiner Brückenbaukunst gleichfalls von einem solchen Paternosterwerk die Erfahrung mit, dafs bei einer Last von nur 16 ℔ Cölln., der Kurbelgriff mit einer Geschwindigkeit von 47″ Par., wofür wir hier die runde Zahl von 4 rheinl. Fufs annehmen können, betrieben worden. Hiernach wird $p \,.\, c = 64$.

Belidor (Architekt. Hydraul. I. Thl. 2 B. 1. Kap. §. 680) hat selbst beobachtet, dafs eine Kurbel, deren Arm 16 Par. Zoll lang war, von den Arbeitern, von denen Jeder $35\frac{1}{2}$ ℔ Kraft anwenden mufste, in einer Minute 55 mal herumgetrieben worden, doch sey diese Arbeit ein wenig zu stark gewesen. Hier war also $p = 35{,}5$ und $c = 7{,}681$ und $p \,.\, c = 272{,}67$; also noch bedeutend gröfser, als bei *Lesage*.

Borgnis meint (in seiner praktischen Maschinenlehre I. Buch, I. Kap. no. 14), die *absolute* Geschwindigkeit, bei der nämlich keine Last zu wältigen ist, werde *durch die Erfahrung* zu 3 Meter bestimmt; bei Arbeiten, die mit langdauernder Anstrengung verbunden seyen, könne man die *relative* Geschwindigkeit zu 0,8 Meter, also genau genug zu 2,5 rheinl. Fufs annehmen, wobei er sich übrigens um die dieser Geschwindigkeit entsprechende Last nicht bekümmert, wie er dann auch die Zeitdauer nicht näher bestimmt.

§. 76.

Wenn in der praktischen Maschinenlehre von gröſstmöglicher Geschwindigkeit C und von gröſstmöglicher Last P die Rede ist, so muſs dabei immer die Bedingung des Ausdauerns zum Grunde liegen. Nehmen wir von den 12 Tagesstunden 9 zur Bewegung verwendet an, also 32400 Sekunden, so können wir C doch nicht gröſser als zu 5 rheinl. Fuſs annehmen, da dann die Last $= o$ oder doch so gut als für Nichts zu achten seyn müſste. Ist hingegen die Bewegung kaum merkbar, so daſs die relative Geschwindigkeit c für nichts geachtet werden darf, so bleibt P immer sehr beschränkt, so daſs auch bei dem langsamsten Fortschreiten P für tägliche Ausdauer, doch nicht gröſser als 80 ℔ angenommen werden darf. *) Die einzige Aenderung, welche wir mit der Bestimmung No. 85 vornehmen, besteht daher darin, daſs wir dort $(1 - 0{,}005 \cdot \tau^2) \cdot 80$ statt 120 schreiben, wo τ die Stundenzahl der täglichen Anstrengung bezeichnet.

*) Erst später erhielt ich den *Traité de Mécanique Industrielle &c. par M. Christian* T. I. Paris 1822, welcher S. 91 (aus der Biblioth. britannique Sciences et Arts T. LVI.) nachstehende Erfahrungen von *Schulze* mittheilt.

Herr *Schulze* lieſs eine sehr gut verfertigte Rolle mit einer darum gelegten sehr beugsamen seidenen Schnur über einem Brunnen so anbringen, daſs die Schnur, an welcher ein Arbeiter ausserhalb dem Brunnen zog, bei dem Ziehen eine horizontale Richtung hatte. An dem in dem Brunnen lothrecht hinabhängenden Seilende war eine Art von Wagschale befestigt, um das Gewicht nach und nach so zu vergröſsern, daſs der Arbeiter mit der um die Schultern gelegten Schnur nicht mehr fortzuschreiten vermogte, sondern die Last gerade noch erhalten konnte. Er stellte seine Beobachtungen mit 20 verschiedenen Arbeitern an, wovon der kleinste 1,52 und der gröſste 1,86 Meter hoch war; bei jedem wurde die Rolle für den horizontalen Zug eingerichtet. Die Versuche wurden an verschiedenen Tägen wiederholt. Die Resultate waren für die 20 Arbeiter folgende:

N°. 1	44,46	Kilogr.	N°. 11	42,12	Kilogr.
» 2	49,14	»	» 12	46,80	»
» 3	51,48	»	» 13	51,48	»
» 4	46,80	»	» 14	42,12	»
» 5	49,14	»	» 15	51,48	»
» 6	46,80	»	» 16	44,46	»
» 7	53,82	»	» 17	46,80	»
» 8	49,14	»	» 18	42,12	»
» 9	44,46	»	» 19	51,48	»
» 10	42,12	»	» 20	49,14	»
	477,36			468,00	

Alle 20 Arbeiter hatten also eine absolute Kraft = 945,36 Kilog. und im Durchschnitte ein Einzelner = 47,768 Kilog. = 47,768 . 2,136 = 102 Cölln. ℔.

Ich finde mich durch diese Erfahrung zu keiner Abänderung der von mir angenommenen 80 ℔ veranlaſst, sondern glaube solche dadurch vielmehr als bestättigt ansehen zu dürfen.

Derselbe Beobachter, Herr *Schulze*, hat auch über die absolute Geschwindigkeit bei 20 verschiedenen Arbeitern Beobachtungen angestellt, die Herr *Christian* a. a. O. S. 92 gleichfalls mittheilt. Er lieſs einen Weg von 3708 Metern abmessen, und Jeden der 20 Arbeiter diesen Weg mit starkem Schritte so durchwandern, daſs derselbe diesen Schritt ohne Ermattung 4 bis 5 Stunden lang hätte fortsetzen können. Die Resultate waren folgende:

Hiermit wird, wenn wir ε statt $1 - 0{,}005 \,.\, \tau^2$ schreiben.

$$92.)\quad p = \varepsilon \,.\, 80 \,.\, (1 - \tfrac{1}{5} c - 2 \,.\, Sin\ \alpha)$$

oder auch

$$p = \varepsilon \,.\, 16 \,.\, (5 - c - 10 \,.\, Sin\ \alpha)\ \text{*)}$$

Man erhält demnach, weil jetzt $\frac{1{,}5\,p}{\varepsilon} = 120 \,.\, (1 - \tfrac{1}{5} c - 2\ Sin\ \alpha)$ wird, aus §. 71

No.	Zeitaufwand in Min.	Geschwindigkeit in Metern.	No.	Zeitaufwand in Min.	Geschwindigkeit in Metern.
1	40,18	1,526	11	36,17	1,702
2	41,12	1,489	12	38,11	1,619
3	39,08	1,714	13	38,05	1,622
4	39,40	1,557	14	37,01	1,668
5	34,19	1,801	15	36,17	1,702
6	35,11	1,755	16	41,28	1,534
7	38,07	1,622	17	42,25	1,455
8	40,09	1,541	18	40,19	1,508
9	40,20	1,532	19	37,57	1,548
10	40,51	1,514	20	39,05	1,634
		16,051			15,992

Die mittlere Geschwindigkeit der 20 Arbeiter war also $\frac{16{,}051 + 15{,}992}{20} = \frac{32{,}043}{20} = 1{,}6021$ Meter $= 1{,}6021 \,.\, 3{,}187$ oder 5,1 rheinl. Fuſs. Ich hatte schon oben (§. 70 am Ende) die mittlere absolute Geschwindigkeit eines des Gehens gewohnten Menschen zu 5 rheinl. Fuſs angenommen, so verstanden, daſs er solche ohne Ermattung 9 Stunden täglich auszuhalten vermögend wäre. Man sieht, daſs diese Angabe durch die Schulzischen Beobachtungen aufs Vollkommenste bestätigt wird.

*) Man fürchte nicht, daſs hiernach die Anstrengung oder der Werth von p zu groſs ausfalle. Der Cöefficient ε oder $1 - 0{,}005 \,.\, \tau^2$ mindert den Werth von p sehr der Natur menschlicher Kräfte gemäſs, so daſs für tägliche 9 stündige wirkliche Kraftanwendung nur noch

$$p = (1 - 0{,}005 \,.\, 81) \,.\, 16 \,.\, (5 - c - 10 \,.\, Sin\ \alpha)$$
$$= 9{,}6 \,.\, (5 - c - 10 \,.\, Sin\ \alpha)$$

gefunden wird; z. B. für $c = 2'$ und $\alpha = o$,

$$p = 9{,}6 \,.\, (5 - 2) = 28{,}8\ ℔$$

für $c = 3'$ wird, wenn $\tau = 9$ Stunden seyn soll

$$p = 9{,}6 \,.\, (5 - 3) = 19{,}2\ ℔$$

Herr *Christian* theilt a. a. O. S. 98 bis 101 eine weitschweifige Tafel mit, die *ich* wenigstens zu nichts zu brauchen weiſs. Ich habe es für nützlicher gehalten, für die Fälle, wo $\alpha = o$ ist (d. h. für horizontalen Zug) eine Tafel nach No. 92 zu berechnen, die ich hier mittheile.

Zeitdauer der wirklichen täglichen Anstrengung oder τ in Stunden.	Gröſse der Geschwindigkeit in rheinländischen Fuſsen.								
	$c = 1'$	$c = 1{,}5'$	$c = 2'$	$c = 2{,}3$	$c = 2{,}6$	$c = 3'$	$c = 3{,}5$	$c = 4'$	$c = 4{,}5'$
	Gröſse der wirklichen Anstrengung in Cölln. ℔.								
	p	p	p	p	p	p	p	p	p
1	63,68	55,72	47,76	42,98	38,21	31,84	23,88	15,92	7,96
2	62,72	54,88	47,04	42,14	37,63	31,36	23,52	15,68	7,84
3	61,12	53,48	45,84	41,06	36,67	30,56	22,92	15,28	7,64
4	58,88	51,52	44,16	39,56	35,33	29,44	22,08	14,72	7,36
5	56,00	49,00	42,00	37,62	33,60	28,00	21,00	14,00	7,00
6	52,48	45,92	39,36	35,26	31,49	26,24	19,68	13,12	6,56
7	48,32	42,28	36,24	32,46	28,99	24,16	18,12	12,08	6,04
8	43,52	38,08	32,64	29,24	26,11	21,76	16,32	10,88	5,44
9	38,02	33,26	28,51	25,54	22,81	19,01	14,25	9,50	4,75
10	32,00	28,00	24,00	21,50	19,20	16,00	12,00	8,00	4,00

Für $\tau = 8$ und $c = 2{,}4$ findet man $p = 28{,}29$.

und 72 alle hierher gehörige Bestimmungen, wenn man dort überall $\frac{1,5}{\varepsilon} \cdot p$ statt p schreibt. Wo p nicht vorkommt, bleiben die dortigen Ausdrücke ungeändert.

Man hat also wie (No. 86.)

$$93.)\quad c = 5 \cdot (1 - 2 \cdot \mathit{Sin}\,\alpha)$$

Ich wiederhole hier die Bemerkung, dafs man in der Anwendung auf Strafsen, die im Ganzen für horizontal gelten, doch immer $\mathit{Sin}\,\alpha = 0{,}04$ setzen darf.

Statt (No. 87.) hier

$$94.)\quad c = 5 - \left(\frac{0{,}063}{\varepsilon} \cdot p + 10 \cdot \mathit{Sin}\,\alpha\right)$$

Für das Maximum wie (No. 88.)

$$95.)\quad c = 2{,}5 - 5 \cdot \mathit{Sin}\,\alpha \text{ in rheinl. F.}$$

Statt (No. 89.) gleichfalls für das Maximum des Effekts

$$96.)\quad p = \varepsilon \cdot 16 \cdot (2{,}5 - 5 \cdot \mathit{Sin}\,\alpha)$$

Also für das Maximum wenn $\alpha = o$ ist,

$$c = 2{,}5 \text{ rheinl. F. und } p = \varepsilon \cdot 40 \text{ Cölln. ℔.}$$

$$p \cdot c = \varepsilon \cdot 100.$$

Die Formeln (No. 90.) und (No. 91.) bleiben ungeändert.

Die Gröfse des Effects beruht auf der Gröfse des Produkts $p \cdot c \cdot \tau$. Man findet bald, dafs *acht*stündige Anstrengung (alltäglich) die vortheilhafteste ist. Weitere Berechnung nach dieser Tafel giebt

für $\tau = 8$; $c = 2$; $p = 32{,}64$. $p \cdot c \cdot \tau = 522$
$\tau = 8$; $c = 2{,}3$; $p = 29{,}24$. $p \cdot c \cdot \tau = 538$
$\tau = 8$; $c = 2{,}6$; $p = 26{,}11$. $p \cdot c \cdot \tau = 543$
$\tau = 8$; $c = 3$; $p = 21{,}76$. $p \cdot c \cdot \tau = 522$
$\tau = 8$; $c = 3{,}5$; $p = 16{,}32$. $p \cdot c \cdot \tau = 457$
$\tau = 8$; $c = 2{,}4$; $p = 28{,}29$. $p \cdot c \cdot \tau = 543$

Es können also $c = 2{,}4$; $c = 2{,}5$ und $c = 2{,}6$ als gleich vortheilhaft und als diejenigen Geschwindigkeiten angesehen werden, bei welchen der Mensch am vortheilhaftesten beim Ziehen wirkt. Hiermit stimmt die Angabe von Herrn *Schulze* (Christian p. 98) sehr gut zusammen. Nach ihm ist $c = 0{,}757$ Meter $= 0{,}757 \cdot 3{,}187$ oder $= 2{,}41$ rheinl. Fufs und $p = 13$ bis 14 Kilogr. Setzen wir nun $p = 13{,}5$ Kilogr. so wird $p = 13{,}5 \cdot 2{,}136$ oder 28,83 Cölln. ℔.

Wir können hiernach bei täglicher 8 stündiger Anstrengung (wobei 8 Stunden zur wirklichen Arbeit verwendet werden) allemal für Arbeiter vom Mittelschlage eine Kraftanwendung von 28 bis 29 ℔ und eine Geschwindigkeit von 2,4 rhl. F. annehmen. Wenn übrigens bei der Arbeit die Anstrengung periodisch bedeutend vermindert wird, auch wohl häufige kurze Pausen eintreten und den Arbeitern nach 4 Stunden eine halbstündige Pause gestattet wird, so können die hier angegebenen Bestimmungen auch für 12 stündige Tagesarbeiten gelten, wofern 2 Parthien von *starken* Arbeitern von 8 zu 8 Stunden abwechseln, wobei dann 12 Stunden innerhalb 24 Stunden auf einen Mann kommen. Eine einzige Parthie kann auch 14 Stunden aushalten, wenn während dieser Zeit eine 1 stündige Pause zum Mittagsessen und daneben noch 2 halbstündige Pausen in angemessenen Zwischenzeiten gestattet werden. Eigene vieljährige Erfahrungen haben mich von der Richtigkeit dieser Angaben aufs Vollkommenste überzeugt.

Setzt man z. B. $c = 4'$, $\alpha = o$, so wird nach (No. 92) $p = \varepsilon . 16 . (5 - 4) = \varepsilon . 16$ ℔, ganz der Perronetschen Beobachtung gemäſs, wenn sich solche auf nur wenige Stunden bezieht, was bei Perronet wohl der Fall gewesen seyn mag. Vortheilhafter wäre nun nach vorstehenden Bestimmungen $c = 2{,}5'$ und $p = \varepsilon . 40$ ℔; für $c = 2{,}5'$ wird bei 8 stündiger Anstrengung $\varepsilon = 1 - 0{,}005 . 64 = 0{,}68$ und $p = \varepsilon . 40 = 27{,}2$ ℔, was dann auch unter den vorher bemerkten Bedingungen für 14 stündige Arbeiten gilt. Inzwischen muſs man das Verhältniſs der Effekte der Kraft nicht allemal auch für das Verhältniſs der Effekte der Maschine nehmen. Die letztere Bestimmung kann erst bei Betrachtung der einzelnen Maschinen vorkommen.

Wirkung menschlicher Kräfte bei ungleichförmigen Bewegungen.

§. 77.

Bisher war immer nur von gleichförmigen oder doch beiläufig gleichförmigen Bewegungen die Rede; aber die ungleichförmigen Bewegungen kommen zu häufig vor, um hier übergangen werden zu dürfen. Eine sehr bekannte Maschine ist die einfache Zugramme, an welcher mittelst eines über eine Rolle gelegten Seils ein Rammklotz aufgezogen wird. Man denke sich am einen Ende des Seils ein Rammklotz von $\mathfrak{P}$ Pfunden, am anderen einen Angriffsstab, an welchem ein Arbeiter mit einer Kraft von p Pfunden bis zur Tiefe h niederzieht; die Zeit, in welcher dieser Zug geschieht, sey $= t$ Sekunden, die Geschwindigkeit des Stabs am Ende eines solchen Zugs $= \mathfrak{C}$; man soll das Verhalten dieser verschiedenen Bestimmungsstücke gegen einander angeben.

Auflösung. Für die Ausübung bringe ich, mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse, die Last $1{,}06 . \mathfrak{P}$ in Rechnung. Weil die Geschwindigkeit von Null anfängt und der Weg h in einer vorgeschriebenen Zeit t durchlaufen werden soll, so wird hierzu eine bestimmte beschleunigende Kraft f erfordert, und es muſs p gröſser als $1{,}06 . \mathfrak{P}$ seyn, damit $f = \frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}$ hinlänglich groſs werde.

Man weiſs aus den obigen Lehren, daſs $t^2 . f . g = h$ seyn müsse, also f auch $= \frac{h}{t^2 . g}$;

demnach
$$\frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} = \frac{h}{t^2\, g}$$

und
$$97.)\quad p = \mathfrak{P} . \left(\frac{h}{t^2\, g} + 1{,}06\right), \text{ wo } g = 15{,}6' \text{ rheinl. ist.}$$

Die am Ende des Zuges erlangte Geschwindigkeit ist
$$98.)\quad \begin{cases} \mathfrak{C} = 2 . t . f . g \text{ oder} \\ \mathfrak{C} = \frac{2h}{t}; \end{cases}$$

also $$99.)\quad \mathfrak{C} = \frac{p - 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \,.\, 2\,t\,g$$

Ex. Es sey $\mathfrak{P} = 26$ ℔, $h = 3{,}5'$; $t = 0{,}666$ Sekunden, so wird

$$p = 26 \,.\, \left(\frac{3{,}5}{\frac{4}{9} \,.\, 15{,}6} + 1{,}06\right) = 26 \,.\, 1{,}56 = 40{,}56 \text{ ℔}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2 \,.\, 3{,}5}{\frac{2}{3}} = 10{,}5'$$; die mittlere Geschwindigkeit wäre $c = 5{,}25'$, wenn die Geschwindigkeit mit Null anfängt.

§. 78.

Es ist aber hierbei nicht zu übersehen, daſs die Zugtiefe h von der Hubhöhe H des Rammklotzes allemal verschieden ist. Kann dieses seinen Weg im Steigen ganz ungehindert fortsetzen, so steigt es am Ende des Zuges noch um die Höhe $\frac{\mathfrak{C}^2}{4g}$ weiter hinauf, was in unserm Ex. 1,76′ beträgt, wofür man wenigstens 1,5′ annehmen kann, so daſs die Höhe des Hubs $= 3{,}5 + 1{,}5 = 5'$ betragen würde. In besonderen Fällen kann der Unterschied noch viel bedeutender werden.

Mit diesem Aufschnellen des Rammklotzes hat es seine ausgemachte Richtigkeit; es ist ein nothwendiger Erfolg der Grundgesetze aller Bewegung. Eine besondere Beobachtung hierüber finden mir in *v. Wiebekings Beiträgen zur Brückenbauk.* S. 100. »Wenn sich die Arbeiter anstrengen, so können sie bei 5′ tiefem Zuge das Rammklotz 10′ hoch schnellen, welches mir die Erfahrung bewiesen hat.«

Man sieht, daſs hier ganz andere Verhältnisse eintreten, als bei der gleichförmigen Bewegung, die doch selbst allemal mit Beschleunigung anfangen muſs.

Verlangt man z. B., daſs das Rammklotz nur ½′ hoch gehoben oder der Angriffsstab ½′ tief niedergezogen werden dürfe, um eine Geschwindigkeit von 5,8′ zu erlangen, so hat man $h = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{C} = 5{,}8$ also (No. 98.) $t = \frac{2h}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{5{,}8} = 0{,}172$ Sek. Demnach (No. 97.)

$$p = 26 \,.\, \left(\frac{\frac{1}{2}}{0{,}462} + 1{,}06\right) = 26 \,.\, 2{,}14 = 55{,}64 \text{ ℔}.$$

Diese Anstrengung ist dem Arbeiter bis zur Geschwindigkeit von 5,8′ allerdings gar wohl möglich, weil sie nur auf 0,172 Sek. verlangt wird; soll der Angriffsstab noch vollends bis zur vorigen Tiefe von von 3,5′ niedergezogen werden, so ist hierzu noch $\frac{3{,}5 - 0{,}5}{5{,}8}$ oder 0,517 Sek. Zeit erforderlich, und die ganze Zugtiefe von 3,5′ erfordert $0{,}172 + 0{,}517 = 0{,}69$ Sek. Man sieht, daſs bei einer Anstrengung von etlich und 60 ℔, die der Arbeiter bei einer absoluten Kraft von 80 ℔ gar wohl ½ Sekunden lang aushält

die Zugtiefe von 3,5′ gleichfalls in $\frac{4}{7}$ Sek. erlangt werden kann. Nur beträgt dann der Ueberschufs der Hubhöhe des Rammklotzes nicht 1,5′ sondern nur 0,46′, so dafs 1,04′ am am Hube verlohren gehen. Inzwischen ersieht man hieraus, wie eine solche Last durch anfängliche grofse Anstrengung auch sehr schnell zu einer bedeutenden unveränderlichen Geschwindigkeit oder gleichförmigen Bewegung gebracht werden kann; da dann nach eingetretener gleichförmiger Bewegung nur noch Gleichheit zwischen Kraft und Last Statt hat, so dafs in unserem Beispiele p dann nicht mehr $= 55{,}64$ ℔, sondern nur noch $p = 26 \,.\, 1{,}06 = 27{,}56$ ℔ bleibt, was für 3′ Zugtiefe gilt, weil die Ueberwucht nur für den ersten halben Fufs nöthig ist.

Aber diese Bewegung von 27,56 ℔ mit 5,8′ Geschwindigkeit fortzusetzen, ist zuviel gefordert, da man nach (No. 94.) nur $c = 5 - 0{,}063 \,.\, 27{,}56 = 5 - 1{,}736 = 3{,}264$ findet. Indessen ist dort von anhaltender Anstrengung die Rede, hier soll eine solche Bewegung kaum 0,7 Sek. dauern, und dann bis zum Wiederanfange der Bewegung z. B. 2 — 0,7 oder 1,3 Sek. verfliefsen, so dafs nach dieser Voraussetzung in jeder Minute 30 Schläge geschehen. Es ist indessen klar, dafs diese 1,3 Sek. für so grofse Anstrengung keine Erholung gewähren, da die schnelle Wiederaufrichtung des Körpers gleichfalls Kraft erschöpft, und überhaupt 30 maliges so starkes Niederbeugen und Wiederaufrichten in 1 Min. den Arbeiter schon angreifen müfste, wenn er dabei auch gar keine Last zu wältigen hätte. Darum gestattet man solchen Arbeitern bedeutende Pausen, so dafs für 9 stündige dergleichen Arbeit in der Ausübung 4 ≈ 5 ≈ 6 Stunden zu Pausen gestattet werden. Inzwischen kann man doch auch hierbei bestimmte Voraussetzungen zum Grunde legen, denen man in der Ausübung allemal Genüge thun kann. Ich fordere zu dem Ende, es soll allemal dafür gesorgt werden, dafs

in Bezug auf 9 stündige Arbeit für 1 Arbeiter

$$100.)\quad n \,.\, (\mathfrak{P} + 10) \,.\, h = 600000$$

werde. Dabei ist

n die Anzahl von Zügen auf alle 9 Stunden, also für 540 Minuten angeschlagen.

$\mathfrak{P}$ das Gewicht des Rammklotzes in Cölln. ℔.

h die Tiefe des Zugs in rheinl. F.

Hiernach erhält man zugleich

$$101.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{600000}{h \,.\, n} - 10 \\[2ex] n = \dfrac{600000}{(\mathfrak{P} + 10) \,.\, h} \\[2ex] h = \dfrac{600000}{(\mathfrak{P} + 10) \,.\, n} \end{cases}$$

Statt $\mathfrak{P}$ mufs nach der Natur der Sache $\mathfrak{P} + \varphi$ in der Formel stehen, wo φ eine bestimmte Zahl bezeichnet; denn sonst würde man, für $\mathfrak{P} = o$, sowohl $n = \infty$ als $h = \infty$

erhalten, da doch sehr schnelles Auf- und Niederziehen auch eines leeren Seils die Kraft eines Menschen bald erschöpfen mufs, daher n immer sehr beschränkt bleibt. $\mathfrak{P} = o$ gäbe $n = \frac{600000}{10 \, . \, h}$; für $h = 3'$ hätte man also $n = 20000$ für 540 Minuten, und $\frac{20000}{540}$ oder 37 Hübe in einer Minute. Es versteht sich aber von selbst, dafs solche Fälle, die in der Ausübung gar nicht vorkommen, hier ganz ausgeschlossen bleiben. Die Zahl 10 statt φ ist daher nicht blos aus dem angegebenen Grunde gewählt worden, sondern weil sie den in der Ausübung vorkommen könnenden Werthen von $\mathfrak{P}$, n und h sehr gut entspricht. Man kann die Grenzen von $\mathfrak{P}$, n und h etwa so bestimmen:

$\mathfrak{P}$ nie kleiner als 18, nie gröfser als 45 ℔.
n nie kleiner als 3240, nie gröfser als 5500.
h nie kleiner als 2′, nie gröfser als 3,6′.

Durch 2 von diesen Gröfsen wird nach (No. 101.) allemal die dritte bestimmt, immer nur beiläufig, aber wie es für die Ausübung hinlänglich ist. Man entfernt sich aber, der Regel nach, immer etwas von den hier angegebenen Grenzen, um für die Ausübung noch mehr Sicherheit zu erhalten.

§. 79.

Nach *Coulomb* betrug bei einer zum Wasserbau gebrauchten Zugramme, mit welcher 20 mal in einer Minute geschlagen wurde, die Zugkraft eines einzelnen Arbeiters 20 Kilogr. $= 20 . 2{,}136$ oder 42,7 Cölln. ℔; dabei wurde das Rammklotz 1 Meter $= 3{,}187$ rheinl. F. hoch gehoben. S. *Borgnis praktische Maschinenlehre* I. Buch, I. Kap. no. 7.

Nach *Perronet* (Brückenbaukunst) geschahen mit einer solchen Zugramme 30 Schläge in einer Minute. Auf jeden Arbeiter kamen 26 ℔ Cölln.; der Hub war 4,66 rheinl. Fufs.

Sowohl die 42,7 ℔ bei *Coulomb*, als die 26 ℔, bei *Perronet* beziehen sich hierbei auf den Theil vom Gewicht des Rammklotzes, welcher auf 1 Arbeiter fällt, und die 3,187′ und 4,66′ sind die Höhen, zu welchen das Rammklotz erhoben wurde, nicht die Tiefe des Zugs.

Die Zeit eines Niederzugs ist nicht gegeben; ich werde aber wenig fehlen können, wenn ich in Bezug auf Sek.

bei *Coulomb* $t^2 = 1{,}7$
bei *Perronet* $t^2 = \frac{4}{9}$ annehme.

Setzen wir bei Coulomb $h = 3'$, so wird (No. 97.)

$$p = 42{,}7 \, . \left(\frac{3}{1{,}7 . \ 15{,}6} + 1{,}06\right) = 50{,}4$$

$$f = \frac{50{,}4 - 1{,}06 \ . \ 42{,}7}{42{,}7} = \frac{51{,}38}{427} = 0{,}12$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2h}{t} = \frac{6}{1{,}3} = 4{,}615$$

$$H = 3 + \frac{\mathfrak{C}^2}{4g} = 3{,}341$$

Es war aber bei ihm nur $H = 3{,}187$. Man kann demnach $h = 2{,}9'$ setzen, woraus man dann $H = 3{,}20$ findet was genau genug mit Coulombs Angabe zusammenstimmt; p und f werden nicht merkbar abgeändert.

So findet man bei Perronet, wenn man $h = 3{,}5$ annimmt, H wiederum etwas zu groſs; nimmt man dann $h = 3{,}36'$, so wird $\mathfrak{C} = \frac{2 \cdot 3{,}36}{\frac{2}{3}} = 10{,}08$; $\mathfrak{C}^2 = 101{,}6$ und $H = 3{,}36 + \frac{101{,}6}{62{,}4}$ sehr nahe $= 5'$.

Nimmt man nun $h = 3{,}2$; so wird $\mathfrak{C} = \frac{2 \cdot 3{,}2}{\frac{2}{3}} = 9{,}6$; $\frac{\mathfrak{C}^2}{4g} = 1{,}48$ also $H = 3{,}2 + 1{,}48 = 4{,}68'$ was sehr genau die Perronetsche Angabe ist. Auch erhält man

$$p = 26 \cdot \left(\frac{3{,}2}{\frac{4}{3} \cdot 15{,}6} + 1{,}06\right) = 39{,}54 \text{ ℔}$$

Rechnet man nach No. 101., so wird bei *Coulomb*

$$n = \frac{600000}{(42{,}7 + 10) \cdot 2{,}9} = 3920$$

Nimmt man die wirkliche Arbeit mit 20 Schlägen auf die Minute den ganzen Tag über zu $3\frac{1}{4}$ Stunden an (Coulomb schlägt sie nach seiner Beobachtung in runder Zahl zu 3 Stunden an, wo also gar wohl $\frac{1}{4}$ St. zugelegt werden kann), so erhält man für 195 Min.

$$n = 195 \cdot 20 = 3900 \text{ (statt 3920)}$$

Für die Perronetschen Beobachtungen wird nach (No. 101.)

$$n = \frac{600000}{(26 + 10) \cdot 3{,}2} = 5217.$$

Bei dieser Beobachtung hatte man 30 Schläge in 1 Minute und jeden Zug um $\frac{1}{10}$ tiefer als bei Coulomb, der nur 20 Schläge in der Minute hatte. Diese gröſsere Anstrengung wird nicht dadurch ausgeglichen, daſs bei Perronet p nur $= 39{,}54$ ℔, hingegen bei *Coulomb* $= 50{,}4$ ℔ war.

Lassen wir dennoch in Vergleichung mit jenen $3\frac{1}{4}$ St. hier 3 St. gelten, so daſs wir hier nur $\frac{1}{13}$ weniger nehmen, so erhalten wir bei *Perronet* für 180 Sek.

$$n = 180 \cdot 30 = 5400 \text{ (statt 5217)}$$

Begreiflich muſs bald etwas mehr, bald etwas weniger gefunden werden; aber das Mehr und Weniger bei so sehr verschiedenen Arbeiten ist so unbedeutend, daſs hiermit die Bestimmungen (No. 101) ihre volle Brauchbarkeit beweisen.

§. 80.

Es sind noch Betrachtungen übrig, die wir um so weniger hier übergehen dürfen, da andere Schriftsteller in Untersuchungen über die körperlichen Kräfte der Menschen mit zu groſser Nachläſsigkeit zu Werk gegangen sind.

Das auf einen Arbeiter fallende Gewicht des Rammklotzes sey wie bisher $= \mathfrak{P}$; die Zeit des Zugs t aus zwei Theilen τ und t zusammengesetzt; in der Zeit τ wirke der Arbeiter mit der Kraft p, in der Zeit t mit der Kraft $\mathfrak{p}$, so sinkt der Angriffsstab

1.) in der Zeit τ durch den Weg $\tau^2 . \frac{p - 1{,}06\ \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g = \beta$

2.) in der Zeit t durch den Weg

$$\mathrm{t} . \frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . 2\,\tau\,g + \mathrm{t}^2 . \frac{\mathfrak{p} - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g = b$$

Beide Wege zusammen $(\beta + b)$ geben die ganze Zugtiefe h.

Man hat also für diese Wirkungsart

102.)
$$(\tau^2 + 2\,\tau\,\mathrm{t}) . \frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g + \mathrm{t}^2 . \frac{\mathfrak{p} - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g = h$$

oder auch, $t - \tau$ statt t gesetzt,

$$(2\,\tau\,t - \tau^2) . \frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g + (t-\tau)^2 . \frac{\mathfrak{p} - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g = h$$

Ex. Es sey $t = 1{,}5$ Sek.; $\tau = 0{,}3$ Sek.; $\mathfrak{P} = 30$ ℔, $p = 60$ ℔, $\mathfrak{p} = 36$℔, wie tief wird der Angriffsstab in der Zeit t niedergezogen werden?

Hier wird $h = (0{,}9 - 0{,}09) . \frac{60 - 31{,}8}{30} . 15{,}6 + 1{,}44 . \frac{36 - 31{,}8}{30} . 15{,}6$

$$= 0{,}81 . 14{,}66 + 1{,}44 . 2{,}18 = 11{,}875 + 3{,}139 = 15{,}01'$$

Man sieht, daſs hier das letzte Glied sogar verneint seyn dürfte z. B. $= - 8{,}875$. Setzt man $1{,}44 . \frac{\mathfrak{p} - 31{,}8}{30} . 15{,}6$ oder $0{,}7488 . (\mathfrak{p} - 31{,}8) = - 8{,}875$, so wird

$$\mathfrak{p} = - \frac{88750}{7488} + 31{,}8 = - 11{,}85 + 31{,}8 = 19{,}95 \text{ ℔}$$

oder genau genug $= 20$ ℔

und $h = 11{,}875 - 8{,}875 = 3'$

In diesem Falle dauert die Anstrengung von 60 ℔ nur für $^1/_5$ von der ganzen Zeit des Niedergangs, und für $^4/_5$ der ganzen Zeit braucht der Arbeiter nur 20 ℔ Kraft, um die Last $\mathfrak{P}$ von 30 ℔ vollends zu erheben, so daſs die Geschwindigkeit am Ende eines Zugs allemal $= o$ ist.

§. 81.

Soll die Bewegung in der Zeit t oder $t - \tau$ gleichförmig fortdauern, so muſs $\mathfrak{p} = 1{,}06\ \mathfrak{P}$ seyn, und dann wird

103.) $$(2\,\tau\,t - \tau^2) . \frac{p - 1{,}06 . \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} . g = h$$

Auch

$$104.)\quad p = \frac{\mathfrak{P} \cdot h}{(2\tau t - \tau^2) \cdot g} + 1{,}06 \cdot \mathfrak{P}.$$

Ex. Der Angriffsstab soll 1 Sek. lang niedergezogen werden und hiermit die Tiefe von 2,25′ erreichen, das Gewicht des Rammklotzes soll für jeden Arbeiter 30 ℔ betragen, und in den letzten $^3/_4$ Sek. die Bewegung gleichförmig seyn: wie grofs mufs p in der ersten Viertel-Sekunde seyn?

Hier wird $$p = \frac{30 \cdot 2{,}25}{(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{16}) \cdot 15{,}6} + 1{,}06 \cdot 30 = 41{,}7 \text{ ℔}$$

Für die letzten $^3/_4$ Sek. bleibt nur $p = 1{,}06 \cdot 30 = 31{,}8$ ℔.

§. 82.

Noch ist ein Fall übrig, welcher in der Ausübung sehr häufig vorkommt, wo nämlich eine Last durch einen Schwengel in Bewegung gesetzt wird, wie bei Handpumpen und beim Gebrauch des Bergbohrers.

Die am kurzen Hebelarme angebrachte Masse sey in Cölln. ℔ $= \mathfrak{P}$ (für 1 Arbeiter).

Die Länge dieses Hebelarms $= \lambda$ in rheinl. Fufsen.

Die Länge des längeren $= l$.

Das Gewicht des längeren Hebelarms auf die Entfernung l von der Umdrehungsaxe reducirt $= q$.

Die nach der Lehre vom Trägheitsmoment reducirte

Masse des Hebels oder Schwengels $= m$.

Masse des mitwirkenden Theils des Arbeiters $= M$.

Masse der Last $= \mathfrak{M}$.

Alles in Bezug auf den Theil, der auf *einen* Arbeiter fällt.

In der Entfernung l sey ein Angriffsstab durchgesteckt, der bis zur Tiefe h niedergedrückt werden soll, doch so, dafs er bis zur Tiefe $\mathfrak{h}$ leer geht, und dann erst die Last mit einer gewissen Geschwindigkeit des Angriffsstabs ergriffen wird, die wir $= C$ setzen.

Die Kraft, mit welcher der Arbeiter wirkt, $= p$.

Man soll das Verhalten aller dieser Bestimmungsstücke gegen einander angeben.

Auflösung. 1. Allgemein will ich die Nebenhindernisse, welche mit $\mathfrak{P}$ verbunden sind, durch $\alpha \cdot \mathfrak{P}$ ausdrücken; dieses giebt den gesammten Widerstand $= (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}$, und auf die Entfernung l reducirt $= \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}$; die in der Entfernung l entgegenwirkende Kraft ist $= p + q$; also die zum Niederdrücken des Schwengels wirkende Kraft $= p + q - \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}$.

2. Beim Ergreifen der Last, wo die Geschwindigkeit des Angriffsstabes schon $= C$ ist, die nämlich der Masse $M + m$ zukommt, wird diese Geschwindigkeit in die Masse $M + m + \mathfrak{M}$ vertheilt; sie wird daher in diesem Augenblick, wo der Stab schon den Weg $\mathfrak{h}$ durchlaufen hat, in die kleinere

$$c = \frac{M + m}{M + m + \mathfrak{M}} \cdot C \text{ verwandelt.}$$

3. In die Masse $m + \mathfrak{M}$ wirkt nun die Kraft $p + q - \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}$; hieraus entsteht die beschleunigende Kraft

$$f = \frac{p + q - \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}}{m + \mathfrak{M}}$$

womit der Stab in der Zeit $\mathfrak{t}$ den Weg

$$\mathfrak{t}^2 \cdot g \cdot \frac{p + q - \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}}{m + \mathfrak{M}}$$

durchlauft; aber vermöge der schon gehabten Geschwindigkeit C durchlauft er in dieser Zeit auch den Weg $\mathfrak{t} \cdot c$.

Am Anfange dieser Zeit $\mathfrak{t}$ hatte er in einer gewissen Zeit τ schon den Weg $\mathfrak{h}$ durchlaufen; man hat also für die gesammte Zeit t oder $\tau + \mathfrak{t}$

$$105.)\quad \mathfrak{t} \cdot c + \mathfrak{t}^2 \cdot g \cdot \frac{p + q - \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P}}{m + \mathfrak{M}} + \mathfrak{h} = h$$

und

$$106.)\quad p = \frac{[h - (\mathfrak{h} + \mathfrak{t} \cdot c)] \cdot (m + \mathfrak{M})}{\mathfrak{t}^2 \cdot g} + \frac{\lambda}{l} \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathfrak{P} - q.$$

Ex. Es sey, was sich gar wohl annehmen läſst, $C = 10'$, $t = 1{,}3$ Sek., $\mathfrak{t} = 1{,}1$ Sek., $h = 4'$, $\mathfrak{h} = 1{,}5'$; $\mathfrak{P} = 300$ ℔ ferner $\lambda = 2'$, $l = 10'$, $m = 6$ ℔, $M = 30$ ℔, $\mathfrak{M} = 12$ ℔, $q = 14$ ℔, so wird $c = \frac{30 + 6}{30 + 6 + 12} \cdot 10 = 7{,}5'$; $\mathfrak{t} \cdot c = 8{,}25$ also

$$p = \frac{(4 - 8{,}25) \cdot (6 + 12)}{1{,}1^2 \cdot 15{,}6} + 0{,}2 \cdot (1 + \alpha) \cdot 300 - 14 = -4 + 60 - 14 + 60 \cdot \alpha$$

so daſs beiläufig $p = 45$ ℔ angenommen werden könnte.

Hiernach würde jedesmal von einem Arbeiter am Schwengel eine Last von $60 + 3 - 14$ (nach Abzug des reducirten Schwengelgewichts) $= 49$ ℔ in 1,3 Sek. 2,5′ hoch erhoben; dieses kann in 1 Min. gar wohl ?0 mal geschehen, also stündlich 1200 mal; dieses giebt, wenn wir 4 ℔ als Nebenlast abrechnen, 200 mal das Gewicht von 45 ℔ auf die Höhe von 15′, also auf diese Höhe stündlich 200 . 0,682 oder 136,4 Kub. Fuſs Wasser, den Kub. Fuſs zu 66 ℔, was für 4 Arbeiter 545 Kub. Fuſs ausmacht.

Muskelkraft der Pferde.

§. 83.

Nachdem wir die Körperkraft des Menschen so umständlich betrachtet haben, als es uns für ein der praktischen Mechanik besonders gewidmetes Werk nöthig schien, werden wir die nicht minder wichtige Abhandlung über die Muskelkraft der Pferde kürzer fassen können. Wir wollen von Versuchen und Beobachtungen ausgehen.

Nach Versuchen von *Sauveur* zog ein mittelmäſsiges Pferd, in horizontalem Zuge, über eine Rolle eine Last von 175 ℔ 900 Ruthen lang in 1 Stunde. *Desaguliers* fand die Kraft bei gewohntem Gange des Pferdes = 200 ℔. *Belidor* rechnet bei der Zurücklegung eines Wegs von 12000 Par. Fuſs in 1 Stunde die angewendete Kraft = 180 ℔.

Borgnis giebt (in seiner *praktischen Maschinenlehre* I. Buch I. Kap. no. 81) als Erfahrung an, *der mittlere Effekt eines Pferdes im Zuge sey 7 mal so groſs als der eines Menschen im Zuge.* Dann setzt er

I. Die mittlere Zugkraft bei einer
 Tagesarbeit = 60 bis 70 Kilogr.
 also im Durchschnitt = 65 . 2,136 = 139 Cölln. ℔.

 Die zugehörige mittlere Geschwindigkeit beiläufig 1 Meter (= 3,187 rheinl. Fuſs).

II. Nach *Watt* und *Bolton* erhebt ein Pferd, bei 8 stündiger Tagesarbeit, 265360 Kilogr. auf die Höhe von 1 Meter.

 Hiernach kommen 19,68 ℔ Cölln. auf die Geschwindigkeit von 3,187 rheinl. F.

III. *Smeaton* giebt dafür nur 14 ℔ an.

IV. *Regnier* sogar nur 7,4 ℔. Die *absolute* mittlere Zugkraft bestimmt er dagegen zu 400 Kilogrammen, also zu 854 ℔, daſs also Regniers Angabe nur $\frac{1}{115}$ der absoluten beträgt.

Nach *Regnier's* in der That höchst lächlicher Angabe würde ein 12 jähriger Knabe mehr vermögen als ein mittelmäſsiges Pferd! Nicht mehr Aufmerksamkeit verdienen die Angaben von *Watt, Bolton* und *Smeaton*. Unter diesen 4 Angaben ist die von *Borgnis* die brauchbarste, aber auch sie steht mit der von ihm selbst vorher angegebenen Erfahrung im Widerspruche.

§. 84.

Wesermann, ein sehr achtungswürdiger teutscher Ingenieur, hat in seinem reichhaltigen *Taschenbuch für Straſsen- und Bergbaubeamte* (Düsseldorf 1814) Beobachtungen und Tafeln für die Zugkraft der Pferde mitgetheilt, die unsere Aufmerksamkeit verdienen.

1). Es ist durch die Erfahrung dargethan (a. a. O. S. 117), daſs ein ordentliches Pferd 3 Stunden lang, ohne gar zu groſse Anstrengung 400 bis 420 ℔ über eine Rolle ohne Reibung und Widerstand auf horizontalem Boden festhalten kann.

Die Meinung ist wohl, daſs blos die angehängte Last 400 bis 420 ℔ betragen solle, wo dann die Reibung der Zugkraft noch zu Hülfe kommt. Inzwischen kann man immer 400 ℔ als Mittelzahl beibehalten.

2.) Ist ein Pferd ganz frei, so kann es in der Sek. 12 Fuſs durchlaufen (ebendas.)

3.) Ein Pferd, welches mit 220 ℔ Kraft ein Fuhrwerk in Bewegung halten konnte, brauchte nach gemachtem Stillstande 400 ℔, um das Fuhrwerk wieder zur ersten Bewegung zu bringen. (S. 116)

4.) Die bergischen Kohlentreiber laden auf ein Pferd zum Tragen selten weniger als 300 ℔ Steinkohlen. Die gröſste Last war 510 ℔, die ein Pferd drei Stunden Wegs trug, ohne auszuruhen. (S. 117).

5.) Auf den zu 5° Steigen gebauten Straſsenstrecken in der Provinz Mark, wovon einige 6 bis 700 Ruthen lang sind, hat er beobachtet, daſs der Einspänner, welcher ein gutes Pferd hat, ohne Vorspann 13 bis 1500 ℔ herauf und ohne Radschuhe herunter fahren kann, wenn die Straſse vom beſsten Material, das kleiner als gewöhnlich zerschlagen seyn muſs, unterhalten und geebnet wird. (S. 114).

6.) Zwischen Duisburg und Elberfeld, wo gröſstentheils Ebene ist, führt der Einspänner auch wohl 1800 bis 3000 ℔, wo er dann an den 5° steigenden Straſsenstrecken Vorspann nimmt. (S. 114).

7.) Ein Dreispänner, der die Rheinstraſse von Frankfurt nach Holland passirte, hatte nach seinem Frachtbriefe 56 Zentner oder 6160 ℔ geladen, und legte ohne Vorspann in einer Zeitstunde 920 rheinl. Ruthen (11040 rheinl. Fuſs) zurück.

Mit gleicher Geschwindigkeit fahren gewöhnlich die Einspänner in ebenen Gegenden, wenn sie 14 bis 15 Zentner geladen haben (110 ℔ auf den Zentner gerechnet).

Doch fuhr auch ein Einspänner ohne Vorspann eine Last von 1892 ℔ 916 Ruthen weit in einer Stunde über jene Straſse, worauf ein leeres Fuhrwerk gewöhnlich 1200 Ruthen in der Stunde zurückgelegt. (S. 114).

8.) Eine Reihe von Einspännern auf der Gevelsberger Straſse, die alle beinahe 1400 ℔ Steinkohlen geladen hatten, waren schon 340 Ruthen weit unter allmähligem Steigen von $1\frac{1}{2}$ Graden bis zu $5\frac{1}{2}$ Graden vorgefahren; jetzt behielt die die Straſse das unveränderliche Steigen von $5\frac{1}{2}$°, und die Beobachtung wurde von nun an auf eine Länge von 90 Ruthen angestellt.

Dieser Weg wurde mit 12 maligem Pausen in $11\frac{1}{2}$ Minute zurückgelegt; dabei betrug

die Zeit der wirklichen Bewegung	$6\frac{1}{2}$ Minuten
die Zeit aller 12 Pausen...........	5 —
Gesammte Zeit	$11\frac{1}{2}$ Minuten.

Hiernach betrüge der Weg auf eine Zeitstunde 470 Ruthen.

9.) Noch theilt uns dieser teutsche Ingenieur (S. 124) nachstehende Beobachtung mit.

a) Vier einspännige mit 1416 ℔ Steinkohlen beladene Karren fuhren den 5 ½ Gr 186 Ruthen lang ansteigenden Ketwicher Berg mit abwechselnden Pausen herauf in 20 Min. Zeit, das macht auf eine Länge von 600 Ruthen 64½ Minuten. Die gevelsberger Probe giebt....................................73 —

b) Ein Zweispänner fuhr mit 1500 ℔ beladen den 600 Ruthen langen, 5 Gr. ansteigenden Strafsenzug von *Niederbarmen* nach *Lichteplatz* bei *Ronsdorf* herauf in 50½ —

c) Ein mit 14 Zentnern, à 110 ℔, beladener einspänniger Karrn mit Vorspann brachte hiermit zu...................................60 —

d) Ein dergleichen, mit 12 Zentnern mit Vorspann................45 —

e) Ein dergleichen, mit 16 Zentnern mit Vorspann................75 —

f) Ein dergleichen, mit 18 Zentnern mit Vorspann................75 —

g) Ein dergleichen, mit 13½ Zentnern ohne Vorspann........ 90 —

h) Ein dergleichen, mit einem magern Pferde.....................120 —

i) Ein ermüdeter Dreispänner mit 5000 ℔ nebst einem Vorspanns-Pferde ...135 —

§. 85.

Dieser scharfsinnige Ingenieur folgert aus seinen vielen sehr belehrenden Beobachtungen:

1.) Das Gewicht des Karrengestells betrage bei einem Einspänner etwa 240 ℔.
Das Gewicht der Räder beiläufig.......................................210
Die Ladung ..1300

Gesammtes Gewicht........1750 ℔.

2.) Das Pferd, nur zu 500 ℔ angeschlagen, verwende hierzu auf horizontaler Strafse 175 ℔ Kraft; und dabei betrage die Geschwindigkeit 920 Ruthen in 1 Zeitstunde.

Hiernach wäre also die Geschwindigkeit für 1 Sek. $\frac{11040}{3600} = 3{,}066'$.

Auch hat er nach seiner Ansicht hiernach bei verschiedenen Steigewinkeln für die erforderliche Kraft zur Bewegung eines solchen Fuhrwerks mit der jedesmal zugehörigen Geschwindigkeit eine von ihm berechnete Tafel beigefügt, die ziemlich weitläufig ist. Hier mag folgender Auszug genügen:

Steigewinkel der Strafse in Graden.	Nöthige Kraft des Pferdes in Cölln. ℔.	Stündlich zurückgelegter Weg in Ruthen zu 12 rhl. F.
0	175	920
47 M. 44 S.	199,27	808
1° 11′ 36″	211,41	761
1° 59′ 19″	235,41	683½
2° 46′ 5″	259,31	621
3° 34′ 34″	283,81	567¼
4° 45′ 49″	319,72	503½
5°	326,85	492½
6°	356,96	451
7°	386,97	416
8°	416,85	386½
9°	446,60	360½
10°	476,22	340
20°	763,00	»
30°	1026,55	»
⋮	⋮	
90°	1750,00	»

§. 86.

Nach der vorstehenden Tafel zieht das Pferd die 1750 ℔ bei einem Steigewinkel von 10° noch mit einer Geschwindigkeit von 340 Ruthen in 1 Stunde fort, obgleich 476 ℔ Kraft dazu nöthig wäre. Dieses kann *Wesermanns* Meinung nicht seyn. Ich interpretire die Tafel so, dafs die zweite Kolonne die Anzahl erforderlicher Zugpferde zu finden dienen soll, um die 1750 ℔ (worunter 1300 ℔ Ladung) bei dem neben stehenden Steigewinkel zu ziehen. Bei 10 Graden Steigewinkel bräuchte man hiernach

$$\frac{476}{175}$$ oder 2,72 mittelmäfsige Pferde

Und diese würden in 1 Stunde einen Weg von 340 Ruthen zurücklegen.

Hierbei wäre dann noch zu bemerken, dafs ein solches Pferd unter angemessenen Pausen auf kurze Strecken gar wohl noch 125 ℔ Kraft zusetzen kann, womit nun

die kleinstmögliche Anzahl von Pferden in dem vorstehenden Falle $= \frac{476}{300} = 1{,}59$

gefunden wird. Hiernach fällt die erforderliche

Anzahl von Pferden zwischen 2,72 und 1,59; also kann die Last noch mit zwei Pferden fortgeführt werden.

§. 87.

Für die Anwendung bei Maschinen ist es uns darum zu thun, das Verhalten der hierbei vorkommenden Bestimmungsstücke durch einen allgemeinen Ausdruck anzugeben. Ich lege hierbei folgende der Erfahrung gut genug entsprechende Voraussetzungen zum Grunde:

1.) In der Zeit von 12 Stunden (eigentlich 24 Stunden) vermag ein Pferd, das des Ziehens gewohnt ist, eine über eine Rolle herabhängende Last mit einer Kraft von 300 ℔ in horizontaler Stellung 8 Stunden lang ruhig zu erhalten. Ich setze hiernach, für $\alpha = o$ und $c = o$, $p = 300$ ℔.

2.) Für $\alpha = o$ und $p = o$ also für ein frei laufendes Pferd auf horizontalem Boden setze ich $c = 8'$. Die Berechnung auf 8 Stunden oder 28800 Sekunden giebt den ganzen Tag 9,76 geographische Meilen, was nicht zuviel ist, da ein geübtes Reutpferd diesen Weg, wenn auch nicht *alltäglich*, doch zuweilen *unter der Last seines Reuters* in einem Tage zurücklegt, hier aber ein ganz frei laufendes Pferd angenommen wird.

3.) Nach (§. 84. no. 6. und §. 85. no. 2) kann ich mit Sicherheit annehmen, daſs ein gewohntes Fuhrpferd auf horizontalem Boden, bei einer Geschwindigkeit von 2′ in der Sekunde, einer Anstrengung von 225 ℔ ausdauernd (d. h. 8 Stunden lang täglich) fähig ist. Ich setze also, für $\alpha = o$ und $c = 2'$, $p = 225$ ℔.

4.) Bei einem Steigen von 5 Graden und einer Geschwindigkeit von 2′ bleibt ein des Zuges gewohntes Pferd noch einer Anstrengung von 166 ℔ fähig. Die gesammte Kraft des Pferdes wird hier durch 3 verschiedene Verwendungen erschöpft.

 a) Zum Ansteigen des Thieres, ohne Bezug auf Last, auch wenn es frei wäre.

 b) Zur *Erhebung* der Last, weil solche auf eine Straſsenlänge von 1000′ schon 87′ hoch erhoben werden muſs.

 c) Zum Ziehen, wozu nämlich diejenige Kraft, welche auch beim horizontalen Zuge angewendet werden müſste, verwendet wird.

Für die zur Bewegung der Last erforderlichen Theile (*b* und *c*) rechne ich nun $p = 160$ ℔.

5.) Wenn der Boden auf 8′ Länge um 4′ steigt, so habe ich für leere, ganz freie, Fuſsgänger (oben No. 92) gar keine Bewegung mehr gestattet, die sie ausdauernd fortzusetzen vermögten. Für frei gehende Pferde nehme ich dasselbe an, sobald der Boden auf die Länge von etwa 9′ schon um 4′ steigt; dieses ist der Fall für $\alpha = 23^o\ 35'$.

Eine Formel, welche allen diesen Erscheinungen entspricht, wird man ohne Bedenken in der Ausübung bei allen hierher gehörigen Berechnungen zum Grunde legen können. Ich setze daher nach allen diesen Betrachtungen

$$107.) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 37{,}5 \,.\, (8 - c - 20 \,.\, Sin\, \alpha) \\ c = 8 - \frac{2p}{75} - 20 \,.\, Sin\, \alpha \end{array} \right\} \text{ s. §. 92 am Ende.}$$

Ex. 1.) $\alpha = o$, $c = 2'$ giebt

$$p = 37{,}5 \,.\, (8 - 2) = 225 \text{ ℔}$$

2.) $\alpha = o$, $c = 4'$ giebt

$$p = 37{,}5 \,.\, (8 - 4) = 150 \text{ ℔}.$$

Karsten gestattet bei einer Kraftanwendung von 186 ℔ noch eine Geschwindigkeit von 4 Fuſs (Mechan. der festen Körper §. 427.)

3.) $\alpha = o$, $p = o$ giebt

$$c = 8'$$

4.) $\alpha = 5^0$, $p = 100$ ℔ giebt

$$c = 8 - \frac{200}{75} - 20 \,.\, 0{,}0871 = 3{,}59'.$$

5.) $\alpha = o$, $p = 100$ giebt

$$c = 8 - \frac{200}{75} = 5{,}333'.$$

was stündlich nur 0,813 geographische Meile beträgt.

6.) $\alpha = 18^0$, $p = o$ giebt

$$c = 8 - 20 \,.\, 0{,}309 = 1{,}82'$$

§. 88.

Soll mit einer angewendeten bestimmten Zugkraft oder Anstrengung p eine bestimmte Höhe h in der kürzesten Zeit erreicht werden, so muſs $c \,.\, Sin\, \alpha$ ein Maximum seyn *);

es ist aber $c = 8 - \frac{2p}{75} - 20 \,.\, Sin\, \alpha$, also

$$\left(8 - \frac{2p}{75}\right) . \, Sin\, \alpha - 20 \,.\, Sin\, \alpha^2 = max.$$

$$\text{oder } \left(0{,}4 - \frac{p}{750}\right) . \, Sin\, \alpha - Sin\, \alpha^2 = max.$$

Daher

*) Man denke sich den lothrechten Kathetus eines rechtwinklichten Dreiecks von der Höhe h über einer horizontal gezogenen Linie, und vom obersten Punkte des Perpendikels mehrere Hypotenusen bis zur horizontalen gezogen, so machen solche, je länger sie sind, desto kleinere Winkel α. Allemal ist die Hypotenuse $= \frac{h}{Sin\, \alpha}$, und die zum Durchwandern derselben erforderliche Zeit $= \frac{h}{c \,.\, Sin\, \alpha}$, die also am kleinsten wird, wenn $c \,.\, Sin\, \alpha$ am gröſsten ist.

108.) $Sin\ \alpha = 0{,}2 - \frac{p}{1500}$, und die zugehörige Länge des Weges $\lambda = \frac{h}{0{,}2 - \frac{p}{1500}}$

Für $p = o$ wird $Sin\ \alpha = 0{,}2$; also $\alpha = 11^\circ\ 32'$;

Für $p = 160$ ℔ wird $Sin\ \alpha = 0{,}2 - \frac{1{,}6}{15} = 0{,}093$; also $\alpha = 5^\circ\ 20'$

Für Reuter wird man beiläufig das Mittel zwischen beiden Werthen oder beiläufig $\alpha = 8^\circ$ nehmen dürfen.

Vergleicht man nun hiermit die schon oben (§. 71.) angegebenen Beobachtungen von *Wesermann*, so findet man die schönste Uebereinstimmung, die in der That alle Erwartung übertrifft. Hiermit wird dann zugleich die allgemeine Brauchbarkeit von (No. 107.) hinlänglich bestätigt.

§. 89.

Aus (No. 107.) wird, wenn man den Werth von p noch mit c multiplicirt,

$$p \,.\, c = 37{,}5 \,.\, (8 \,.\, c - c^2 - 20 \,.\, c \,.\, Sin\ \alpha)$$
$$= (300 - 750 \,.\, Sin\ \alpha) \,.\, c - 37{,}5 \,.\, c^2.$$

Soll dieses Product am gröſsten werden, also auch

$$\frac{300 - 750 \,.\, Sin\ \alpha}{37{,}5} \,.\, c - c^2 = max.$$

seyn, so ist bekanntlich

109.) $$c = \frac{300 - 750 \,.\, Sin\ \alpha}{75} = 4 - 10 \,.\, Sin\ \alpha$$

Diesen Werth von c in (No. 107.) gebraucht, giebt für das Maximum

110.) $$p = 150 - 375 \,.\, Sin\ \alpha$$

Eine Last, die diese Anstrengung erfordert, ist also die vortheilhafteste.

Ex. Es sey $\alpha = 5^\circ$, so wird $p = 150 - 375 \,.\, 0{,}08715 = 127$ ℔; $c = 4 - 0{,}8715 = 3{,}128$ rheinl. Fuſs für 8 Stunden, was also täglich einen Weg von $8 \,.\, 3600 \,.\, 3{,}128 = 90086' = 3{,}82$ geographische Meilen macht.

§. 90.

Es sey $P \,.\, Sin\ \alpha$ irgend ein mitwirkendes der Zugkraft zu Hülfe kommendes Gewicht, so daſs der ganze Effect dursh $(p + P \,.\, Sin\ \alpha) \,.\, c$ ausgedrückt würde, ohue daſs P auf irgend eine Weise der thierischen Anstrengung zur Last fiele, so bliebe wie in (No. 107.)

$$c = 8 - \frac{2p}{75} - 20 \,.\, Sin\ \alpha$$

also $(p + P \,.\, Sin\ \alpha) \,.\, c$ jetzt

$$= 8p - \frac{2p^2}{75} - 20 \,.\, p \,.\, Sin\,\alpha + \left(8 - \frac{2p}{75}\right) .\, P \,.\, Sin\,\alpha - 20 \,.\, P \,.\, Sin\,\alpha^2$$

$$= 8p - \frac{2p^2}{75} + \left(\left(8 - \frac{2p}{75}\right) .\, P - 20 \,.\, p\right) .\, Sin\,\alpha - 20 \,.\, P \,.\, Sin\,\alpha^2$$

Für das Maximum ist auch

$$\frac{\left(8 - \frac{2p}{75}\right) .\, P - 20 \,.\, p}{20 \,.\, P} \,.\, Sin\,\alpha - Sin\,\alpha^2 = max.$$

also $$Sin\,\alpha = \frac{0{,}4 - \frac{p}{750} - \frac{p}{P}}{2} = 0{,}2 - \frac{p}{1500} - \frac{p}{2\,P}$$

oder **111.)** $$Sin\,\alpha = 0{,}2 - \frac{2\,p\,P + 1500 \,.\, p}{3000\,P} = 0{,}2 - \frac{p}{1500} - \frac{0{,}5\,p}{P}$$

Für $p = o$ wird jetzt für das Maximum des Effekts

$$Sin\,\alpha = 0{,}2 \quad \text{daher} \quad \alpha = 11^\circ\ 23'$$

$$c = 8 - 20 \,.\, Sin\,\alpha = 8 - 4 = 4'$$

$$\text{Effekt} \quad P \,.\, Sin\,\alpha \,.\, c = 0{,}8 \,.\, P$$

Ist $P = 750$ ℔, so ist, für $p = o$ und $\alpha = 11^\circ\ 32'$, der Effekt $= 0{,}8 \,.\, 750 = 600$.

Ist $\alpha = o$, $p = 150$, so wird nach No. 107 der Effekt $p \,.\, c = 150 \,.\, 4 = 600$, wie vorher.

Muskelkraft der Ochsen.

§. 91.

Die Ochsen ziehen auf horizontalen Wegen langsamer und beiläufig mit derselben Kraft wie die Pferde; sie sind aber zum steilen Zuge geschickter als die letzteren. Wir werden uns daher genau genug an die Resultate der Erfahrung anschliefsen, wenn wir für sie mit Rücksicht auf (No. 107.) bei täglich 8 stündiger Anstrengung

112.) $$c = (0{,}5 + Sin\,\alpha) \,.\, \left(8 - \frac{2p}{75} - 20 \,.\, Sin\,\alpha\right)$$

setzen, so dafs sich mit gröfseren Steigewinkeln die Geschwindigkeit des Ochsen der des Pferdes immer mehr nähert. Wirkliche Multiplikation giebt

113.) $$c = 4 - \left(2 + \frac{2p}{75}\right) .\, Sin\,\alpha - \frac{p}{75} - 20 \,.\, Sin\,\alpha^2$$

Für $p = o$ gäbe

$$Sin\ \alpha = 0{,}25 \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{bei Pferden } c = 3' \\ \text{bei Ochsen } c = 2{,}25' \end{array} \right.$$

$$Sin\ \alpha = 0{,}3 \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{bei Pferden } c = 2' \\ \text{bei Ochsen } c = 1{,}6' \end{array} \right.$$

Verhältnifszahlen, die der Natur beider Thierarten gut genug entsprechen.

§. 92.

In Bezug auf die Bestimmungen von Pferden und Ochsen wiederhole ich die Bemerkung, dafs diese Thiere in 24 Stunden nur 12 Stunden zum Dienste gebraucht, und dafs von diesen 12 Stunden nur 8 zur wirklichen Anstrengung gerechnet werden. Nicht leicht läfst ein Fuhrmann, zumal im Sommer, seine Pferde über 10 Stunden übernachten, so dafs ihm 14 Stunden zur Benutzung übrig bleiben. Gönnt er hievon noch 4 Stunden seinen Pferden zur Fütterung und Ruhe im Stalle, so bleiben zum wirklichen Zuge, mit Inbegriff der Pausen, noch 10 Stunden übrig, so dafs ihm zur Zurücklegung eines Weges $= 3600 . 8 . c = 28800 . c$ Sek. bleiben. Für den Fuhrmann haben daher die Resultate unserer Formel für *alltägliche* Anstrengung die höchstmögliche Sicherheit, zumal da dem Fuhrmanne selbst daran gelegen seyn mufs, die Kraft seiner Thiere so gut als möglich zu benutzen.

Bei Maschinenbetreibung treten nicht ganz dieselben Umstände ein. Z. B. bei bestimmter 6 stündiger Betreibung soll *stündlich* der Weg 3600 . c zurückgelegt werden.

Dazu ist nun nöthig, dafs bei 8 stündiger Betreibung eine Zwischenzeit von 2 Stunden den Thieren zu Pausen vergönnt, also nur 6 Stunden zur wirklichen Arbeit verwendet werden. Auch wäre es mifslich, die obigen Berechnungen für $\alpha > 20^0$ anzuwenden.*)

III. Die Stosskraft.

§. 93.

Von der Bewegung eines Schwengels mit Zuziehung der Stofskraft habe ich oben schon geredet (§. 82); sie ist besonders wichtig beim *hydraulischen Stöfser* (Bélier hydraulique). Auch bei unseren gewöhnlichen Räderwerken ist sie mitwirkend. Die Bewegung der unterschlächtigen Wasserräder und der Windmühlenflügel wird gleichfalls dem Wasserstofs und Windstofs zugeschrieben; hier wirkt aber eigentlich, wie wir weiter unten sehen werden, nicht sowohl *Stofs* als *Druck*. Die Wirkung des Stofses ist mit

*) Da das Bisherige schon abgedruckt war, so kann ich hier nur noch die Bemerkung beifügen, dafs ich im letzten Bande dieses Werks in dem Abschnitte von den Agrikulturmaschinen die Zugkraft der Thiere noch aus einem eigenen Gesichtspunkte, der mir hier noch entgangen war, betrachten werde.

gleichförmiger Bewegung unvereinbar; sie hat allemal ungleichförmige Bewegung zur unmittelbaren Folge. *Stöfse*, die in unermeſslich kleinen Zeittheilchen nacheinander folgen, machen *Druck*.

IV. Die Expansivkraft.

§. 94.

Das Volumen einer bestimmten Masse ist nie konstant, immer nur momentan, abhängig von der veränderlichen Temperatur der Masse. Erhöhung der Temperatur hat Vergröſserung ihres Volumens zur Folge, oder Ausdehnung der Masse, wenn solche nicht durch äusseren Druck auf die Masse verhindert wird. Die Gröſse des äusseren Drucks, welcher nöthig wäre, diese Ausdehnung zu verhindern, bestimmt dann die Gröſse der *Expansivkraft.* Besonders wichtig für die Maschinenlehre ist die Expansivkraft elastisch-flüssiger Stoffe, wie die der atmosphärischen Luft und der Wasserdämpfe. Ihre Anwendung zeigt sich bei der Luftmaschine, bei Pumpen und bei Dampfmaschinen. Zuweilen wirken Expansivkräfte in Verbindung mit Anziehungskräften, wie bei elastischen festen Körpern, bei elastischen Federn. Hierher gehören die Uhren.

V. Die Zentrifugalkraft.

§. 95.

Die Zentrifugalkraft hat man (§. 14* u. f.) oben schon kennen gelernt. Anwendungen auf Bewegungen, bei denen sie mitwirkt, kommen bei der Saugschwungmaschine und dem Segnerischsen Wasserrade vor.

VI. Kapitel.

FESTIGKEIT DER KOERPER.

§. 96.

Unter der Festigkeit eines Körpers verstehen wir im Allgemeinen die Kraft, mit der er einer Kraft, die seine Theile mechanisch zu trennen strebt, widersteht. Dieser Widerstand ist selbst bei (gesundem) Holze ungemein grofs, wenn die brechende Kraft nach derselben Richtung angebracht wird, nach welcher die Trennung geschehen soll; *diesen* Widerstand nennt man die *absolute* Festigkeit; er bestimmt die wahre Gröfse des Zusammenhangs, die dann durch die Kraft ausgedrückt wird, bei welcher die Trennung beginnt. Die zur Trennung erforderliche Kraft kann aber sehr vermindert werden, wenn sie so angebracht wird, dafs der abbrechende Theil im Augenblicke der Trennung eine Umdrehungsbewegung annehmen mufs, weil dann Hebelwirkung hinzukommt. Die unter solchen Umständen zum Brechen erforderliche Kraft heifst die *respective* Festigkeit. Erstere kommt höchst selten vor z. B. bei Hängesäulen oder eisernen Stäben, die als Hängesäulen dienen; letztere desto häufiger, sie hängt aber von ersterer ab.

§. 97.

Versuche über die absolute Festigkeit sind beinahe mit mehr Sorgfalt angestellt worden, als nöthig ist, weil man in der Ausübung doch immer die Resultate solcher Versuche nur als beiläufige Bestimmungen zu betrachten hat, die man zur Sicherheit weit übersteigt. Ueberdas sind die Holzarten nach Verschiedenheit der Lage und Eigenschaft des Bodens und des Klima's oft sehr verschieden; so findet man auch beim Eisen grofse Verschiedenheiten. Wenn man daher die Festigkeit von Buchenholz beinahe =22360 ℔, die von Eisen = 70433 ℔ gefunden hätte, so wäre es lächerlich, dort auf die 60 und hier auf die 33 ℔ einige Rücksicht zu nehmen. Inzwischen will ich die Zahlen so hersetzen, wie Versuche sie gegeben haben, und zwar bei 1 rheinl. Quadratzoll Bruchfläche.

Absolute Festigkeit k.		Absolute Festigkeit k.	
Für Buchen	22360 Berl. ℔. *)	Für Eisen, teutsches	
» Eichen,		gegossenes	70433 Berl. ℔.
vom Kern	26600 »	geschmiedetes	71300 »
zwischen Kern u. Splint	21940 »	» Messing	48480 »
» Tannen	15400 »	» Kupfer, schwedisches	
» Fichten	10920 »	gegossenes	38463 »
» Kiefern, Förlen	21100 »	geschmiedetes	38865 »
» Blei	913 »	» Zinn	6167 »
		» Hänfene Seile, etwa	1000 »

Diese Zahlen werden in der Folge allemal unter k verstanden.

Nur in Bezug auf die Seile bemerke ich, daſs solche durch den Gebrauch sehr leiden. Auch ist bei einerlei Dicke ihre Festigkeit, nach Verschiedenheit des Hanfs und ihrer Verfertigung sehr verschieden. Wenn es sich nun gleich von selbst versteht, daſs man solche von Meistern nimmt, die im guten Rufe ihrer Arbeit stehen, so rathe ich dennoch

1) in der Ausübung auch einem neuen Seile nicht mehr als die Hälfte der angegebenen Festigkeit auf 1 rheinl. Q. Z. zuzumuthen. Also die Festigkeit nur zu 500 ℔ anzunehmen.

2) Für jeden 24 stündigen Gebrauch *im Trocknen*, ziehe man auf jeden Zentner angehängter Last 1 ℔; im Nassen 2 ℔ an der Tragbarkeit ab.

Getheerte Seile dauern länger im Nassen, tragen aber weniger.

§. 98.

abcd (*Fig.* 44) sey der freie Theil eines mit dem einen Ende fest liegenden parallelepipedischen Körpers, dessen Schwerpunkt v in der Mitte zwischen a und c liegt; sein Gewicht sey $= q$; in willkührlicher Entfernung von a, wie hier bei n sey eine Last Q angebracht, so ist das statische Moment, womit der Balken bei n niedergedrückt wird, womit er sich also bei a herum zu drehen strebt, $= an\left(Q + \frac{am}{an} \cdot q\right)$.

Die Kraft des Zusammenhangs in der Bruchebene als absolute Festigkeit, sey $= F$, so ist der Erfolg so, als wäre in der Mitte der Bruchebene t eine Kraft F angebracht, die nach tu zöge; ihr statisches Moment, womit sie der Umdrehung um a entgegenwirkt, ist $= at \,.\, F$, also für den Fall des Gleichgewichts

$$at \,.\, F = an \,.\left(Q + \frac{am}{an} \cdot q\right)$$

*) Man kann dafür ohne Bedenken auch Cöllnische ℔ nehmen.

Es sey nun allgemein $an = x$, $ac = \lambda$, also $am = \frac{1}{2}\lambda$, des Balkens Höhe $ab = h$, also $at = \frac{1}{2}h$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}h \, . \, F = x \, . \left(Q + \frac{\lambda}{2x} \, . \, q \right)$$

Es ist aber, wenn sich alles auf rheinl. Zolle beziehet, und die Dicke des Balkens $= \delta$ gesetzt wird, $F = h \, . \, \delta \, . \, k$, wo k die aus dem vorigen §. genommene absolute Festigkeit für 1 Quadr. Zoll bezeichnet; demnach

$$114.) \quad \tfrac{1}{2}h^2 \, . \, \delta \, . \, k = x \, . \, Q + \tfrac{1}{2}\lambda \, . \, q$$

welches die hierher gehörige *theoretische* Fundamentalformel für die respective Festigkeit ist.

§. 99.

Diese theorethische Formel ist aber auf die Voraussetzung gegründet, dafs die Bruchebene mit einmal in allen Punkten sich losreifse, was in der Ausübung keineswegs der Fall ist, wie solches angestellte Versuche hinlänglich beweisen. Diesen zu Folge liegt der erste Umdrehungspunkt beim Brechen bedeutend über a z. B. in α, so dafs das freie Balkenstück nach $b\,\delta$ (*Fig.* 45) herabsinkt, wo der Bruch für diese Untersuchung als schon vollendet anzusehen ist. Zwar werden hierbei die Theilchen zwischen a und α nothwendig zusammengeprefst und leisten hiermit allerdings auch einigen Widerstand gegen das Brechen, aber es bedarf nur eines geringen Zusammenpressens, um jenem Anfange des Brechens Freiheit zu lassen, und die Entfernung des mittleren Festigkeitspunktes vom Umdrehungspunkte α bleibt daher immer bedeutend kleiner als $\frac{1}{2}h$, wofür wir dann allgemein $\varepsilon \, . \, \frac{1}{2}h$ setzen wollen. Dieses giebt

$$115.) \quad \varepsilon k \, . \, \tfrac{1}{2}h^2 \, . \, \delta = x \, . \, Q + \tfrac{1}{2}\lambda q$$

in Bezug auf rheinl. Zolle. Nach Herrn Eytelweins Statik II. B. S. 358 hat man nachstehende Mittelwerthe:

Für Förlen oder Kiefern	εk = 5756 Berl. ℔,	also ε = 0,292
» Sommereichen	= 8012	= 0,376
» Stein- oder Wintereichen	= 8218	= 0,371
» Rothtannen oder Fichten	= 4098	= 0,375
» Weifstannen..........	= 5474	= 0,355
» Rothbuchen..........	= 9424	= 0,421
» Weifsbuchen..........	= 6010	= 0,294
» Erlen.................	= 6898	= 0,278

Begreiflich können diese Angaben keineswegs als genaue allgemeine Bestimmungen gelten; eine solche Behauptung würde jeder erfahrne Forstmann mit vollem Rechte verlachen. Darum und weil wir in der Anwendung ohnehin die etwaige Genauigkeit gar

nicht beachten, können wir ohne alles Bedenken allgemein $\varepsilon = \frac{1}{3}$ setzen. Hiernach erhalten wir die bestimmtere Formel

$$116.)\quad \delta h^2 . k = 6 . x . Q + 3 \lambda q$$

wo die Maafse sich auf rheinl. Zolle beziehen.

§. 100.

Es ist bekannt genug, dafs die Festigkeit des Holzes mit dem Alter sehr abnimmt; auch hat manches sehr schwache Stellen, die selbst der Forstmann nicht ahnet. Für beides vermag die Theorie gar keine Bestimmung anzugeben. Ueberdas ist die Abnahme des Zusammenhangs bei Hölzern, die gegen die Witterung geschützt sind, bei weitem geringer als an Orten, wo sie den Abwechselungen der Witterung frei überlassen werden. Um nun dennoch eine die Ausübung berücksichtigende Bestimmung zu erhalten, setze ich nach n Jahren

für geschützte Balken, wie in unsern Wohngebäuden,

$$117.)\quad \frac{1}{5 + \frac{1}{8}n} . k \text{ statt } k$$

und für offen liegende Balken in freier Luft

$$118.)\quad \frac{1}{5 + \frac{1}{2}n} . k \text{ statt } k.$$

Für (No. 117.) erhält man

119.)

für $n =$	1;	0,196 . k statt k
$n =$	5;	0,180 . k — —
$n =$	10;	0,163 . k — —
$n =$	15;	0,150 . k — —
$n =$	20;	0,138 . k — —
$n =$	25;	0,128 . k — —
$n =$	30;	0,120 . k — —
$n =$	35;	0,112 . k — —
$n =$	40;	0,106 . k — —
$n =$	50;	0,095 . k — —
$n =$	60;	0,0857 . k — —
$n =$	70;	0,0783 . k — —
$n =$	80;	0,0720 . k — —
$n =$	90;	0,0655 . k — —
$n =$	100;	0,0625 . k — —

Für No. 118 erhält man

120.)

für $n =$ 1;	$0{,}1818 \,.\, k$	statt k
= 5;	$0{,}1333 \,.\, k$	— —
= 10;	$0{,}1000 \,.\, k$	— —
= 15;	$0{,}0800 \,.\, k$	— —
= 20;	$0{,}0666 \,.\, k$	— —
= 25;	$0{,}0543 \,.\, k$	— —
= 30;	$0{,}0500 \,.\, k$	— —
= 35;	$0{,}0444 \,.\, k$	— —
= 40;	$0{,}0400 \,.\, k$	— —
= 45;	$0{,}0364 \,.\, k$	— —
= 50;	$0{,}0333 \,.\, k$	— —
= 60;	$0{,}0286 \,.\, k$	— —
= 70;	$0{,}0250 \,.\, k$	— —
= 80;	$0{,}0222 \,.\, k$	— —
= 90;	$0{,}0200 \,.\, k$	— —
= 100;	$0{,}0182 \,.\, k$	— —

Bezeichnen wir also die in No. 119 und 120 mit k multiplicirten Zahlen allgemein mit ζ, so erhalten wir für die Dauer von n Jahren aus (No. 114.) die allgemeine *praktische* Formel

$$121.)\quad \delta h^2 \,.\, \zeta \,.\, k = 6x \,.\, Q + 3\lambda \,.\, q$$

wo man k aus §. 97 nimmt. Man kann auch k aus §. 99 nehmen, wenn man die Werthe von εk mit dem zugehörigen Werthe von ε dividirt.

Ex. Ein fichtener Balken, zu 10″ rheinl. dick und 12″ hoch, soll wie *Fig.* 44 in der Entfernung $am = 5' = 60''$ mit einer Last Q beschwert werden: wie groſs darf Q seyn um noch nach 60 Jahren hinlängliche Sicherheit gegen das Brechen zu haben?

Für Balken in verwahrten Gebäuden

Hier ist $\delta = 10$, $h = 12$, $k = 10920$, λ sey $= 10' = 120''$; ζ ist hier aus No. 116, für $n = 60$, $= 0{,}0857$; also

$$10 \,.\, 144 \,.\, 0{,}0857 \,.\, 10920 = 6 \,.\, 60 \,.\, Q + 3 \,.\, 120 \,.\, q$$

oder $$134760 = 36 \,.\, Q + 36 \,.\, q$$

Daher $$Q = \frac{134760 - 36 \,.\, q}{36}$$

Das specifische Gewicht des Fichtenholzes dürfen wir hier = 0,6 setzen, also den Kub. Fuſs = 0,6 . 66 Berl. oder auch Cölln. ℔, = 39,6 ℔, zur Sicherheit gerechnet. Es ist aber der kub. Inhalt des 10′ langen Stücks $= 10 \,.\, \frac{5}{6} = 8{,}33$ K. F. Also $q = 39{,}6 \,.\, 8{,}33 = 330$ ℔, und $36 \,.\, q = 11880$ ℔.

Demnach $$Q = \frac{134760 - 11880}{36} = 3413 \text{ ℔}$$

was immer noch eine sehr bedeutende Festigkeit ist.

§. 101.

Ist eine der drei Abmessungen h, δ, λ unbekannt, so muſs q durch diese Faktoren ausgedrückt werden. Ist nämlich φ das specifische Gewicht des Balkens, so ist sein Gewicht, wenn sich die Maaſse auf rheinl. Zolle beziehen,

$q = h \cdot \delta \cdot \lambda \cdot \varphi \cdot \frac{66}{1728}$ Cölln. ℔, und man erhält nunmehr aus No. 118.

$$\delta h^2 \cdot \zeta \cdot k = 6 \cdot x \cdot Q + 3 \cdot 0{,}0382 \cdot h \cdot \delta \cdot \lambda^2 \cdot \varphi$$

oder 122.) $$\delta \zeta \cdot k \cdot h^2 = 6\, x \cdot Q + 0{,}1146 \cdot \delta \cdot \lambda^2 \cdot \varphi \cdot h$$

Hieraus folgt

$$h^2 - \frac{0{,}1146 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi}{\zeta k} \cdot h = \frac{6\,x}{\delta \zeta k} \cdot Q$$

$$h - \frac{0{,}1146 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi}{2 \zeta k} = \sqrt{\left(\frac{6\,x}{\delta \zeta k} \cdot Q + \left(\frac{0{,}0573 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi}{\zeta k}\right)^2\right)}$$

und 123.) $$h = \frac{0{,}0573 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi}{\zeta k} \pm \sqrt{\left(\frac{6\,x}{\delta \zeta k} \cdot Q + \left(\frac{0{,}0573 \cdot \lambda^2 \cdot \varphi}{\zeta k}\right)^2\right)}$$

Ex. Ein 9″ dicker fichtener Balken soll 10′ lang frei liegen und nach 70 Jahren in der Entfernung $x = 6'$ noch ein Gewicht von 3000 ℔ mit aller Sicherheit tragen: wie groſs muſs man h nehmen? Hier ist

$\lambda = 10' = 120''$; $x = 6' = 72''$; $\varphi = 0{,}6$; $Q = 3000$;
$n = 70$; $\delta = 9''$; $\zeta = 0{,}0783$ (wenn wir ein bedecktes Gebäude voraussetzen) und $k = 10920$.

Hieraus giebt sich

$$\zeta k = 855;\quad \delta \zeta k = 7695;\quad 6x \cdot Q = 1296000;\quad \frac{6\,x \cdot Q}{7695} = 169;$$

$$\frac{\lambda^2\, \varphi}{\zeta k} = \frac{14400 \cdot 0{,}6}{855} = 10{,}1;\quad \frac{0{,}0573 \cdot \lambda^2\, \varphi}{\zeta\, k} = 0{,}579;$$

Hiervon das Quadrat = 0,335. Demnach

$$h = 1{,}157 = + \sqrt{(169 + 0{,}335)} = 1{,}157 + 13{,}05 = 14{,}21 \text{ rheinl. Zoll.}$$

Für denselben Balken in freier Luft ohne Schutz gehört der vorige Werth von ζ (die Zahl 0,0783) sehr genau zu $n = 15$; er würde also der Forderung nur 15 Jahre lang Genüge leisten *).

§. 102.

Der Balken liege wie der (*Fig.* 46) an beiden Enden auf; in n sey er mit der Last

*) Allerdings giebt es vom *Ganz offenliegen*, was hier gemeint ist, bis zum *Völlig geschützt seyn*, was hier gleichfalls gemeint ist, unzählig viele Zwischenfälle, für welche die sichere Ausmittelung eines Zwischenwerths der Ueberlegung des Ingenieurs überlassen bleiben muſs.

Q beschwert; wie grofs darf Q genommen werden, um anfänglich d. h. wenn der Balken noch neu ist, mit dem Widerstande des Balkens im Gleichgewicht zu stehen?

Auflösung. Der Schwerpunkt des Balkens liegt über v, so dafs $av = cv$ ist. Hier wirkt also des Balkens Gewicht q.

Der Druck von Q in a ist $= \frac{cn}{ca} \cdot Q$, in $c = \frac{an}{ca} \cdot Q$.

Werden beide Pressungen auf die Stelle v reducirt, so ist ersterer $= \frac{an}{av} \cdot \frac{cn}{ca} \cdot Q$; letzterer $= \frac{nc}{cv} \cdot \frac{an}{ca} \cdot Q$, ihre Summe ist $= \frac{an \cdot cn}{av \cdot ca} \cdot 2\,Q = \frac{an \cdot cn}{2 \cdot av^2} \cdot 2\,Q = \frac{an \cdot cn}{av^2} \cdot Q$.

Beschreibt man über ac einen Halbkreis und zieht die Perpendikel nd und ve, so ist $an \cdot cn = nd^2$; $av^2 = ve^2$, also

123.*) gesammter Druck von Q in $v = \frac{nd^2}{ve^2} \cdot Q$, den wir mit M bezeichnen;

d. h. ein Gewicht $M = \frac{nd^2}{ve^2} \cdot Q$ in v angebracht wäre mit einem Gewicht Q in n angebracht äquivalent. So auch $Q = \frac{ve^2}{nd^2} \cdot M$; d. h. einem Gewicht M in v ist ein Gewicht $Q = \frac{ve^2}{nd^2} \cdot M$ in n angebracht äquivalent.

Solang n ausserhalb v liegt, ist ve allemal gröfser als nd, also $Q > M$. Es ist also v die schwächste Stelle.

Der Balken liege nun in a und c (*Fig.* 47) auf, und in seiner Mitte drücke das Gewicht M, so erfolgt, im Falle eines entstehenden Bruchs, dieser Bruch ganz so von unten, von b nach α, wie er *Fig.* 45 von oben nach unten erfolgte. Man denke sich die Art, wie ein Stab, den man mit zwei Händen fafst und mit seiner Mitte an das Knie anstemmt, gebrochen wird. M vertritt die Stelle des Knies, die Aerme ziehen nach $\beta\gamma$, und so erfolgt der Bruch des Stabes nach $b\,\alpha$. Die Stelle der nach $\beta\gamma$ ziehenden Aerme vertreten hier die Unterlager a, c, und die Stelle des andrückenden Knies das drückende Gewicht M; es wirkt daher die Kraft auch hier in der Entfernung $a\alpha$ oder $c\alpha$, und der Widerstand in der Bruchebene $b\,\alpha$, so dafs das statische Moment dieses Widerstandes wie in (No. 115.) $= \varepsilon k \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot \delta$ wird, oder hier genau genug

$$\text{statisches Moment der Festigkeit } F = \tfrac{1}{6} \cdot k \cdot h^2 \cdot \delta$$

Denkt man sich über α statt M wie vorhin das Knie, an welchem der Stab anliegt, und zieht sowohl über a als über c eine Kraft $= P$ nach $\beta\gamma$, so leidet zwar das Knie den Druck $2P$, aber die bei b wirkende brechende Kraft bleibt nur $= P$. So ist auch die brechende Kraft der Last M (*Fig.* 47) nur $= \frac{1}{2} M$, und ihr statisches Moment

$= cb \cdot \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \lambda \cdot \frac{1}{2} M = \frac{1}{4} \lambda M.$ Man hat also für das Gleichgewicht mit der Festigkeit, ohne Bezug auf das Gewicht des Balkens

$$\tfrac{1}{4} \lambda M = \tfrac{1}{6} k \,.\, h^2 \,.\, \delta$$

und $$M = \frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{3\lambda}$$

Mit Rücksicht auf das Balkengewicht q wird M nothwendig etwas kleiner. Es ist dasselbe, als wäre in b ein Gewicht $= \frac{1}{2} q$ angebracht, so daſs man über b die Last $M + \frac{1}{2} q$ hätte, also

$$M + \tfrac{1}{2} q = \frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{3\lambda}$$

und $$M = \frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{3\lambda} - \tfrac{1}{2} q = \frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{3\lambda} - \frac{0{,}1146 \,.\, h \,.\, \delta \,.\, \lambda \varphi}{2}$$

für einen noch neuen Balken, mit Zugrundlegung der angestellten Versuche.

Aber auch beim neuen Balken ist zur Sicherheit eine bedeutende Minderung des Werthes von M nöthig, so daſs ich wie oben für die Ausübung nur $\frac{1}{5}$ nehme, also

$$124.) \quad M = \frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{15 \,.\, \lambda} - \tfrac{1}{10} q$$

§. 103.

Soll der Balken die Last M noch am Ende des n^{ten} Jahres mit Sicherheit tragen, so hat man wie (No. 117. und 118.), wenn alle Maaſse sich auf rheinl. Zolle beziehen, für geschützte Balken

$$125.) \quad M = \frac{1}{5 + \frac{1}{3} n} \,.\, \left(\frac{2k \,.\, h^2 \,.\, \delta}{3\lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

oder auch $$M = \frac{\delta\, h}{5 + \frac{1}{3} n} \,.\, \left(\frac{2kh}{3\lambda} - 0{,}0573 \,.\, \lambda \,.\, \varphi \right)$$

und für offenliegende

$$126.) \quad M = \frac{1}{5 + \frac{1}{2} n} \,.\, \left(\frac{2kh^2\delta}{3\lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

oder auch $$M = \frac{\delta\, h}{5 + \frac{1}{2} n} \,.\, \left(\frac{2kh}{3\lambda} - 0{,}0573 \,.\, \lambda \,.\, \varphi \right)$$

Uebrigens liegt hierbei noch die Voraussetzung zum Grunde, daſs der Balken mit beiden Enden frei aufliege.

Könnte der Balken an den Enden wegen angebrachter Befestigung nicht nachgeben, so daſs ein Bruch bei α nicht erfolgen könnte, ohne daſs zugleich Brüche bei m und n erfolgten (*Fig.* 48), so dürfte M bedeutend gröſser seyn. Jetzt muſs $\frac{1}{2} (M + \frac{1}{2} q)$ nicht nur den Bruch bei α, sondern auch den bei n bewirken, der Widerstand ist also doppelt so groſs als vorher, daher jetzt

$$M + \tfrac{1}{2} q = \frac{4 k \, . \, h^2 \, . \, \delta}{3 \lambda}$$

und $$M = \frac{4 k \, . \, h^2 \, . \, \delta}{3 \lambda} - \tfrac{1}{2} q$$

für beiläufiges Gleichgewicht. Hiernach hätte man für dergleichen Balken in Gebäuden, zu hinlänglicher Sicherheit

$$127.) \quad M = \frac{1}{5 + \frac{1}{3} n} \, . \left(\frac{4 k \, . \, h^2 \, . \, \delta}{3 \lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

Für Balken im Freien

$$128.) \quad M = \frac{1}{5 + \frac{1}{2} n} \, . \left(\frac{4 k h^2 \delta}{3 \lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

Fragt man nun, wie sich die Sache verhalte, wenn man ein solches Gewicht M nicht in der Mitte des Balkens, sondern statt dessen ein Gewicht Q, wie *Fig.* 46, bei n anbringen wollte: wie groſs dann Q seyn müsse, um dieselbe Sicherheit zu erhalten? so erhält man nach (§. 102)

$$Q = \frac{v \, e^2}{n d^2} \, . \, M \text{ oder auch } = \frac{a \, v^2}{an \, . \, nc} \, . \, M.$$

und in unseren Bezeichnungen

$$Q = \frac{\frac{1}{4} \lambda^2 \, . \, M}{x \, . \, (\lambda - x)} \text{ wenn } an = x \text{ gesetzt wird.}$$

oder $$129.) \quad Q = \frac{\lambda^2}{4 \, . \, (5 + \frac{1}{3} n) \, . \, x \, (\lambda - x)} \, . \left(\frac{4 k \, . \, h^2 \, . \, \delta}{3 \lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

statt (No. 127.)

und $$Q = \frac{\lambda^2}{4 \, . \, (5 + \frac{1}{2} n) \, . \, x \, . \, (\lambda - x)} \, . \left(\frac{4 k \, . \, h^2 \, . \, \delta}{3 \lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

statt (No. 128.)

Anmerk. Der hier geforderten Befestigung des Balkens an beiden Enden kann nicht leicht Genüge geschehen, und es wäre sehr miſslich, bei irgend einer Verzimmerung oder Vermauerung ihre Voraussetzung gelten zu lassen, um so mehr, da dergleichen Befestigungen mit der Zeit selbst nachlassen. Ich kann daher nicht rathen, von den Formeln (No. 97 — 98) in der Ausübung Gebrauch zu machen. Indessen ersieht man doch hieraus, daſs solche Befestigungen von Nutzen sind, und daſs man wohl thut, sie nicht zu vernachläſsigen, ohne jedoch das, was sie leisten können, bei hierher gehörigen Bestimmungen ganz in Rechnung zu bringen.

Der vorstehenden Anmerkung zufolge setzen wir statt (No. 129.) in der Ausübung Für geschützte Balken

$$130.) \quad Q = \frac{\lambda^2}{4 \, . \, (5 + \frac{1}{3} n) \, . \, x \, . \, (\lambda - x)} \, . \left(\frac{k h^2 \delta}{\lambda} - \tfrac{1}{2} q \right)$$

Für Balken im Freien

$$131.)\quad Q = \frac{\lambda^2}{4.(5+\frac{1}{2}n).x.(\lambda - x)} \cdot \left(\frac{k\,h^2\,\delta}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\,q\right)$$

Dabei ist

x die Entfernung *an* (*Fig.* 46), in welcher die Last angebracht werden soll.

Q die Last, mit der man den Balken beschweren darf, um nach n Jahren d. h. am Ende des n^{ten} Jahres dieselbe Sicherheit zu erhalten, welche man bei einem noch neuen Balken hat, wenn man ihn nur mit $\frac{1}{5}$ derjenigen Last beschwert, bei welcher er nach den angestellten Beobachtungen eben zu brechen beginnen würde.

λ die ganze Länge des frei liegenden Balkenstücks, (wie *a c Fig.* 46).

h die Höhe des Balkens (wie $a\beta$ oder $c\beta$ *Fig.* 47).

δ die Dicke des Balkens.

k die absolute Festigkeit der Holzart für einen rheinl. Quadratzoll (nach §. 97 genommen).

q das Gewicht vom frei liegenden Stück des Balken in Cölln. Pfunden.

Alle Maafse müssen in rheinl. Zollen ausgedrückt werden.

Statt q kann man auch $h \,.\, \delta \,.\, \lambda \,.\, \varphi \,.\, \frac{66}{1728}$ oder $0{,}0382 \,.\, \varphi \,.\, h \,.\, \delta \,.\, \lambda$ setzen, weil 1 Kubikfufs Wasser zu 66 ℔ angenommen werden kann, also 1 Kubikzoll $= 0{,}0382 \,.\, \varphi$ ℔ wiegt, wenn φ das specifische Gewicht der Holzart ist, das man aus (§. 67) nimmt.

§. 104.

Ein für die Ausübung vorzüglich wichtiger Gegenstand in Bezug auf Festigkeit ist der feste Stand der Pfähle, über welchen man Bauten aufführt, die oft auf einen einzigen Pfahl einen Druck von vielen tausend Pfunden ausüben.

Das Gewicht des Rammklotzes sey $= P$, das des Pfahls $= Q$; der Pfahl sey schon zu einer gewissen Tiefe eingetrieben, in der er mit der Last Z beschwert werden könnte, bevor er tiefer sänke; mit dieser Last beschwert strebt er mit einer Kraft $Z + Q$ tiefer zu sinken. Bezeichnen wir also den Widerstand mit R, so mufs für den Zustand des Gleichgewichts

$$R = Z + Q \quad \text{seyn.}$$

Die Fallhöhe des Rammklotzes (*Rammbäres*) sey $= H$; der Pfahl sey schon so tief eingetrieben, dafs er beim letzten Schlage nicht mehr über 1″ tiefer sank, also der Widerstand bei den folgenden Schlägen bei jedesmaligem Tiefersinken als unveränderlich angesehen werden kann.

Beim Einrammen wirkt nun dieser Widerstand, welcher die Masse $P + Q$ tiefer zu sinken zu verhindern strebt, dieser Masse so entgegen, wie eine Kraft R, welche die Masse $P + Q$ in der ersten Sekunde durch einen Raum $\mathfrak{g}$ treiben würde, der $= \frac{R}{P+Q} \cdot g$ wäre. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, mit welcher die Masse im Augenblick des Schlags tiefer zu sinken strebt, mit C, so hat man $C = \frac{P}{P+Q} \cdot 2\sqrt{g\ H}$. Ist nun τ die Tiefe, um welche der Pfahl bei einem Schlage wirklich tiefer sinkt, so ist

$$\tau = \frac{C^2}{4\mathfrak{g}} = \frac{\frac{P^2}{(P+Q)^2} \cdot 4\,g\,H}{4 \cdot \frac{R}{P+Q} \cdot g} = \frac{P\,H}{\left(1 + \frac{Q}{P}\right) \cdot R};$$

aber für den Fall des Gleichgewichts ist $R = Z + Q$, also

$$132.)\quad \tau = \frac{P\,H}{\left(1 + \frac{Q}{P}\right) \cdot (Z + Q)}$$

Daher $$Z + Q = \frac{P\,H}{\left(1 + \frac{Q}{P}\right) \cdot \tau}$$ und

$$133.)\quad Z = \frac{P\,H}{\left(1 + \frac{Q}{P}\right) \cdot \tau}$$

d. h. allemal, wann der Pfahl nach einem Schlage um die Tiefe τ tiefer gesunken ist, ist er mit einer auf ihm ruhenden Last Z im Gleichgewicht, welche durch diese Formel bestimmt wird. Keineswegs läſst sich aber sagen, diese Formel drücke die Last Z aus, welche mit der Gewalt des letzten Schlags im Gleichgewicht stehe. Vielmehr wird er mit jedem folgenden Schlage aufs Neue niedergetrieben.

§. 105.

Ein Umstand, auf den diese Theorie keine Rücksicht nimmt, verdient hier noch bemerkt zu werden. Es kann nämlich τ so klein werden, daſs der Werth von Z Millionen betragen könnte (Pfunde verstanden); und doch könnte der Widerstand am Ende des letzten Schlags bei weitem geringer seyn, indem endlich theils die Stauchung des Pfahls theils die Elasticität des Bodens den z. B. um eine Linie niedergedrückten Pfahl sogleich wieder um $\frac{3}{4}'''$ erheben können, so daſs es das Ansehen hätte, als wäre der Pfahl nur um $\frac{1}{4}'''$ niedergetrieben worden, was dann den Werth von Z viermal vergröſserte.

Ich rathe daher, für τ nie weniger als $3'''$ oder $\frac{1}{48}$ Fuſs in Rechnung zu bringen, dennoch aber das Eintreiben so lange fortzusetzen, bis die letzten 30 Schläge zusammenge-

nommen nur noch 2 höchstens 3 Linien geben. Unter dieser Voraussetzung könnte man dann, $\frac{1}{48}'$ statt τ geschrieben,

$$134.)\quad Z = \frac{48 \,.\, PH}{1 + \frac{Q}{P}} \quad \text{(s. No. 135.)}$$

setzen, weil die subtraktive Gröfse Q dabei nicht in Betrachtung kommt.

Ex. Es sey $P = 10$ Zentner, $Q = 3$ Zentner, $H = 4'$, so wird

$$Z = \frac{48 \,.\, 10 \,.\, 4}{1 + 0{,}3} = 1477 \text{ Zentner.}$$

Man weifs aber sehr wohl aus der Erfahrung, dafs Gebäude, deren Fundament anfänglich hinlänglich widerstand, doch nach Jahren sich noch senkten, und darum mufs Z in der Ausübung bei weitem kleiner als nach No. 134. genommen werden. Ich gebe daher für die Ausübung zur vollen Sicherheit die Formel

$$135.)\quad Z = \frac{4 \,.\, PH}{1 + \frac{Q}{P}}$$

also $\frac{1}{12}$ vom vorigen. In unserem Beispiele wäre hiernach

$$Z = \frac{1477}{12} = 123 \text{ Zentner.}$$

Ein Rost, der mit einer Last von 4000 Zentnern beschwert werden sollte, müfste hiernach auch $\frac{4000}{123} = 32$ oder 33 Pfählen ruhen, wovon jeder mit einem 10 Zentner schweren Rammbäre so tief eingetrieben worden wäre, dafs er in den letzten 30 Schlägen zusammengenommen nicht mehr über 3 Linien tief gesunken wäre.

§. 106.

Die Theorie, von deren Resultat wir so bedeutend abweichen, gewährt uns doch den Vortheil einer vollkommenen Ueberzeugung von der Sicherheit dieses Verfahrens, und rechtfertigt die darauf gegründeten Anordnungen eines Baumeisters oder Ingenieurs. Auch zeigt die Formel (No. 132.), dafs mit jedem Schlage der Pfahl desto tiefer eindringt, je kleiner $\frac{Q}{P}$, oder je kleiner das Gewicht des Pfahls in Vergleichung mit dem Gewicht des Rammklotzes ist. Fichtene oder förlene Pfähle sind daher bedeutend leichter einzutreiben als eichene von gleichem Maafse. Auch ist (No. 133.) bei einerlei Tiefe τ der Widerstand oder die Last Z, mit der der Pfahl ohne tiefer zu sinken beschwert werden darf, desto gröfser, je kleiner $\frac{Q}{P}$ ist.

Man ersieht ferner aus (No. 133.) oder (No. 134.), dafs die Last Z in demselben Ver-

hältnisse gröſser wird, in welchem beim Einrammen bis zu einem bestimmten Werthe von τ die Fallhöhe des Rammklotzes gröſser genommen wird, so daſs sich Z wie H verhält. Das Gewicht des Rammklotzes P aber kommt im Zähler und im Nenner vor, so daſs zugleich der Nenner desto kleiner wird, je gröſser P ist. Demnach wächst Z in stärkerem Verhältnisse als P. Daher erhält man mit einem 10 Zentner schweren Rammklotze bei 4′ Fallhöhe einen gröſseren Werth von Z als mit einem 8 Zentner schweren bei 5′ Fallhöhe, oder mit einem 4 Zentner schweren bei 10′ Fallhöhe. Nimmt man im vorigen Beispiele $P = 4$ Zentner, $H = 10'$, so findet man

$$Z = \frac{48 \,.\, 4 \,.\, 10}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{7680}{7} = 1099 \text{ Zentner statt } 1477.$$

Handrammen können nur wenig leisten. Wir wollen starke Voraussetzungen annehmen, und $P = 1$ Zentner, $H = 2$ Fuſs, $Q = \frac{1}{4}$ Zentner setzen, so wird aus (No. 135.)

$$Z = \frac{4 \,.\, 1 \,.\, 2}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{32}{5} = 6{,}4 \text{ Zentner *)}$$

Festigkeit der Schutzmauern.

§. 107.

bcmn (*Fig.* 49) sey Erdmasse, welche durch eine Schutzmauer gegen das Herabstürzen hinlänglich gesichert werden soll, so erspart man bedeutend, wenn man den gröſsten Theil des Widerstandes durch eine Böschung *ae* zu erhalten sucht, und dem parallelepipedischen Theile nur eine geringe Dicke *a b* giebt, die etwa $1\frac{1}{4}$ Par. Fuſs betragen kann. Wir wollen diese Breite *ab* mit b, die *ae* mit B und die Höhe *a d* mit h bezeichnen.

Es finden nun mannchifaltige Ansichten Statt, auf welche man die Bestimmungen von b und B gründen kann, die zum Theil auf ziemlich verwickelten Kalkul führen und doch alle bedeutende Korrektionen für die Ausübung nöthig machen. Um solche Künsteleien und Weitläuftigkeiten zu beseitigen und doch zu Bestimmungen zu gelangen, die uns in der Ausübung mit Sicherheit leiten, lege ich nachstehende Voraussetzuug zum Grunde:

> Die Erdmasse hinter der Mauer werde durch anhaltend nasse Witterung zu einer breiartigen Masse erweicht, von der 1 Par. Kubikfuſs 100 Cöllnische ℔ wiege, und sie habe in diesem Zustande halbe Flüssigkeit oder halb so viel Streben zu zerflieſsen, als das Wasser.

Wie müssen nun die Abmessungen der Mauer, von der ich 1 Par. Kubikfuſs zu 140 ℔ annehme, beschaffen seyn, um dem Druck sicheren Widerstand zu leisten.

Der Druck der Erde gegen die Mauer ist $= \frac{1}{4} h \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 100$ ℔, wenn ich die Mauer-

) Beschreibung der Rammmaschine wird im XIX. Kapitel §. 265 vorkommen.

länge $= \lambda$ setze. Die Richtigkeit dieses Satzes unter obiger Voraussetzung wird in der Folge bewiesen werden (§. 122). Dieser Druck wirkt in der Mitte der Mauerhöhe nach $v\,x$, es ist also

$$\text{Statisches Moment des Erdendrucks} = \tfrac{1}{8} \,.\, h^3 \,.\, \lambda \,.\, 100.$$

Die Mauer strebt mit diesem Momente sich um e zu drehen; ihm widerstehen aber die Momente der Mauerstücke $a\,b\,c\,d$ und $c\,a\,d$.

Der Schwerpunkt v des parallelepipedischen Stücks liegt in dessen Mitte v; ist $v\,z$ lothrecht, so ist der Erfolg so, als wäre in z ein Gewicht $= b \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140$ ℔ angehängt.

Nimmt man $c\,s = \tfrac{2}{3}\, c\,y$, so ist s der Schwerpunkt der Böschungsmauer, und $c\,w = \tfrac{2}{3}\, c\,a = \tfrac{2}{3}\, B$; der Erfolg ist nun derselbe, als wäre in w ein Gewicht angehängt $= \tfrac{1}{2}\, c\,a \,.\, a\,d \,.\, \lambda \,.\, 140$ ℔ $= \tfrac{1}{2}\, B \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140$. Das statische Moment der Mauer ist nun

$$= c\,z \,.\, b \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140 + c\,w \,.\, \tfrac{1}{2}\, B \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140$$
$$= ((B + \tfrac{1}{2}\, b) \,.\, b + \tfrac{2}{3}\, B \,.\, \tfrac{1}{2} B) \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140$$

Daher für das Gleichgewicht

$$\tfrac{1}{8}\, h^3 \,.\, \lambda \,.\, 100 = ((B + \tfrac{1}{2}\, b) \,.\, b + \tfrac{1}{3}\, B^2) \,.\, h \,.\, \lambda \,.\, 140$$

oder

$$136.)\quad \frac{5}{56}\, h^2 = B\,b + \tfrac{1}{2}\, b^2 + \tfrac{1}{3} B^2.$$

Dieses ist die sehr einfache hierher gehörige Fundamentalgleichung *für gespeiste Mauern von gewöhnlichen Bruchsteinen.*

Um B zu bestimmen, hat man

$$B^2 + 3\,B\,b = \frac{15}{56} \,.\, h^2 - \tfrac{3}{2}\, b^2$$

$$137.)\quad B + \tfrac{3}{2}\, b = \sqrt{\left(\frac{15}{56}\, h^2 - \tfrac{3}{2}\, b^2 + \tfrac{9}{4}\, b^2\right)}$$

$$B = - \tfrac{3}{2}\, b + \sqrt{\left(\frac{15}{56}\, h^2 + \tfrac{3}{4} b^2\right)}$$

Ex. Es sey $h = 15'$, $b = \tfrac{5}{4}'$ so wird

$$B = - \frac{15}{8} + \sqrt{61{,}47} = 5{,}94'$$

Für $h = 10'$ hätte man

$$B = - \frac{15}{8} + \sqrt{28{,}17} = 3{,}43'$$

§. 108.

Die Mauern können aber auch verdrückt werden, wobei sie zuerst einen Bauch erhalten, der dann den später erfolgenden Einsturz verkündigt. Diesem Erfolge kräftiger zu begegnen, schichtet man die Steinlager des Mauerwerks wie *Fig.* 51, da dann die vorige Bestimmung auch in Bezug auf diesen Erfolg allemal hinlängliche Sicherheit

gewährt. Der gewöhnlich sich ergebende leere Raum *abcd* darf nicht mit meistens abgerundeten Flufs- oder Feldsteinen und Erde ausgefüllt werden, weil solche Steine sich in einander keilen und dann wegen der auf ihnen ruhenden Last mit grofser Macht gegen die Mauer drücken. Man füllt ihn während dem Aufführen der Mauer mit platten gehörig aufeinander geschichteten Steinen mit Erde vermengt aus, oder auch mit thoniger Erde, die man nach jeder Ueberschüttung stark zusammenstampft.

§. 108*.

Trockene Mauern (ohne Speifse) erfordern gröfsere Dicke, so dafs sowohl *a b* als *a c* (*Fig.* 49) um $\frac{1}{4}$, ja bei minder flachen und kleinen Steinen um die Hälfte vergröfsert werden mufs. Die leeren Zwischenräume werden mit Steinsplittern und Moos ausgestopft. Sehr weicher Boden wird vor dem Aufmauern durch 3, 4 bis 5 Fufs lange eingetriebene Pfähle mehr befestigt, auch bei bedeutenden Mauerwerken diese Pfähle mit einem Rost belegt, und die einzelnen Rostfelder mit grofsen Steinen ausgepflastert.

VII. Kapitel.

VON DER REIBUNG.

§. 109.

Der *Reibungswiderstand* (auch schlechthin *Reibung*, *Friktion*) ist derjenige Widerstand, welchen die Rauhigkeiten, womit die Oberflächen der Körper gleichsam besäet sind, der Bewegung eines Körpers entgegen setzen, welcher während dieser Bewegung an einen andern Körper angedrückt wird.

Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes veranlaſste in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts (1779) die Akademie zu Paris zur Aussetzung eines Preises auf die belehrendste Abhandlung über die Reibung, und diesen Preis nachher (1781) sogar zu verdoppeln.

Coulomb, damaliger Ingenieurhauptmann, erhielt den verdoppelten Preis. Eine sehr ausführliche Nachricht von den trefflichen Versuchen dieses Physikers findet man in der *Neuen Architektura Hydraulika* von *Prony*.

Schon *Amontons* (Hist. de l'Acad. roy. des sc. 1699) folgerte aus seinen Versuhen: *die Reibung sey ein bestimmter aliquoter Theil* (nach ihm $\frac{1}{3}$) *des senkrechten Drucks, die sich einander reibenden Flächen mögen groſs oder klein seyn. Parent* fand (a. a. O. vom J. 1700) durch Schlüsse die Reibung $= \frac{7}{20}$, und *Bülfinger* (Comment. Acad. Petrop. T. II.) $= \frac{1}{4}$ des senkrechten Drucks.

Belidor, der das erste bedeutende Werk über praktische Maschinenlehre für die Ingenieur-Wissenschaften lieferte und damit seinen ewigen Ruhm begründete, rechnete überall nach *Amontons* Bestimmung, die dann ebendarum auch von späteren praktischen Schrifstellern bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts beinahe durchgängig beibehalten wurde.

§. 110.

Dafs hier keine allgemeine nur etwas genaue Bestimmung der Gröfse des Reibungswiderstandes gedacht werden könne, ist aus der Natur der Sache klar, da die Rauigkeiten der Flächen sehr verschieden sind. Dafs ein Körper auf einer rauhen Dihle von Seiten der Reibung einen gröfseren Widerstand leidet, als auf einer glatten Tafel, bedarf kaum einer Erinnerung. Aber nicht blos in Bezug auf verschiedene Grade der Politur, sondern auch nach Verschiedenheit der Materien ist der Widerstand der Reibung verschieden. *Coulomb* hat hierauf vorzüglich seine Aufmerksamkeit gerichtet.

Man mufs überdas *trockene* Reibung von der Reibung *geschmierter* Flächen unterscheiden.

Auch ist der Widerstand der Reibung, welcher überwunden werden mufs, um einen ruhig liegenden Körper aus seiner Stelle zu bewegen, gröfser als bei schon erlangter Bewegung.

Ueberdas hat man in Bezug auf verschiedene Arten von Bewegungen dreierlei Arten von Reibungen von einander zu unterscheiden:

1.) Gleitende Reibung.
2.) Wälzende Reibung.
3.) Zapfenreibung an der cylindrischen Fläche der Zapfen.

Die *gleitende* Reibung tritt überall ein, wo eine und dieselbe Fläche mit ihren Reibungspunkten an einer andern Fläche hingleitet, wie wenn ein Körper auf einer Tafel fortgeschoben wird, wo immer dieselben Punkte des Körpers der Reibung ausgesetzt bleiben.

Die *wälzende* Reibung tritt bei cylindrischen Flächen ein, die bei ihrer Bewegung sich um eine Axe drehen, welche selbst mit fortbewegt wird. Dieses ist die Reibung bei Walzen.

Die *Zapfenreibung* tritt bei allen Wellzapfen ein, die sich in unbeweglichen Zapfenlagern herumdrehen, deren Axen also immer an einerlei Stelle bleiben.

Unter sonst gleichen Umständen ist die *gleitende* Reibung die stärkste, die *wälzende* die schwächste; die *Zapfenreibung* ist zwar gleichfalls sehr viel stärker als die wälzende, doch aber allemal noch bemerkbar kleiner als die gleitende.

§. 111.

So vergeblich hiernach die Bemühung scheinen mufs, bei Maschinenberechnungen die Reibungshindernisse in Anschlag bringen zu wollen, und so gewifs es in der That ist, dafs solche nie mit grofser Genauigkeit in Rechnung gebracht werden kann, so treten doch dabei einige Umstände ein, welche den Mangel an Genauigkeit dieser Wiederstandsbestimmung für die Ausübung meistens unschädlich oder unbedeutend machen. Dahin gehört

1.) Dafs wir es immer in unserer Gewalt haben, durch anfängliche Vergröfserung der Kraft die Maschine in Bewegung zu setzen, und dafs wir daher auf die Ueberwindung der Reibung im *Zustande der Ruhe* durchaus keine Rücksicht zu nehmen haben.

2.) Dafs wir bei allen Maschinenanlagen gehörige Bearbeitung der einzelnen Theile ohnehin fordern müssen, also nie rohe Massen voraussetzen dürfen. Gesetzt aber auch, dafs z. B. gegôssene Zapfen anfangs sehr rauh aus der Schmelzhütte kämen, so würden ihre Aussenflächen doch in den paar ersten Tägen durch das beständige Umlaufen der Räder so abgeschliffen seyn, dafs wir die Rechnung nur für glatte Zapfen führen dürfen.

3.) Dafs der Reibungswiderstand bei Maschinen durch zweckmäfsige Schmiere allemal merklich vermindert und meistens dahingebracht werden kann, dafs selbst die gleitende Reibung weniger als $\frac{1}{8}$ des Drucks beträgt.

4.) Dafs wir es fast nie mit ganz gleitender Reibung, sondern fast immer mit Zapfen- und eine Art Reibung zu thun haben, die einigermaafsen wälzend wirkt.

5.) Dafs es bei Maschinen nicht sowohl auf die absolute Gröfse der Reibung als auf ihr statisches Moment ankommt, das dann in den allermeisten Fällen bei fortdauernd wirkenden Maschinen in Vergleichung mit dem statischen Momente der ganzen Last sehr klein wird; dafs also der Fehler in Bestimmung der wahren Gröfse der Reibung in Fällen dieser Art einen sehr unbedeutenden Theil der gesammten Last ausmachen mufs.

6.) Dafs wir doch immer die Reibung so in Rechnung zu bringen im Stande sind, dafs wir der Maschine in Bezug auf die Einrichtung für das Maximum des Effekts die genügende Vollkommenheit geben können. Denn wir wissen aus der Analysis, dafs Bestimmungsstücke, die das Maximum einer Gröfse geben, auch bei schon merklicher Abänderung doch immer zu einem Werthe führen, der dem Maximum sehr nahe kommt.

7.) Dafs wir es in der Ausübung bei Maschinenanlagen nie mit Forderungen zu thun haben, die ein sehr genaues Resultat nothwendig machten, wie bei astronomischen Berechnungen, und dafs wir unsere Berechnungen doch immer so führen können, dafs wir den Effekt, den sie versprechen, mit Sicherheit erwarten dürfen.

§. 112.

Muschenbröck fand bei kleineren Pressungen und für den Ruhestand

bei der Reibung des Stahls	den *Reibungskoëfficient* Trocken.	Eingeölt.
an Stahl	$\frac{11}{40}$	$\frac{12}{50}$
— Kupfer	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{40}$
— Zinn	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{23}$
— Blei	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{37}$
— Messing	$\frac{8}{55}$	$\frac{2}{15}$

Coulomb fand

I. Bei *gleitender Reibung*	*Reibungskoëfficient* Trocken.	Mit erneuerter Schmiere.
Eichenholz auf Eichenholz	0,1	
bei einem Drucke von 50 ℔		0,036
— 450		0,047
— 3250		0,130
Eisen auf Eisen	0,276	
bei einem Druck von 1653 ℔		0,097
— 453		0,099
— 53		0,160
Eisen auf Messing	0,24	
bei einem Druck von 1652 ℔		0,091
— 452		0,093
— 52		0,125

II. *Bei der Zapfenreibung*

Bei der *trockenen* Reibung ist der Reibungskoëfficient etwa um $\frac{1}{4}$, mit Schmiere wenigstens um $\frac{1}{15}$ kleiner als bei der gleitenden; in jedem Falle polirte oder glatt gewordene Flächen angenommen.

III. Bei der *wälzenden* Reibung kann, es mag von trockenen oder von geschmierten Flächen die Rede seyn, der Reibungskoëfficient bei einer 12 zölligen Walze zu $\frac{1}{20}$ von der gleitenden Reibung trockener Fläcken angenommen werden. Bei einer 6 zölligen Walze beträgt sie beiläufig $\frac{1}{10}$ von der gleitenden Reibung trockener Flächen.

Drückt man den Durchmesser der Walze in rheinl. Zollen aus, und setzt ihn $= d$, so glaube ich, wenn die gleitende trockene Reibung bei derselben Materie $= F$ wäre, daſs man, bis zu weiterer Untersuchung

$$137^*.)\quad \text{die wälzende Reibung} = \frac{d+1}{(d^2+1)\cdot 1{,}8}\cdot F$$

in der Ausübung wird annehmen können.

Ich werde kaum erinnern dürfen, daſs der Bruch, welcher mit dem Druck multi-

plicirt die Reibung geben soll (wie 0,036; 0,047; 0,130 etc.) der *Reibungskoëfficient* genennt worden ist.

§. 113.

Alle diese Bestimmungen setzen voraus, dafs die Richtung des Drucks auf die Richtung, in der sich der reibende Punkt oder die reibende Stelle bewegt, senkrecht sey, wobei dann der Weg, welchen ein reibender Punkt auf der anliegenden Fläche durchlauft, mit dem ganzen Weg, durch den er sich während der Reibung überhaupt bewegt, ganz einerlei ist. Bezeichnen wir den ersteren Weg mit b, den letzteren mit B, so wird die Reibung desto kleiner, je kleiner $\frac{b}{B}$ wird. Wären b', b'', b''' etc. nach einander folgende sehr kleine Theilchen von b, und B', B'', B''' etc. die zugehörigen Theilchen von B, und bezeichnet man den nach dem vorigen §. bestimmten Reibungskoëfficient allemal mit μ, den Reibungskoëfficient aber für die Wege b', b'', b''' etc. mit φ', φ'', φ''' etc., so hätte man

$$\varphi' = \frac{b'}{B'} \cdot \mu; \qquad \varphi'' = \frac{b''}{B''} \cdot \mu; \qquad \varphi''' = \frac{b'''}{B'''} \cdot \mu \text{ etc.}$$

und die Bewegung im Ganzen müfste nach diesen verschiedenen nach einander folgenden Werthen, nach welchen der gesammte Widerstand selbst veränderlich wird, besimmt werden. Da aber in Fällen, wo solche Aenderungen des Reibungswiderstandes vorkommen, dieser Widerstand überhaupt nur einen kleinen Theil des gesammten Widertandes ausmacht, so wäre es höchst zweckwidrig, dynamische Bestimmungen in der praktischen Maschinenlehre durch ein solch pedantisch methodisches Verfahren ohne allen Nutzen verwickelt machen zu wollen. Es ist mehr als genügend, den mittleren Reibungskoëfficient

$$138.) \qquad \varphi = \frac{b}{B} \cdot \mu$$

in allen solchen Fällen zu gebrauchen.

Bei der grofsen Verschiedenheit von Bestimmungen, die uns Coulomb nach seinen Beobachtungen mitgetheilt hat, und von denen ich nur einige im vorigen §. beigefügt habe, müssen wir für die Ausübung bestimmte Werthe von μ festsetzen, die uns zu *sicheren* Resultaten führen, welche uns in Bezug auf den Effekt der einzelnen Maschinen nicht zu viel versprechen. Wir setzen daher in der Folge durchaus

bei der *gleitenden* und bei der *Zapfen*-Reibung

139.)
für *Holz* auf *Holz*
bei *trockener* Reibung$\mu = \frac{1}{4}$; bei zweckmäfsiger Schmiere...$\mu = \frac{1}{5}$
für *Eisen* auf *Eisen*
bei *trockener* Reibung.....$\mu = \frac{1}{3}$; bei *Einöhlung*..................$\mu = \frac{1}{6}$
für *Eisen* auf *Messing*
bei *trockener* Reibung.....$\mu = \frac{1}{4}$; bei *Einöhlung*$\mu = \frac{1}{8}$

Dabei werden allemal schon etwas abgeschliffene oder, beim Holze, abgehobelte Flächen vorausgesetzt; auch ist hier nur von Reibung *während der Bewegung* die Rede.

§. 113*.

Die Gröfse der Reibung wird durch längst bekannte Mittel (Oehl, Theer, Unschlitt, Seife u. dgl.) sehr vermindert. Hier verdient aber eine neue Maschinenschmiere bemerkt zu werden, welche *Herr Karsten* in s. *Archiv für den Bergbau* VII, Bd. S. 504 aus dem neuen Kunst- und Gewerbblatt (München 1823) mittheilt:

Mischung. dem Gewicht nach besteht diese Schmiere aus 10½ Theilen rein ausgelassenem *Schweinefett*, und aus 2 Theilen fein geschlämmtem und gepülvertem *Graphit.*

Bereitung. Man läfst in einem eisernen Kessel das Schweinefett über einem mäfsigen Kohlenfeuer gänzlich und gut flüfsig werden, bestreut dasselbe sodann mit einer Handvoll Graphit, und rührt mit einem hölzernen Löffel so lange um, bis sich Fett und Graphit völlig vereinigt haben. Ist diefs geschehen, so giebt man wieder eine Handvoll Graphit auf, und fährt mit dem Umrühren fort, bis die zwei Theile Graphit verbraucht sind. Der Kessel wird dann vom Feuer abgenommen, und die Masse, bis sie erkaltet, ungerührt.

Anwendung. Diese Schmiere wird, ohne sie zu erwärmen, mittelst eines Pinsels auf die Wellzapfen, auf die Eingriffe der Räderwerke u. s. f. aufgetragen. Es reicht gewöhnlich hin, wenn das Auftragen nur nach 24 Stunden wiederholt wird.

Man gewinnt beim Gebrauch dieser Schmiere bedeutend in den Kosten, und ihr Gebrauch kann daher, wird noch hinzugefügt, nicht genug empfohlen werden.

§. 114.

Manche bei Maschinen vorkommende Massen sind entweder ihrer Natur nach oder dem Zwecke gemäfs sehr rauh, so dafs bei solchen der Reibungskoëfficient $= \frac{1}{2}$ und noch gröfser werden kann z. B. bei Stricken oder Seilen.

Die bedeutende Reibung der Seile verdient, wegen der häufigen Anwendung, die man davon macht, hier noch eine eigene Bemerkung.

Zur Aufförderung des Gesteins aus den Schächten bedient man sich sehr häufig liegender Wellen, die mittelst eingesteckter Kurbeln herumgetrieben werden.

Um die Welle wird ein Seil herumgelegt, so dafs beide Ende des Seils in den Schacht herab hängen; an jedem dieser beiden Enden ist ein Kübel befestigt, so dafs der eine allemal leer nieder geht, indefs der andere gefüllt aufgezogen wird. Der gefüllte Kübel würde nun, da das Seil übrigens ganz frei um die Welle herum liegt, von dem leeren nicht gehalten werden können, er würde das Seil um die Welle herumdrehen, wenn dieses nicht durch die Reibung des Seils verhindert würde. Bleibt das Seil nur einigemal um die Welle herum gewunden, so vermag das Gewicht des beladenen Kübels dasselbe

nicht mehr um die Welle herum zu drehen. Die Reibung kann dabei vielmal gröſser werden als das Gewicht des beladenen Kübels.

Ebenso schützt diese Reibung des Seils die Schiffe an den Meeresufern gegen die Gewalt der gröſsten Stürme, wenn ein am Schiffe befestigtes hinlänglich starkes Seil nur 3 bis 4 mal um einen hinlänglich starken Pfahl herum gelegt ist. Der Ingenieur muſs diese Erscheinung zu erklären wissen.

Der Kreis (*Fig.* 52) sey der Durchschnitt eines Cylinders; an ihm sey zuerst nur ein Seilstück wie $abcm$ so angelegt, daſs es an dem Bogenstück bc anliege; das Endstück ba werde von einem Gewicht Q angezogen; nach cm soll eine Kraft V ziehen, die so groſs ist, daſs sie mit Q und der an bc entstehenden Reibung zusammengenommen gerade im Gleichgewicht ist, so läſst sich, wenn der Zug nach cm gleichfalls durch Gewichte bewirkt, und dieser Zug durch allmählig zugelegte Gewichte nach und nach verstärkt wird, endlich das Gewicht finden, wobei das Seil einige Bewegung beginnt. Das so durch einen Versuch gefundene Gewicht ist dann für das Bogenstück bc, das wir $= \alpha$ setzen wollen, die Kraft V.

Nun werde das Seil von b bis in d an den Umfang angelegt, so daſs $bd = 2\alpha$ sey; so wird jetzt nach dn eine neue Kraft S, statt der V, erfordert, um mit Q und der Reibung an bd ins Gleichgewicht zu treten.

Da jetzt von b bis in c schon die Reibung so groſs ist, daſs an c schon die Kraft V zum Gleichgewicht erfordert wird, daſs also die Sache so angesehen werden kann, als wäre jetzt in c nach $c\beta$ ein Gewicht $= V$ angebracht, so wird jetzt, weil die Zugkraft bei dem gleichen Bogen $cd = \alpha$ dem Widerstande am Anfange des Bogens (vorhin Q, jetzt V) proportional seyn muſs, nach dn eine Kraft $S = \frac{V}{Q} . V$ erfordert, um mit V und der Reibung an cd im Gleichgewicht zu seyn.

Jetzt werde dasselbe Seil von b bis in e an den Bogen $bce = 3 . \alpha$ angelegt, und die mit S und der Reibung an de ins Gleichgewicht tretende Kraft nach eo heiſse T, so ist aus gleichem Grunde $T = \frac{S}{V} . S = \frac{\frac{V}{Q} . V}{V} . \frac{V}{Q} . V = \left(\frac{V}{Q}\right)^2 . V$. Käme noch das vierte Bogenstück α hinzu, so wäre die jetzt zum Gleichgewicht erforderliche Kraft $U = \left(\frac{V}{Q}\right)^3 . V$. u. s. w.

Wird also das Seil um n solche Bogenstücke α gelegt, und bezeichnen wir die jetzt mit dem Widerstande Q und der gesammten Reibung ins Gleichgewicht tretende Kraft am andern Ende des Seils mit K, so hat man allgemein

$$140.)\quad K = \left(\frac{V}{Q}\right)^{n-1} . V.$$

Wäre z. B. das Gewicht des leeren Eimers an einem Haspel = 20 ℔, und wäre am lothrecht herab hängenden andern Seilende ein Gewicht von 30 ℔ nöthig, um das am halben Umfange anliegende Seil zum Abgleiten zu bringen (ohne die Welle sich drehen zu lassen), so hätte man bei $3\frac{1}{2}$ Umwindungen des Seils, also für die Anlegung am 7 fachen Bogen α. (Hier wäre nämlich der halbe Umfang = α).

$$K = \left(\frac{30}{20}\right)^{7-1} . 30 = 341{,}7 \text{ ℔}.$$

VIII. Kapitel.

STEIFIGKEIT DER SEILE.

§. 115.

An der um den Zapfen *c* laufenden Scheibe (*Fig.* 53) sey in *v* ein dünner höchst beugsamer Faden befestigt, wie *vab*, an dessen unterem Ende *b* das Gewicht *P* angebracht wäre. Ist nun gegenüber etwa in *n* ein ebensolcher Faden mit einem gleichen Gewicht *Q* um die Scheibe gelegt, so sind *P* und *Q* im Gleichgewicht; und wenn man jetzt *P* nach und nach etwas vergröſsert, bis es zu sinken beginnt, so ergiebt sich die Gröſse der zur Ueberwindung der Zapfenreibung erforderlichen Kraft an *a*.

Befestigt man jetzt ein *Seil*, wie *mnop* bei *m* statt des dünnen Fadens, und am Ende *p* dieses Seils das vorige Gewicht *Q*, so muſs das Gewicht *P*, obgleich die Reibung kaum merkbar vergröſsert wird, dennoch merklich mehr als vorher vergröſsert werden, bis *P* zu sinken beginnt, die wegen des Seilgewichts ohnehin erforderliche Vergröſserung ganz bei Seite gesetzt.

Je dicker das umgelegte Seil ist, desto mehr muſs *P* vergröſsert werden, um bis zur beginnenden Bewegung zu gelangen. Das umgelegte Seil muſs also selbst einen eigenen Widerstand verursachen, der aber nicht von der Dicke und Beschaffenheit des Seils allein abhängt, sondern auch von dem Halbmesser der Scheibe und dem Gewicht *Q*, von welchem die Spannung abhängt. Wenn z. B. für $Q = 40$ ℔ der von Seil herrührende Widerstand 5 ℔ beträgt, so ist bei derselben Scheibe und demselben Seile jener Widerstand merklich gröſser als 5 ℔, wenn man $Q = 100$ ℔ nimmt.

Man hat diesen Widerstand *den Widerstand wegen der Steifigkeit des Seils* genannt.

Die ersten Bemühungen um nähere Kenntniſs dieses Widerstandes verdanken wir einem französischen Physiker, *Amontons*, in dem *Mémoires de l'Acad. de Paris* 1699, wo er

seine hierüber angestellten Versuche und die hierzu getroffenen Anstalten mit den daraus abgeleiteten Folgerungen mittheilt; auch findet man solche in *Nollet's Leçons de Phys. Tom. III. Lect. IX.* und in *Karstens Mech. fester Körper* §. 411 u. ff.

§. 116.

Man hat diesen Widerstand immer so betrachtet, als fiele der Kraft P jene Kraft zur Last, welche nöthig ist, das steif herabhängende Seilende $p\,o$ bei o nach $o\,n$ zu krümmen, was augenscheinlich unrichtig ist, so lange die hierzu erforderliche Kraft kleiner als die Last Q ist, welche das Seil nach $o\,p$ spannt. Denn ebendiese Last Q bringt während der Umdrehung der Scheibe oder der Walze zugleich das Seil in die lothrechte Lage $o\,p$, in der sie mit ihrem ganzen Gewicht auf die Umdrehung wirkt. Die ringförmige Anlegung des Seils bei o geschieht nicht durch P, sondern durch Q. Würde ein Theil von $Q = q$ zu dieser Beugung verwendet, so wäre der übrige Theil der Last, den P noch zu wältigen hat, nur noch $Q - q$; daneben hätte aber P auch noch den Widerstand q zu wältigen, also überhaupt die Last $Q - q + q = Q$. Hierüber findet gar kein Zweifel Statt.

Ich halte mich nunmehr überzeugt, dafs der Widerstand der Seile blos eine Folge der ungleichen Spannungen ist, welche die einzelnen Litzen des Seils beim Aufziehen leiden.

Würde das Seil blos in seiner Mittel- oder centrischen Linie angespannt, so wäre für diese Stelle die Last schlechthin $= Q$. Der Halbmesser der Walze sey $= R$, die Dicke des Seils im Durchmesser $= \delta$; wäre nun die Spannung blos an den äufsersten Punkten des Seils, jetzt in der Entfernung $R + \delta$, so wäre die Last, auf die Mitte der Seildicke gebracht, $= \frac{R + \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q = \frac{R + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q = Q + \frac{\frac{1}{2}\delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q$. Hiernach wäre dann der Widerstand wegen der ungleichen Spannung allemal kleiner als $\frac{\delta}{2R + \delta} \cdot Q$.

Auch über diesen Gegenstand hat *Coulomb* in der oben angeführten Abhandlung Versuche angestellt, worüber man die Neue Archit. Hydraul. von *Prony* I. Bd. S. 548 — 555 nachsehen kann.

Bei einem noch neuen trockenen ungepichten Seile war $\delta = 9'''$, $R = 12''$, $Q = 625$ ℔; setzen wir nun den Widerstand w wegen der Spannung des Seils $= \frac{\alpha \cdot \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q$, so wird hier

$$w = \frac{\alpha \cdot 9}{12 + 4{,}5} \cdot 625; \text{ daher } \alpha = \frac{16{,}5 \cdot w}{5625}$$

Bei diesem Versuche hatte man $w = 134$ ℔ gefunden; dieses gäbe also $\alpha = \frac{16{,}5 \cdot 134}{5625} = 0{,}393$, wofür wir 0,4 setzen dürfen. Hiernach wäre

$$w = \frac{0,4 \,.\, \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \,.\, Q$$

für neue trockene ungepichte Seile.

Ein anderer Versuch von *Coulomb* (*Prony* §. 1176) gab $w = 68$ ℔; dabei war $\delta = 9'''$, $R = 36'''$, $Q = 1025$ ℔; man hatte also $68 = \frac{\alpha \,.\, 9}{40,5} \,.\, 1025$, und $\alpha = \frac{40,5 \,.\, 68}{9 \,.\, 1025}$ sehr genau $= 0,3$. Hiernach würde

$$w = \frac{0,3 \,.\, \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \,.\, Q$$

§. 117.

Karsten drückt (a. a. O. §. 412) die Regel, welche sich aus *Amontons* Versuchen ergiebt, in Worten so aus, dafs sich dabei die Seildicke Δ auf Linien, der Durchmesser D der Walze auf Zolle, das Gewicht am Seile $\mathfrak{P}$ auf Pfunde, und der Widerstand wegen des Seils S auf Lothe bezieht. So verstanden wird bei ihm

$$S = \frac{\Delta \,.\, \mathfrak{P}}{D} \text{ Lothe} = \frac{\Delta \,.\, \mathfrak{P}}{32 \,.\, D} \text{ ℔}$$

Drückt man nun Δ wie D in Zollen aus, so erhält man

$$S = \frac{12 \,.\, \Delta \,.\, \mathfrak{P}}{32 \,.\, D} = \frac{6 \,.\, \Delta \,.\, \mathfrak{P}}{32 \,.\, R} = \frac{0,187 \,.\, \Delta}{R} \,.\, \mathfrak{P}$$

oder nach unseren Bezeichnungen $w = \frac{0,187 \,.\, \delta}{R} \,.\, Q$.

§. 118.

Prony (*Neue Archit. Hydr.* §. 1000) fand sich ohne Zweifel bei Erklärung der Art, wie die Steifigkeit des Seils als Widerstand wirke, in einiger Verlegenheit, die er jedoch auf keine Weise äufsert; sie spricht aber desto deutlicher aus der Erklärung selbst, die ganz gegen die Natur der Sache streitet, da er das an einer Rolle frei herabhängende Seil, welches unten mit einer Last beschwert ist, nicht lothrecht, sondern schief herabhängen läfst. Mit dieser unnatürlichen Voraussetzung verbindet er noch den unmathematischen Satz, dafs die Last darum mehr widerstehe, weil ihr Schwerpunkt weiter von der durch die Axe der Welle gehenden lothrechten Linie entfernt sey, als der Umfang der Welle, da doch bei der angenommenen schiefen Lage des Seils gerade umgekehrt die Last weniger widerstehen könnte als in der lothrechten Lage. Späterhin (§. 1022) kommt er auf den Ausdruck

$$w = \frac{\delta^{\mu}}{R} \,.\, (a + \alpha\, Q)$$

der unter dieser Form allerdings weniger beschränkt ist, als der $w = \frac{\alpha\,\delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \,.\, Q$. Er

nimmt nun 3 Beobachtungen zu Hülfe, um aus solchen die Werthe der 3 unbekannten Gröſsen μ, a und α abzuleiten, und findet (§. 1180).

$$\mu = 1{,}7; \quad a = 2{,}45; \quad \alpha = 0{,}053$$

Daher die allgemeine Formel

Für neue trockene ungepichte Seile

$$141.) \quad w = \frac{\delta^{1,7}}{R} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 \cdot Q)$$

Begreiflich kann diese Formel Werthe von w geben, welche den Erfahrungswerthen näher liegen, als die aus §. 116 und 117. Nähme man hypothetisch

$$w = \frac{\gamma\delta + \beta\delta^{\mu}}{R} \cdot (a + \alpha Q)$$

und bestimmte nun mittelst 5 Erfahrungen die Werthe von γ, β, μ, a und α, so müſste in der Anwendung auf viele andere Fälle der so berechnete Werth von w der Wahrheit noch näher kommen als nach (No. 141.) Daraus folgt aber nicht, daſs solche Gleichungen der Natur der Sache angemessener sind; durch sie wird für eine groſse Reihe von Fällen der Werth von w nur künstlich herausgedrechselt. Offenbar ist No. 141. gegen die Natur der Sache, wie man gleich sieht, wenn man nur kleine Werthe von Q nimmt. Es sey z. B. $Q = 2$ ℔, $\delta = 1'''$, $R = 4'''$, so hätte man nach No. 141.

$$w = \tfrac{1}{4} \cdot (2{,}45 + 0{,}106) = 0{,}639 \text{ ℔}$$

Bei demselben Faden und derselben Rolle nehme man die doppelte Spannung oder $Q = 4$ ℔, so würde

$$w = \tfrac{1}{4} \cdot (2{,}45 + 0{,}212) = 0{,}665 \text{ ℔}$$

also jetzt w kaum um $\frac{1}{24}$ gröſser als vorher, was augenscheinlich unrichtig ist und offenbar für beide Fälle w zu groſs giebt.

Das Glied 0,053 . Q soll sich auf die Straffheit beziehen, welche vom Zuge oder der Spannung des Gewichts Q herrührt; das unveränderliche Glied 2,45 soll sich auf die natürliche Straffheit des Seils beziehen. Da aber letztere allemal schon durch den Zug mit überwunden wird, so daſs die natürliche Unbeugsamkeit dem Aufziehen gar nicht hinderlich fallen kann, so kann auch ein solches unveränderliches Glied nicht in die allgemeine Formel aufgenommen werden. Daſs diese Pronysche Formel ganz gegen die Natur der Sache streitet, ersieht man auch aus den Erfahrungen bei *nassen* Seilen (*Prony* §. 1184). Seile, die 5 bis 6 Stunden lang in Wasser gelegen hatten, also, wie jeder Handwerker weiſs, hiermit sehr viel an ihrer Steifigkeit verlohren hatten und weit beugsammer geworden seyn muſsten, zeigten im Aufziehen zum Theil einen merklich gröſsern Widerstand als im trocknen Zustande. Dieses beweist doch wohl klar genug, daſs von Hindernissen wegen der *Unbeugsamkeit* der Seilen gar nicht die Rede seyn kann. Eine ganz ähnliche Erscheinung zeigt sich auch bei Seilen, die durch langen Gebrauch alle natürliche

Steifigkeit verlohren haben, für die aber *Prony* doch dasselbe unveränderliche Glied $a = 2{,}45$ findet. Er fiudet für diese Seile

$$142.)\quad w = \frac{\delta^{1,4}}{R} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 \cdot Q)$$

Also für diese Seile den Werth von w doch noch $= \frac{\delta^{1,4}}{\delta^{1,7}}$ vom Werthe, welcher bei ganz neuen Seilen Statt hat.

§. 119.

Prony erinnert noch (§. 1021) zur Geschichte der Vervollkommnung dieser Lehre ausdrücklich, daſs *Coulomb zuerst* die *wichtige* Bemerkung gemacht habe, daſs jenes unveränderliche Glied wegen der natürlichen Streiiigkeit des Seils in die Formel aufgenommen werden müsse. Nach unserer Darstellnng hat er hiermit einen Fehler aufgenommen, den *Amontons* nicht begangen hatte.

Weil es von Wichtigkeit ist, die Unstatthaftigkeit der Prony'schen Betrachtung und seines Kalkuls aufs Ueberzeugendste darzuthun, so füge ich noch folgendes bei:

Das Seil, woran eine Last Q nach mQ zieht (*Fig.* 54), sey in m befestigt, und berühre am Anfange der Bewegung nur noch ein sehr kleines Theilchen vom Umfange der Scheibe, das z. B. nur $= 0{,}001 \cdot R$ sey, so ist für diesen Augenblick die zum Zuge nach α erforderliche Kraft P (die nach *Coulomb* und *Prony* sogleich $= \frac{\delta^{1,7}}{R} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 \cdot Q$ seyn müſste) noch $= Q$; das Seil wird noch nach seiner ganzen Dicke gleichstark gedehnt. Wird nun aber die Scheibe gedreht, bis die Stelle m in die n kommt, so hat sich die untere Seite des Seils nur von μ bis ν angelegt, die obere aber muſste von von m bis n fortrücken. Dieses ist nur unter der Bedingung möglich, daſs das Seil von m bis n an der oberen Seite eine gröſsere Dehnung erlitten hat, als an der unteren von μ bis ν, wo es vielmehr dichter zusammengepreſst werden kann. In der Nähe von m kann nun der Verschub der Litzen immer noch leicht so erfolgen, daſs die Spannung von der in der Nähe von μ nicht merklich verschieden ist, so daſs bei einem noch sehr kleinen Werthe von $\frac{mn - \mu\nu}{R}$ die mittlere Spannung noch in der Mitte der Seildicke angenommen werden kann. Wie aber die Stelle m immer weiter fortrückt oder $mn - \mu\nu$ bedeutender wird und die bereits verschobenen Theile dem Verschieben der angrenzenden immer hinderlicher fallen, muſs die Spannung im Bogen mn die im Bogen $\mu\nu$ allmählig immer mehr übertreffen, so daſs die mittlere Spannung immer weiter über die Mitte von der Dicke des Seils hinaus rückt, bis die mittlere Spannung durch hinlängliche Gröſse des Bogens mn fest regulirt ist. So wird dann auch leicht begreiflich, daſs auch bei *alten* Seilen jener Widerstand immer noch bedeutend bleiben, und daſs das Seil, obgleich durch

Einweichen beugsamer gemacht, doch beim Ziehen einen gröſseren Widerstand geben kann. Auch ist klar, daſs in keinem Falle $w > \frac{\frac{1}{2}\delta}{R + \frac{1}{2}\delta} . Q$ werden kann, vielmehr immer $< \frac{\frac{1}{2}\delta Q}{R + \frac{1}{2}\delta}$ oder $< \frac{\delta}{2R + \delta} . Q$ bleiben muſs.

Ich nehme daher für die Ausübung bei neuen Seilen

$$143.) \quad w = \frac{0,35 \, . \, \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} . Q$$

als beiläufige Bestimmung an, und nenne w die *Hinderniſs* oder den *Widerstand wegen der Spannung des Seils.* Dieser Widerstand kann bei *alten* Seilen abnehmen, bis zu

$$w = \frac{0,35 \, . \, \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} . Q : \sqrt[3]{\delta}$$

oder

$$144.) \quad w = \frac{0,35 \, . \, \sqrt[3]{\delta^2}}{R + \frac{1}{2}\delta} . Q$$

wo dann δ und R in Linien ausgedrückt werden. Wenn ich nämlich gleich die Prony-sche Formel verwerfe, so kann ich doch die Verminderung im Verhältnisse $\frac{\delta^{1,4}}{\delta^{1,7}}$ als beiläufige Bestimmung beibehalten.

Ex. Es sey bei einem neuen Seile

$$\delta = 24''', \quad R = 18'' = 216''', \quad Q = 2000 \text{ ℔}$$

so wird I. Nach *Amontons* und *Karsten*

$$w = \frac{0,187 \, . \, 24}{216} . 2000 = 41,55 \text{ ℔}.$$

II. Nach *Coulomb* und *Prony*

$$w = \frac{24^{1,7}}{216} . (2,45 + 106) = 111,46 \text{ ℔}$$

III. Nach unserer Formel (No. 143.)

$$w = \frac{0,35 \, . \, 24}{216 + 12} . 2000 = \frac{0,70}{18 + 1} . 2000 = 73,68 \text{ ℔}$$

daſs also dieser Werth zwischen den beiden ersten sehr nahe in der Mitte liegt.

In diesem Falle ist der Werth no. II. gröſser als $\frac{\frac{1}{2}\delta}{R + \frac{1}{2}\delta} . Q$, was von der Unrichtigkeit zeugt.

Bei der sowohl wegen der Masse an sich als wegen der Verarbeitung sehr groſsen Verschiedenheit der Seile wäre es eine ebenso vergebliche Bemühung, wie bei der Reibung, eine allgemeine etwas scharfe Bestimmung für w finden zn wollen. Wir sind daher

genöthigt, irgend einen mittlern Werth, der jedoch auf die verschiedenen Bestimmungsstücke δ, R und Q gehörige Rücksicht nimmt, hier gelten zu lassen, wie bei Bestimmung der Reibung. Ohnehin ist w oder der Widerstand wegen der Spannung meistens, und bei Maschinen im Groſsen, die zu einem fortdauernden Betriebe bestimmt sind, allemal ein nur kleiner Theil des gesammten Widerstandes, daſs also der Mangel an *Genauigkeit* der Bestimmung wenig in Betrachtung kommen kann. Bei den *Flaschenzügen*, die wir in der Folge werden kennen lernen, wird dieser Widerstand des Seils allerdings von groſser Bedeutung, aber der Mangel an Genauigkeit seiner Bestimmung wird bei ihnen darum wieder unschädlicher, weil wir uns zu ihrer Betreibung thierischer Kräfte bedienen, die keine so bestimmte Grenzen haben, und weil überhaupt ihr Gebrauch immer nur von kurzer Dauer ist. Aus allen diesen Gründen sind die Formeln No. 143. und 144 hier völlig genügend *).

*) Es ist noch von Wichtigkeit zu bemerken, daſs die beiden Werthe von w für Fälle gelten, wo sich die Spannung des Seilstücks mn über einen ganzen Quadrant verbreitet, wie *Fig.* 54ª.

Ist der Bogen $nm < 90^0$ oder allgemein $= \alpha$, so müssen die Werthe von w im Verhältnisse $\frac{\alpha}{90}$ vermindert oder mit $\frac{\alpha}{90}$ multiplicirt werden, wie *Fig.* 54ᵇ.

IX. Kapitel.

GESETZE DES GLEICHGEWICHTS TROPFBAR FLUESSIGER MASSEN UNTER SICH UND MIT FESTEN KOERPERN.

§. 120.

Die überschriebenen Gesetze machen den Gegenstand der *Hydrostatik* aus. Ich werde hier, dem Zwecke dieser Schrift gemäſs, nur diejenigen Sätze kurz zusammenreihen, welche der Ingenieur in Bezug auf Maschinenlehre wissen muſs.

Unter Wasser wird hier nicht blos unser Quell- Fluſs- Regen- und Schneewasser verstanden, sondern jede analoge flüssige Masse, wie Wein, Oel, Quecksilber, wo nicht solche ausdrücklich als eigene Arten flüssiger Massen unterschieden werden und unter ihrem eigenthümlichen Namen vorkommen. Die allgemeine Wirkung der Anziehungskräfte bei Seite gesetzt, werden hier *flüſsige* Massen als solche angesehen, deren Theilchen unter sich gar keinen Zusammenhang haben und im höchsten Grade verschiebbar sind, und zwar nach allen möglichen Richtungen, so daſs jedes Theilchen den Druck, den es von irgend einer Seite empfängt, nach allen möglichen Richtungen fortpflanzt, insofern nicht die flüſsige Masse so unbedeutend ist, daſs die Wirkung der Anziehungskräfte anliegender Flächen fester Körper dabei in Betrachtung kommt — Fälle, die hier gar nicht berücksichtigt werden.

§. 121.

Das Gefäſs *M* (*Fig.* 55) sey mit Wasser angefüllt und alles Wasser im ruhigen Zustande, so muſs nach der vorausgesetzten Eigenschaft flüssiger Massen das Wasser vermöge der Wirkungen der Schwere eine horizontale Oberfläche bilden, in der die Stellen a, α, b, δ, η liegen; keine Stelle kann über einer angrenzenden erhaben seyn, weil die

höher liegenden Wassertheilchen vermöge der Eindrücke der Schwere tiefer zu sinken streben, also nach den tiefer liegenden Stellen wirklich abfliefsen müssen, da ihnen keine Hindernifs im Wege ist.

In dieser Masse wirken nun die Theilchen nach allen denkbaren Richtungen gegenseitig auf einander, so dafs wir darin Systeme an einander liegender Wassertheilchen, wie wir wollen, denken können, in welchen sich diese Wassertheilchen gegenseitig im Zustande der Ruhe erhalten. Wir können z. B. die Wassertheilchen im Raume $\alpha\beta\gamma\delta$ als ein solches System betrachten; so auch die Wassertheilchen im Raume $\alpha\beta\varepsilon\zeta\eta$. In jedem solchen Systeme sind alle Wassertheilchen unter der horizontalen Oberfläche ac im genauesten Gleichgewicht unter sich und mit den Pressungen aller ringsherum liegenden Theilchen der flüfsigen Masse.

Da das ganze System von Wassertheilchen $\alpha\beta\gamma\delta$, das wir als eine gebogene Röhre annehmen können, im Gefäfse ruhig an seiner Stelle beharrt, dieses System aber mit einer Kraft lothrecht zu sinken strebt, die seinem Gewichte gleich ist, so folgt, dafs das um jenes System ringsherum stehende Wasser auf dasselbe einen Druck von unten nach oben ausüben mufs, der dem Gewichte des Systems gleich ist.

Wäre die Masse $\alpha\beta\gamma\delta$ nicht Wasser, sondern irgend ein anderer Körper z. B. ein Eisen von derselben Form, so könnte die Art der Materie in dem Verhalten der Kräfte, welche in die äufsere Masse wirken, nichts abändern; die Kraft, mit welcher die äufseren Wassertheilchen auf die Masse $\alpha\beta\gamma\delta$ lothrecht nach oben wirken, müsste nothwendig die vorige bleiben d. h. so grofs als das Gewicht aller Wassertheilchen, die den Raum $\alpha\beta\gamma\delta$ ausfüllen.

Würde alles äufsere Wasser rings um die Wassermasse $\alpha\beta\gamma\delta$ weggenommen, so müste letztere herabstürzen; ihre Theilchen könnten nicht mehr in Ruhe beharren, weil den Seitenpressungen aller horizontalen Schichten nichts mehr entgegen wirkte. Würde aber vor der Wegnahme des äufseren Wassers die Masse $\alpha\beta\gamma\delta$ von einer festen Röhrenwand umgeben, so müfsten die gedachten Seitenpressungen jetzt auf die feste Wand ganz so wirken, wie sie vorher auf die äufsere Wassermasse wirkten; und wenn jetzt die Festigkeit der Röhrenwand nur hinlänglichen Widerstand leisten kann, so mufs nothwendig auch noch jetzt die Wassermasse $\alpha\beta\gamma\delta$ in der gebogenen Röhre, wo α und δ einerlei Horizontalfläche berühren, in ruhigem Zustande beharren. Dieser Zustand der Ruhe ist von der Entfernung $\alpha\delta$ ganz unabhängig.

Ist also $\alpha\delta$ horizontal und die gebogene Röhre *Fig.* 56 bis zu dieser horizontalen mit Wasser angefüllt, so beharrt alles in Ruhe.

Es ist aber auch die horizontale Lage $\alpha\delta$ für das Gleichgewicht eine *nothwendige* Bedingung. Würde nämlich im Röhrenschenkel zur Rechten noch Wasser z. B. bis in ε aufgegossen, so wird der Druck des Wassers auf dieser Seite nothwendig gröfser; war also vorher das

Wasser zur Rechten mit dem zur Linken im Gleichgewicht, so kann jetzt das Gleichgewicht nicht mehr bestehen.

Es wird aber wieder hergestellt, wenn zu gleicher Zeit auch zur Linken die Röhre bis zur horizontalen $\varepsilon\zeta$ aufgefüllt wird.

Demnach sind die lothrechten Pressungen, welche das Wassersäulchen $\delta\varepsilon$ bis in $m\,n$ fortpflanzt, mit denen, welche die über $m\,n$ stehende Wassermasse auf den Querschnitt $m\,n$ ausübt, bei gleichen Höhen $\delta\varepsilon$ und $\alpha\zeta$, im Gleichgewicht. Wäre der Querschnitt bei $\delta = w$, bei $\alpha = W$, und wären $\delta\varepsilon$ und $\alpha\zeta$ lothrechte prismatische Wassersäulen, so wäre der Druck der Wassersäule $\alpha\zeta$ auf $m\,n$ offenbar $\frac{W}{w}$ mal so groſs als der Druck von $\varepsilon\delta$ auf w. Es wird also der Druck auf w durch die Fortpflanzung bis in $m\,n$, wo er das Gleichgewicht mit der Wassersäule $\alpha\zeta$ bewirkt, $\frac{W}{w}$ mal vergröſsert, wie solches auch aus der oben angegebenen allgemeinen Eigenschaft flüſsiger Massen leicht begreiflich ist. Denkt man sich nämlich in $m\,n$ oder in der Grundfläche W ein Flächenstückchen $= w$, so ist, wenn wir die Höhe $\delta\varepsilon$ mit h bezeichnen, der Druck welcher sich von δ bis zu w fortpflanzt, $=$ dem Gewicht der Wassermasse $h\,.\,w$; weil sich aber der Druck, den irgend ein Theilchen in einem horizontalen Querschnitte einer flüſsigen Masse leidet, nach allen Seiten dieses Querschnittes gleichmäſsig fortpflanzt, so leidet jedes Stückchen w in der Fläche W denselben Druck nach $\alpha\zeta$, der daher für die ganze Grundfläche $= \frac{W}{w}\,.\,hw = h\,.\,W$ wird.

Da das Gleichgewicht oder der Zustand der Ruhe immer bleibt, wenn nur $\varepsilon\zeta$ horizontal ist, so ist die Gestalt der Röhrenwand $\delta\varepsilon$ ganz gleichgültig. Bleibt $\alpha\zeta$ eine prismatische lothrechte Wassersäule über mn, und erhält nun das Röhrenstück $\delta\varepsilon$ über der Grundfläche w eine ganz andere Gestalt, so bleibt alles wie vorher, wenn nur $\varepsilon\zeta$ horizontal ist, in Ruhe. Da nun der Druck von ζ nach α auf die Fläche $W = h\,.\,W$ bleibt, so muſs der Gegendruck von α nach ζ, den die Wassermasse über δ bis in $m\,n$ fortpflanzt, auch noch wie vorher $= h\,W$, also der Druck in w noch der vorige seyn, der bei der prismatischen lothrechten Säule $= h\,.\,w$ war.

Wir können aber δ nehmen wo wir wollen, und so auch die Werthe von h und von w nach Willkühr bestimmen. Hieraus folgt allgemein:

145.) Der Druck des Wassers, das ruhig in der Höhe h über einer Horizontalfläche w steht, bleibt allemal so groſs als das Gewicht einer Wassersäule, deren kubischer Inhalt $= h\,.\,w$ wäre.

§. 122.

Im vorstehenden §. sind die Grundlehren der ganzen Hydrostatik enthalten. Alles weitere sind nur Anwendungen dieser Lehren.

Eine sehr wichtige Anwendung ergiebt sich bei Bestimmung des Drucks auf lothrechte Wände. Zur Erleichterung dieser Anwendung wollen wir auf einen besonderen Fall beim Hebel zurückgehen. kd sey eine steife gerade Linie (*Fig.* 57), die bei d mit dem Dreieck def zusammenhängt, das hier den horizontalen Querschnitt eines dreieckten Prisma vorstellen kann, so dafs wir dieses Dreieck als eine schwere Fläche betrachten können, deren Gewicht wir $= p$ setzen wollen; die bis g verlängerte kd theile die ef in zwei gleiche Theile, in k sey ein Gewicht P angehängt; das ganze System drehe sich um die horizontale Axe mn: man sucht die Bedingung des Gleichgewichts zwischen P und p.

Auflösung. Aus der Lehre vom Hebel und vom Schwerpunkte weifs man

1.) dafs man den Schwerpunkt des Dreiecks v erhält, wenn man $dv = \frac{2}{3}\,dg$ nimmt;

2.) dafs nun für das Gleichgewicht $ck \,.\, P = cv \,.\, p$ seyn müsse.

Es ist ganz dasselbe, als wäre die Summe aller einzelnen Eindrücke oder Wirkungen, welche die Fläche def leidet, und welche von d nach g in Vergleichung mit P immer gröfser werden, so wie die Entfernung der einzelnen durch die Schwere angegriffenen Punkte von der Axe mn gröfser wird, in dem Schwerpunkte v angebracht. Ebenso verhält es sich *Fig.* 58; wenn hier v der Schwerpunkt der schweren Fläche und wvz der Axe mn parallel gezogen ist, so ist es dasselbe, als wäre die Summe aller Eindrücke blos in wz vertheilt.

Mit den Pressungen des Wassers an einem lothrechten Wandstück hat es ganz dieselbe Bewandnifs. $ABCD$ *Fig.* 59 sey die vordere lothrechte Wand eines bis an die horizontale $\alpha\beta$ mit Wasser angefüllten Behältnisses, so ist der Erfolg derselbe, als lägen alle Punkte der Flächenstücke abc und $abcd$ in den Tiefen nv und mv, wo v die Schwerpunkte bezeichnet, unter der Wasserfläche $\alpha\beta$; die gedachten Flächen haben also die Pressungen

$$mv \times \text{Fläche } abcd \text{ und } nv \times \text{Fläche } abc$$

auszuhalten d. h. die Gewichte solcher Wassersäulen. Ist mv oder $nv = h$, Fläche $abcd$ oder $abc = w$, so hat man

146.) Druck auf $w = h \,.\, w$ { was immer soviel heifst als = dem Gewicht einer Wassersäule, deren kub. Inhalt $= h \,.\, w$ wäre.

Ist $opcd$ ein Rektangel mit horizontaler Grundlinie $cd = b$, so liegt der Schwerpunkt dieses Rektangels, wenn die ganze Höhe $do = H$ gesetzt wird, in der Tiefe $\frac{1}{2}H$ unter dem Wasserspiegel, die Fläche $opcd$ ist $= b \,.\, H$, also

147.) Druck auf $opcd = \frac{1}{2}H \,.\, bH = \frac{1}{2}bH^2$.

§. 123.

Nach §. 121 wird jeder unter Wasser getauchte Körper vom Wasser mit einer Kraft

aufwärts gedrückt, die so grofs ist als das Gewicht des Wassers, das durch den eingetauchten Körper aus seinem Raume verdrängt wird. Hieraus folgt:

1.) Jeder Körper, der specifisch schwerer als das Wasser ist, mufs darin, sich selbst überlassen, bis auf den Boden niedersinken.

2.) Ein Körper, der specifisch leichter als das Wasser ist, mufs, ins Wasser gelegt, mit einem Theile seiner Masse über die Oberfläche des Wassers hervorragen — er mufs schwimmen.

3.) Wenn man auf der einen Seite eines Wagbalkens statt der Wagschale einen Körper, der specifisch schwerer als das Wasser ist, an einem Faden befestigt, und nun auf der andern Seite soviel Gewicht in die Wagschale legt, dafs das Gleichgewicht hergestellt wird; dann aber den Faden mit dem Körper ins Wasser hinab hängen läfst, so kann das Gleichgewicht nur dadurch wieder hergestellt werden, dafs man nach und nach von den Gewichten in der Wagschale soviel wegnimmt, bis die Zunge wieder genau einsteht. Das weggenommene Gewicht ist dann dem Gewichte der durch den Körper verdrängten Wassermasse gleich.

Ist nun das weggenommene Gewicht $= p$, das Gewicht des Körpers $= P$, sein specifisches Gewicht $= \varphi$, so hat man

$$148.)\quad \varphi = \frac{P}{p}$$

Die Hydrostatik giebt uns also hiermit ein sehr leichtes Mittel an die Hand, das specifische Gewicht einer jeden Materie zu finden, die im Wasser untersinkt.

4.) Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht wir bestimmen wollen, specifisch leichter als das Wasser, so dafs er auf dem Wasser schwimmt, so mufs man unter ihm an demselben Faden zugleich einen specifisch schwereren anbringen, der ihn im Wasser niederzieht. Sein Gewicht sey $= \mathfrak{p}$, das des specifisch schwereren $= P$; das Gewicht, was letzterer für sich allein im Wasser untergetaucht darin verliert, $= q$; das Gewicht, was ersterer verlieren wird, jetzt aber noch unbekannt ist, $= \mathfrak{q}$; das Gewicht, was beide zusammen untergetaucht, im Wasser verlieren $= \mathfrak{Q}$, so hat man

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} - q$$

also jetzt, wenn das specifische Gewicht von $\mathfrak{p} = \varphi$ gesetzt wird,

$$149.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{Q} - q}$$

5.) Ist der specifisch leichtere Körper porös, so dafs er Wasser einsaugt, wie Holz, so wird zwar sein Gewicht $\mathfrak{p}$ wie vorher in Rechnung gebracht; man beschmiert ihn aber *nach* dem Abwägen, oder verstopft alle Poren seiner Aussenfläche mit Wachs, so dafs sein Volumen nicht vergröfsert oder die Aussenfläche nicht erhöht wird.

Aber $\mathfrak{Q}$ mufs hierbei mit Rücksicht auf das Gewicht des Wachses in Rechnung gebracht werden. Findet man nämlich das Gewicht des beschmierten Körpers mit dem Wachse $= \mathfrak{p}'$, und das Gewicht beider Körper zusammengenommen im Wasser $= Q$, so hat man jetzt $\mathfrak{Q} = P + \mathfrak{p}' - Q$, also

$$150.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{p}}{P + \mathfrak{p}' - Q - q}$$

6.) Wäre uns die Summe von den Gewichten zweier Massen (A und B) $= \mathfrak{P}$, auch das specifische Gewicht der Masse $A = \alpha$ und der $B = \beta$ gegeben, so lassen sich hieraus die Gewichte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der einzelnen Massen A, B finden.

Der Körper A verliert im Wasser ein Gewicht $= \frac{\mathfrak{A}}{\alpha}$, der B ein Gewicht $= \frac{\mathfrak{B}}{\beta}$; verlieren nun beide Massen zusammengenommen im Wasser das Gewicht $\mathfrak{Q}$, so ist

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}}{\beta}$$

oder, weil $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{P}$ seyn seyn soll,

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}}{\alpha} + \frac{\mathfrak{B}}{\beta}$$

Hieraus giebt sich $\mathfrak{B} = \dfrac{\alpha\beta \,.\, \mathfrak{Q} - \beta \,.\, \mathfrak{P}}{\alpha - \beta}$

und

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} - \frac{\alpha\beta \,.\, \mathfrak{Q} - \beta\mathfrak{P}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha\mathfrak{P} - \beta\mathfrak{P} - \alpha\beta\mathfrak{Q} + \beta\mathfrak{P}}{\alpha - \beta}$$

oder

$$151.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\mathfrak{P} - \beta\mathfrak{Q}}{\alpha - \beta} \,.\, \alpha \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{P} - \mathfrak{A} = \dfrac{\alpha\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}}{\alpha - \beta} \,.\, \beta. \end{cases}$$

7.) Sind zweierlei Materien untereinander vermischt, wie Unschlitt und Wachs, Blei und Zinn, Gold und Silber, so dafs solche in dieser Mischung eine neue Masse ausmachen, deren kleinste Theilchen aus derselben gemischten Materie bestehen, so ist der Raum, den die gemischte Materie einnimmt, gewöhnlich kleiner als die Summe der beiden Räume, welche die beiden Materien vor der Mischung zusammengenommen einnahmen, und daher in solchen Fällen die Resultate der Rechnung (No. 151.) den Resultaten der Erfahrung nicht ganz entsprechend.

§. 124.

Es liefse sich hier eine ähnliche Betrachtung zur Bestimmung der Dicke eines Dammes anstellen, wie oben §. 107. Man findet dergleichen in der *Neuen Archit. hydraul.*

von Prony §. 587 u. f. f. Statt dessen finde ich es hier zweckmäſsiger, zu erinnern, daſs eine dergleichen Anwendung hydrostatischer Lehren hier ohne allen Nutzen wäre. Die Dämme werden hauptsächlich zu Grunde gerichtet: 1) durch Einseigern des vom Damme zurückgestemmten Wassers; 2) durch anhaltendes Regenwetter; 3) durch Abspülung, besonders vom Wellenschlag; 4) durch Wechsel von Frost und Thauwetter; 5) durch Mäuse und andere schädliche Thiere; 6) durch Mangel an zweckmäſsigen Anstalten, durch die man überflüſsigem Wasser Gelegenheit zum Abflusse verschafft, so daſs es nicht genöthigt wird, über die äuſsere Dammfläche hinabzustürzen. Darum setzt man einen solchen Damm allemal aus 3 Theilen im Profil zusammen: dem mittleren parallelepipedischen $n\,o\,r\,s$ (*Fig.* 60), dem inneren Böschungsstück mns und dem äuſseren $p\,o\,r$, so daſs $m\,n$ wenigstens $= 2 \,.\, ns$, $p\,o = 3 \,.\, ns$ wird. Das mittlere Stück wird bei guten Dämmen von Letten aufgeführt; die Breite $s\,r$ hängt besonders auch davon ab, ob man über die Kappe des Dammes nur gehen, oder ob dabei auch auf Reuter oder selbst auf Fuhrwerke Rücksicht genommen werden soll? Wir werden weiter unten noch einmal auf diesen Gegenstand zurückkommen.

GRUNDLEHREN DER HYDRAULIK.

X. Kapitel.

UEBER DIE ERSCHEINUNGEN BEIM AUSFLUSSE DES WASSERS AUS GEFAESSEN ODER BEHAELTNISSEN BEI BESTIMMTEN WASSERHOEHEN, DURCH DUENNE ODER DICKE WAENDE.

§. 125.

Prony nennt die Lehre von den Erscheinungen bei der Bewegung des Wassers *Hydrodynamik*. Mir ist die Hydrodynamik überhaupt die Lehre von den mechanischen Wirkungen des Wassers, sey es im Zustande der Ruhe oder in dem der Bewegung; in Bezug auf letztere behalte ich die ältere Benennung *Hydraulik* bei. Wir werden die hierher gehörigen Lehren in mehreren nach einander folgenden Kapiteln vortragen. In diesem Kapitel ist blos von Erscheinungen die Rede, welche sich ergeben, wenn dem in einem Behältnisse eingeschlossenen Wasser durch eine Oeffnung in einer von den Wänden des Behältnisses Freiheit verschafft wird, unmittelbar in die freie Luft auszufliefsen, vorausgesetzt, dafs während dem Ausflusse der *Wasserstand* (die Höhe des Wasserspiegels über dem unteren Rande der Oeffnung oder auch über einer sonst bestimmten Stelle der Oeffnung) ungeändert bleibt.

§. 126.

ABCD (*Fig.* 61) sey die Wand eines bis zur horizontalen *mn* mit Wasser angefüllten Behältnisses, in welcher sich in verschiedenen Tiefen *ab*, *ac*, *ad* Oeffnungen befin-

den, durch die das Wasser, welches durch beständigen Zuflufs immer bis an *mn* erhalten wird, ungehindert ausfliefsen kann.

Ist nun der Querschnitt des hervorspringenden Wasserstrahls $= w$, die Geschwindigkeit der Wassertheilchen in diesem Querschnitte $= C$ und die in 1 Sekunde hervorströmende Wassermenge $= M$, so ist allgemein

$$152.)\quad M = C \,.\, w$$

Begreiflich ist C desto gröfser, je tiefer die Oeffnung unter dem Wasserspiegel liegt, in d gröfser als in b, und selbst für die Wassertheilchen im unteren Theile der Oeffnung gröfser als für die im oberen Theile. Wenn inzwischen die Höhe der Oeffnung bedeutend kleiner ist, als die Tiefe, in der ihre höchste Stelle unter dem Wasserspiegel liegt, so kann man die Geschwindigkeit in ihrem Schwerpunkte, welcher der Mittelpunkt des Wasserdrucks ist, als die mittlere Geschwindigheit aller Wassertheilchen in der Oeffnung ansehen. Wenn wir aber auch vor der Hand bei dieser Voraussetzung stehen bleiben, so bedarf es noch einer näheren Untersuchung, wie die Geschwindigkeit C von der Wasserhöhe, der Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkte der Oeffnung, abhänge?

Selbst die Bestimmung des Querschnittes w verdient unsere Aufmerksamkeit, indem sich bei wirklichem Ausflusse leicht beobachten läfst, dafs sich die Wassertheilchen beim Einströmen in die Oeffnung einen trichterförmigen Kanal bilden, dessen Querschnitt beim Eintritt in die Oeffnung allemal kleiner ist als die Oeffnungsfläche. Wir bezeichnen daher in der Folge

die Gröfse der Oeffnungsfläche mit α
den Querschnitt des *einströmenden* Wassers mit w
die Wasserhöhe über dem Schwerpunkte der Oeffnungsfläche gewöhnlich mit H
die mittlere Geschwindigkeit der in die Oeffnung einströmenden Wassertheilchen mit C
die in jeder Sekunde ausfliefsende Wassermenge mit M
die Höhe der Oeffnung d. h. der höchsten Stelle der Oeffnung über der tiefsten mit h

und lassen zuerst die Voraussetzung gelten, dafs $\frac{h}{H}$ ein etwas kleiner Bruch, etwa nicht gröfser als $\frac{1}{4}$ sey.

Ich erinnere dabei zum voraus, dafs in Untersuchungen der Art nie sehr scharfe Resultate erwartet werden dürfen, wie in der reinen Mathematik oder in der Astronomie, und dafs wir es ebendarum mit angehängten Decimalbrüchen nicht so genau nehmen werden. Wir werden z. B. statt 20,78 oft schlechthin 21; statt $g = 15{,}09$ Par. Fufs, nach Verschiedenheit der Umstände, bald $g = 15{,}1$ bald $g = 15$ setzen.

§. 127.

Ueber dem Boden $\varepsilon\gamma$ (*Fig.* 62) sey auf einem Gestelle ein bis an m mit Wasser angefülltes Behältniſs niedergesetzt, das in einer dünnen Wand mit einer Oeffnung α versehen sey, aus welchem bei beständigem Zuflusse, der die Wasserhöhe αm unverändert erhält, der Strahl $\alpha\beta\gamma$ hervorspringt.

Weil nun die aus α nach der horizontalen $\alpha\eta$ hervorspringenden Wassertheilchen von der Schwere niedergetrieben werden, so müssen sie in einer bestimmten Zeit t durch die Tiefe $\eta\gamma$ herabfallen. Setzen wir nun $\eta\gamma = \alpha\delta = \mathfrak{h}$, so hat man $t = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{g}}$. Die Geschwindigkeit, mit der die Wassertheilchen die Oeffnung α nach der Richtung $\alpha\eta$ verlassen, sey nun $= C$, so müssen solche in der Zeit t einen Weg $\delta\gamma$ durchlaufen, der $= t \,.\, C$ ist; bezeichnen wir also diesen Weg mit $\mathfrak{b}$, so muſs

$$\mathfrak{b} = t \,.\, C = C \,.\, \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{g}} \text{ seyn; also } C = \mathfrak{b} \,.\, \sqrt{\frac{g}{\mathfrak{h}}}$$

Die zu dieser Geschwindigkeit gehörige Fallhöhe ist $\frac{C^2}{4g} = \frac{\mathfrak{b}^2 \,.\, g}{4g\mathfrak{h}} = \frac{\mathfrak{b}^2}{4\mathfrak{h}}$. Beobachtungen ergeben nun, daſs die hiernach berechnete Höhe allemal in gedachtem Falle sehr genau mit der Wasserhöhe $m\alpha$ einerlei ist. Ist also $m\alpha = H$, so hat man hier

$$153.) \quad C = 2\sqrt{g\,H}.$$

Man kann nun die unter diesen Umständen z. B. in 30 Sekunden auslaufende Wassermenge $\mathfrak{M}$ in einer Kufe auffangen und genau messen, woraus sich dann für 1 Sekunde die Ausfluſsmenge $M = \frac{\mathfrak{M}}{30}$ ergiebt.

Wenn wir aber den Querschnitt des in die Oeffnung α einströmenden Wassers mit w bezeichnen, so ist auch allemal $M = C \,.\, w$ (No. 152.) $= 2\,w \,.\, \sqrt{g\,H}$; daher

$$2\,w \,.\, \sqrt{g\,H} = \frac{\mathfrak{M}}{30} \text{ und } w = \frac{\mathfrak{M}}{60 \,.\, \sqrt{g H}}.$$

Italienische und französische Schriftsteller haben nun bei Oeffnungen, die nur wenige Linien im Durchmesser hatten, dergleichen Beobachtungen angestellt, nach welchen $\frac{\mathfrak{M}}{60 \,.\, \sqrt{g\,H}}$ nur $= 0{,}62 \,.\, \alpha$ angenommen werden kann, was also

$$154.) \quad w = 0{,}62 \,.\, \alpha$$

für Oeffnungen in dünnen Wänden giebt.

Ich hatte Gelegenheit, diese Oeffnungen bis zu 24 Pariser Linien zu erweitern, und die dabei von mir angestellten Beobachtungen, die ich in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* beschrieben habe, bestätigen die Richtigkeit von No. 154.

§. 128.

Aehnliche Beobachtungen bei Oeffnungen in *dicken* Wänden oder auch bei angebrachten kurzen Ansatzröhren gaben ganz andere Resultate. Das Wasser fliefst bei solchen in einem Strahle heraus, der die ganze Ausflufsöffnung beim Herausströmen ausfüllt, dessen Querschnitt also $= \alpha$ ist.

Dennoch findet man dabei

nicht $M = \alpha \,.\, 2 \sqrt{g\, H}$ sondern $= 0{,}81 \,.\, \alpha \,.\, 2 \sqrt{g\, H}$

Da nun, wenn C' die Geschwindigkeit der Wassertheilchen beim Ausflusse bezeichnet, wo sie die ganze Oeffnungsweite ausfüllen, nothwendig $M = C' \,.\, \alpha$ seyn mufs, so folgt, dafs *für Oeffnungen in dicken Wänden, oder auch bei kurzen Ansatzröhren* die Geschwindigkeit beim *Ausflusse*

155.) $C' = 0{,}81 \,.\, 2 \sqrt{g\, H}$

seyn müsse, oder auch 156.) $C' = 2 \,.\, \sqrt{g \,.\, 0{,}656 \,.\, H}$

Da aber der Koëfficient 0,81, wie wir noch sehen werden, auch etwas weniges gröfser genommen werden kann, und überhaupt hier keine völlig scharfe Resultate Statt haben, so kann man auch

157.) $C' = 2 \,.\, \sqrt{g \,.\, \tfrac{2}{3} H}$

setzen, so dafs die Geschwindigkeitshöhe beim Ausflusse $\tfrac{2}{3}$ der Druckhöhe beträgt, und es wird

$$M = 0{,}81 \,.\, \alpha \,.\, 2 \sqrt{g\, H} \text{ genau genug } = \alpha \,.\, 2 \sqrt{g \,.\, \tfrac{2}{3} H}.$$

Die Geschwindigkeit beim Eintritt in die Oeffnung ist nothwendig

$$C = \frac{\alpha}{w} \,.\, C' = \frac{\alpha}{w} \,.\, 0{,}81 \,.\, 2 \sqrt{g\, H}$$

und $$w = 0{,}81 \,.\, \alpha \,.\, \frac{2 \sqrt{g\, H}}{C}$$

oder 158.) $w = 0{,}81 \,.\, \alpha$

§. 129.

Man sieht, dafs es bei allen Angaben der vorstehenden §§. noch an näherer Bestimmtheit fehlt, indem noch die Frage übrig bleibt, bei welchem Verhältnisse der Wanddicke zum Durchmesser der Oeffnung die Wand für eine *dünne* oder für eine *dicke* gelten könne.

Wenn bei einem Durchmesser von 3 Linien die Wanddicke nur $\tfrac{1}{2}$ Linie beträgt, so ist man freilich gewifs, die Wand als eine dünne betrachten zu dürfen. Wird nun aber die Wand nach und nach immer dicker genommen, so wird der Koëfficient 0,62 nicht plötzlich in den 0,81 übergehen, sondern vorher durch alle mögliche Werthe 0,63; 0,64;

0,65 bis zu 0,81 fortschreiten. Ich stellte daher im Jahre 1815 eigene Versuche hierüber an.

Dabei zeigte sich nun ein Uebergang von besonderer Art. Bis zu einer gewissen Wanddicke blieb die Ausflufsmenge $M = 0{,}62\ \alpha\ .\ 2\sqrt{g\ H}$. Dann aber fieng bei fernerer Vergröfserung der Wanddicke das Wasser an, mit wechselnder Bewegung hervor zu springen, so dafs es nur zuweilen die ganze Ausflufsöffnung ausfüllte, in den Zwischenzeiten aber ganz isolirt, ohne den Rand der Oeffnung zu berühren, hervorsprang, da dann für eine Minute die Ausflufsmenge schon etwas gröfser als $60\,.\,(0{,}62\,.\,\alpha\,.\,2\sqrt{g\,H})$ wurde.

Mit fernerer Vergröfserung der Wanddicke wurden diese Zwischenzeiten immer kleiner, bis allmählig die Ausfüllung der ganzen Ausflufsöffnung vorherrschend wurde und der Strahl nur noch *zuweilen* sich von dem Rande der Oeffnung losrifs und isolirt hervorsprang.

So folgte dann endlich eine Wanddicke, bei welcher der Strahl ohne ferneren Wechsel beständig fort die ganze Oeffnung ausfüllte.

Der Uebergang aus der Eigenschaft einer dünnen Wand in die einer dicken erfolgt demnach so, dafs beide Eigenschaften, solang noch nicht eine von ihnen durch die verhältnifsmäfsige Wanddicke völlig bestimmt ist, als wirkend abwechseln. Wie lange dabei die eine oder die andere jedesmal fortwirkt, ist, wenigstens nach meinen Versuchen, sehr zufällig, so dafs sich die in einer bestimmten Zeit ausfliefsende Wassermenge alsdann gar nicht zum voraus angeben läfst.

Ich liefs 5 verschiedene Platten von Messing machen, die von verschiedener Dicke und in ihrer Mitte durchbohrt waren.

Dabei hatte ich einen Wasserkasten zu 145 Q. Zoll weit. Dieser Kasten hatte in einer seiner Wände eine ausgeschnittene Oeffnung, vor der ich jede der gedachten durchlochten Platten anlegen und festschrauben konnte.

Die Wasserhöhe im Kasten wurde über der Mitte der kreisrunden Oeffnung der vorgeschobenen Platte beständig auf 26 Par. Zolle erhalten.

Jeder Versuch dauerte 2 Minuten oder 120 Sekunden. Die Zeit wurde nach einem Sekundenpendel beobachtet.

Bis jetzt habe ich nur erst Versuche mit 2 Platten mit Genauigkeit angestellt.

1.) *Bei der Platte No. I.* war in Par. Maafs

Oeffnungsdurchmesser . $= 3\frac{2}{7}$ Linien

Oeffnungsfläche $= 8{,}523$ Q. L. $= 0{,}0592$ Q. Z.

Dicke der Platte . $= 3$ Linien

2.) *Bei der Platte No. II.*

Oeffnungsdurchmesser . $= 3\frac{1}{4}$ Linien

Oeffnungsfläche $= 8{,}291$ Q. L. $= 0{,}0576$ Q. Z.

Dicke der Platte . $= 4$ Linien

Die Koëfficienten (die oben zu 0,62 und zu 0,81 angegeben wurden) bezeichne ich allgemein mit γ, und nenne γ den *Zusammenziehungskoëfficient.*

Ohne Zusammenziehung, die allemal beim Einfluſs des Wassers in die Oeffnung erfolgt, hat man in 120 Sekunden.

theoretische Ausfluſsmengen { für die Platte No. I. = 975 K. Zolle.
für die Platte No. II. = 948 — —

Die Resultate der Versuche waren folgende:

Mit der Platte No. I. erhielt man

Beim I. Versuche in 120 Sekunden	604 Kub. Zoll,	also $\gamma = \frac{604}{975}$	= 0,620
II. — — — —	689 — — —	$\gamma = \frac{689}{975}$	= 0,706
III. — — — —	749 — — —	$\gamma = \frac{749}{975}$	= 0,768
IV. — — — —	773 — — —	$\gamma = \frac{773}{975}$	= 0,793
V. — — — —	791 — — —	$\gamma = \frac{791}{975}$	= 0,811
VI. — — — —	634 — — —	$\gamma = \frac{634}{975}$	= 0,650
VII. — — — —	773 — — —	$\gamma = \frac{773}{975}$	= 0,793
VIII. — — — —	773 — — —	$\gamma = \frac{773}{975}$	= 0,793

Mit der Platte No. II.

Beim I. Versuche in 120 Sekunden	822 Kub. Zoll,	also $\gamma = \frac{822}{948}$	= 0,865
II. — — — —	797 — — —	$\gamma = \frac{797}{948}$	= 0,841
III. — — — —	816 — — —	$\gamma = \frac{816}{948}$	= 0,861
IV. — — — —	810 — — —	$\gamma = \frac{810}{948}$	= 0,854

Ich muſs hierbei bemerken, daſs die Messungen und die Art der Vollerhaltung allerdings einen Fehler von 0,015 im Werthe von γ, mehr oder weniger, zulieſsen. Es wäre also wohl möglich, daſs z. B. beim ersten Versuche mit der Platte No II. γ nur = 0,854, hingegen beim zweiten γ gleichfalls = 0,854 gewesen wäre, wie beim vierten. Ich vermuthe, daſs die Verschiedenheit der mit der Platte No. II. gefundenen Werthe von γ ganz auf diesem Umstande beruht. Das arithmetische Mittel aus den 4 Versuchen mit dieser Platte ist $\gamma = 0,855$, wofür dann in der Ausübung ohne Bedenken $\gamma = 0,85$ beibehalten werden könnte, wenn bei einem Oeffnungsdurchmesser von $3\frac{1}{4}$ Linien die Dicke der Platte = 4 Linien wäre.

In solchen Fällen scheint das Maximum von γ einzutreten, das dann um $\frac{1}{20}$ gröſser wäre als 0,81.

Bei den Versuchen mit der Platte No. I., wo die Dicke der Platte $\frac{2}{3}\frac{1}{3}$ vom Durchmesser der Oeffnung beträgt, scheint der erste Versuch ganz weggenommen werden zu müssen. Die übrigen 7 geben als arithmetisches Mittel für 7 . 120 oder 840 Sekunden $\gamma = 0,76$.

Wir werden also für die Ausübung festsetzen dürfen

1.) Wenn sich die Wanddicke zum Durchmesser der Oeffnung wie 11 zu 12 verhält, so darf man mit Sicherheit $\gamma = \frac{3}{4}$ setzen, oder = 0,75.

2.) Wenn sich die Wanddicke zum Durchmesser wie 15 zu 12 verhält, so könnte man $\gamma = 0{,}85$ nehmen. Ich nehme aber zur Sicherheit für Berechnungen im Grofsen, in Ermangelung mehrerer dahingehöriger Beobachtungen, nie $\gamma > 0{,}81$.

3.) Da bei der Abnahme des Verhältnisses $\frac{15}{12}$ bis zu $\frac{11}{12}$ der Werth des Koëfficienten γ von 0,85 bis zu 0,75, wenigstens bis zu 0,76 herabfällt, so ist kein Zweifel, dafs bei der Abnahme jener Verhältnifszahl bis zu $\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$ schon die Eigenschaft einer dünnen Wand also $\gamma = 0{,}62$ vollständig eingetreten seyn müsse. Zur gröfstmöglichen Sicherheit wollen wir für diesen Erfolg die Bedingung festsetzen, dafs $\gamma = 0{,}62$ werde, wenn die Dicke der Wand nicht über $\frac{1}{5}$ vom Durchmesser der Oeffnung betrage.

4.) Mit gleicher Sicherheit nehmen wir an, dafs die Wirkung einer dicken Wand eintrete, wenn der Durchmesser der Oeffnung nicht über $\frac{12}{14}$ oder $\frac{6}{7}$ von der Wanddicke beträgt.

Was hier von der Wanddicke gesagt worden, gilt auf gleiche Weise von der Länge angebrachter Ansatzröhren.

§. 130.

Wir wollen den durch die Zusammenziehung des Wasserquerschnitts verloren gehenden Theil des ganzen Querschnitts α durch $k \,.\, \alpha$ ausdrücken, so ist $k = 1 - \gamma$, oder $\gamma = 1 - k$, wo dann für Oeffnungen in dünnen Platten $k = 0{,}38$
in dicken Wänden $= 0{,}19$
gesetzt worden ist.

Diese Werthe von k gelten aber nur unter der Voraussetzung, dafs die Ausflufsöffnung in Vergleichung mit der Wandfläche, in der sie angebracht ist, sehr klein sey, und dafs ihr oberer Rand tief genug unter dem Wasserspiegel liege (s. §. 135).

Beträgt z. B. die Oeffnung α (*Fig.* 63) nur $\frac{1}{20}$ von der Fläche der Platte $\delta\,\varepsilon$, so wird man immer noch genau genug $k = 0{,}38$ setzen können. Wird aber die Oeffnung α nach und nach bis in ε und δ erweitert, so mufs die Zusammenziehung endlich ganz verschwinden, also ihre Gröfse immer abnehmen, je näher $\frac{\alpha}{W}$ der 1 kommt, wenn wir die ganze Wandfläche von δ bis $\varepsilon = W$ setzen. *) Wir sind genöthigt, diese mit der Vergröfserung von $\frac{\alpha}{W}$ verbundene Abnahme des Werthes von k hypothetisch auszudrükken; ich setze zu dem Ende

$$159.)\quad k = m \,.\, \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

*) In Bezug auf die Bestimmung von W s. §. 136.

wo m ein Faktor seyn mufs, der diesen Ausdruck für einen sehr kleinen Werth von $\frac{\alpha}{W}$ bei dünnen Wänden in $k = 0{,}38$, und für $\frac{\alpha}{W} = 1$ in $k = 0$, bei dicken Wänden aber denselben Ausdruck für einen sehr kleinen Werth von $\frac{\alpha}{W}$ in $k = 0{,}19$, und für $\frac{\alpha}{W} = 1$ wie vorher in 0 verwandelt. Setzt man nun 0,38 statt k, und 0 (Null) statt $\frac{\alpha}{W}$, so wird

$$0{,}38 = m \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2-0)}}\right) = m \cdot 0{,}293; \text{ also } m = 1{,}3$$

Setzt man 0,19 statt k, und $\frac{\alpha}{W} = 0$, so wird

$$0{,}19 = m \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = m \cdot 0{,}293; \text{ also } m = 0{,}65$$

Daher 160.) *für dünne Platten* $k = 1{,}3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$

161.) *für dicke Wände* $k = 0{,}65 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$

Beide Werthe von k werden, für $\alpha = W$, $= o$, wie es seyn soll. In jedem Falle ist dann $\gamma = 1 - k$, und die in jeder Sekunde ausfliefsende Wassermenge

162.) $M = \gamma\alpha \cdot 2\sqrt{gH}$

Zur Erleichterung hierher gehöriger Berechnungen habe ich die nachstehende Tafel berechnet.

Werthe von $\frac{\alpha}{W}$	Für Oeffnungen in dünnen Platten Werthe von k.	Für Oeffnungen in dicken Wänden oder für kurze Ansatzröhren Werthe von k.
(< 0,01)	0,380	0,190
0,01	0,376	0,188
0,05	0,367	0,183
0,10	0,355	0,177
0,20	0,329	0,164
0,30	0,301	0,150
0,40	0,271	0,135
0,45	0,254	0,127
0,50	0,237	0,118
0,55	0,219	0,109
0,60	0,200	0,100

Werthe von $\frac{\alpha}{W}$	Für Oeffnungen in dünnen Platten Werthe von k.	Für Oeffnungen in dicken Wänden oder für kurze Ansatzröhren Werthe von k.
0,65	0,180	0,090
0,70	0,159	0,079
0,75	0,136	0,068
0,80	0,112	0,056
0,85	0,087	0,043
0,90	0,060	0,030
0,95	0,030	0,015
1,00	0,000	0,000

§. 131.

Es versteht sich, daſs die vorstehenden Zahlen nicht als völlig scharfe Bestimmungen angesehen werden sollen, sondern nur als solche, die in der Ausübung als hinlänglich genau gelten können, so daſs die Formel No. 162. die Ausfluſsmenge hinlänglich genau giebt, wenn man H oder die Druckhöhe so nimmt, wie sie der mittleren Geschwindigkeit der ausströmenden Wassertheilchen zugehört. Bei Oeffnungen in einem *horizontalen* Boden ist die Druckhöhe für alle ausströmende Wassertheilchen gleich groſs, nämlich = der Höhe des Wasserspiegels H über dem unteren Rande der Oeffnung, also in diesem Falle No. 162. geradezu anwendbar.

§. 132.

Bei einer Oeffnung in einer lothrechten Wand verhält sich die Sache ganz anders, weil die Wassertheilchen eine desto geringere Geschwindigkeit haben, je näher sie dem oberen Rande der Oeffnung liegen.

Es sey $CDEF$ (*Fig.* 65) ein Stück einer lothrechten Wand, in der sich ein Ausschnitt $xyst$ befindet; das Behältniſs werde bis an die horizontale AB beständig mit Wasser angefüllt erhalten, daſs also das Wasser, die Zusammenziehung bei Seite gesetzt, in dem Querschnitte $mnst$ hervorströmt; ist nun $mt = H$, $ts = \beta$, so ist die mittlere Geschwindigkeit $= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{gH}$, und, wenn wir die in jeder Sekunde ausflieſsende Wassermenge mit M' bezeichnen, ohne Rücksicht auf Zusammenziehung

$$163.)\quad M' = H \cdot \beta \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt{gH} \quad *)$$

*) Die Differentialrechnung führt leicht und schnell zu diesem Satze. Es sey ein auf $a\beta$ willkührlich genommenes Stück $ab = x$, Fläche $muvn = w = \beta \cdot x$; $bc = dx$, also $dw = \beta \cdot dx$; die durch w abflieſsende Wassermenge $= y$, also $dy = C \cdot dw = C \cdot \beta \cdot dx = (2\sqrt{gx}) \cdot \beta \cdot dx = 2\beta \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$, so erhält man sogleich vollständig $y = 2\beta \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$. Setzt man also $x = a\beta = H$, so wird y oder hier $M' = 2\beta \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot H \cdot H^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot H\beta \cdot 2\sqrt{gH}$.

also mit Rücksicht auf die Zusammenziehung

164.) $M' = \gamma \,.\, \frac{4}{3} \,.\, H\beta \,.\, \sqrt{g\,H}$

§. 133.

Christian hat in seinem Traité de Mécanique industrielle T. I. pag. 349. nachstehende von ihm angestellte Versuche mitgetheilt, bei welchen das Wasser durch einen Einschnitt über eine dünne Wand frei hinabstürzte:

Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflufsmenge in jeder Sekunde.	Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflufsmenge in jeder Sekunde.	Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflufsmenge in jeder Sekunde.
8 Centim.		5 Centim.		2 Centim.	
8	34,615	5	16,666	2	3,846
8	Kilogr.	5	Kilogr.	2	Kilogr.
8		5		2	
7		4		1	
7	28,125	4	11,538	1	1,271
7		4		1	
				1	
6		3			
6	22,500	3	7,258		
6		3			
		3			

Man sieht dafs jedesmal bei einerlei Wasserhöhe mehrere Beobachtungen angestellt wurden, für welche dann aus den Resultaten für die Abflufsmenge allemal das arithmetische Mittel genommen wurde.

Bei diesen Versuchen war die gröfste Wasserhöhe im Einschnitte $H = 0{,}08$ Meter $= 0{,}24624$ Par. Fufs; $\beta = 0{,}8$ Meter $= 2{,}4624'$; also $\beta H = 0{,}6063$ Q. Fufs. Es ist ferner 1 Kilogr. = 2,136 Cölln. ℔, also 34,615 Kilogr. = 34,615 . 2,136 = 73,938 ℔. Der Pariser Kubikfufs Wasser wiegt 73,28 Cölln. ℔. Weil sich aber in Untersuchungen der Art keine Genauigkeit bis auf $\frac{1}{100}$ des Ganzen erwarten läfst, so können wir hier die Ausflufsmenge bei 8 Centimeter Wasserhöhe für 1 Sekunde geradezu = 1 Par. Kubikfufs setzen.

Den Werth von γ, zu dessen Bestimmung der Verfasser nicht alle Abmessungen angegeben hat, setze ich hier $= 0{,}7$; dieses giebt nach No. 164.

$$M' = 0{,}7 \,.\, \tfrac{4}{3} \,.\, 0{,}6063 \,.\, \sqrt{15{,}1 \,.\, 0{,}24624} = 1{,}09 \text{ Kubikfufs.}$$

Die Beobachtung gab aber nur 1 Kubikfufs. Es betrug also die

165.) beobachtete Ausflufsmenge nur beiläufig $\frac{9}{10}$ von der nach No. 164 berechneten.

§. 134.

Es sey in dem bis an *AB* mit Wasser angefüllten Behältnisse (*Fig.* 64) die rektangel-

förmige Oeffnung $qrst$ in der lothrechten Wand angebracht; $a\alpha = \mathfrak{h}$, $a\beta = H$, $ts = \beta$, die in 1 Sekunde abfliefsende Wassermenge $= M$, so wäre (nach No. 164.)

166.) $M = \gamma \cdot \frac{4}{3} \cdot H\beta \cdot \sqrt{gH} - \gamma \cdot \frac{4}{3} \cdot \mathfrak{h}\beta \cdot \sqrt{g\mathfrak{h}} = (\gamma \cdot \frac{4}{3}\beta\sqrt{g}) \cdot (H \cdot \sqrt{H} - \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{h}})$.

Ist $\mathfrak{h} = 0$, so müfste zur Berichtigung dieser Werth nach (No. 165.) noch mit 0,9 multiplicirt werden; aber aus dem vorhergehenden Vortrage wissen wir schon, dafs das Resultat von No. 166 der Erfahrung sehr gut entspricht, wenn $\mathfrak{h}$ schon einen nur etwas bedeutenden Theil von H (z. B. nur $\frac{1}{2}$ H) ausmacht. Der Verminderungskoëfficient 0,9 kann also nicht für diese Anwendung gelten, und es ist klar, dafs er von $\frac{\mathfrak{h}}{H}$ abhängen mufs; auch habe ich gefunden, dafs man ihn in der Ausübung, γ richtig angenommen, $= 0,85$ statt 0,9 setzen kann, so dafs er sich für $\mathfrak{h} = 0$ in 0,85 verwandelt, hingegen für den Fall, wo $\frac{\mathfrak{h}}{H}$ nicht viel von 1 verschieden ist, sehr nahe $= 1$ wird. Hiermit gelangen wir zu der Formel für den Absturz über eine dünne Wand

167.) $M = \left(0,85 + 0,15\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}}\right) \cdot (\gamma \cdot \frac{4}{3} \cdot \beta\sqrt{g}) \cdot (H \cdot \sqrt{H} - \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{h}})$

Ist z. B. $\frac{\mathfrak{h}}{H} = \frac{1}{4}$, so wird $M = 0,9 \cdot (\gamma\beta\,\frac{4}{3}\sqrt{g}) \cdot (H \cdot \sqrt{H} - \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{h}})$.

Der Ausflufs durch die kreisförmige Oeffnung (*Fig.* 65), wo der Wasserspiegel in AB liegt, läfst sich ohne Bedenken so annehmen, wie er durch das Rektangel $qrst$ erfolgen würde, das den Kreis in u und v berührt, und dessen Flächeninhalt $= 0,785 \cdot D^2$ wäre, wenn wir $uv = D$ setzen.

Es ist also $\delta\beta = 0,785 \cdot \alpha c = 0,785 \cdot D$; $\alpha d + \beta c = 0,215 \cdot D$; $\alpha d = \frac{0,215}{2} \cdot D = 0,107 \cdot D$; setzen wir $a\alpha = \mathfrak{h}'$, so wird hier ad oder $\mathfrak{h} = a\alpha + \alpha d = \mathfrak{h}' + 0,107 \cdot D$; $a\beta$ oder $H = ad + d\beta = \mathfrak{h}' + 0,107 \cdot D + 0,785 \cdot D = \mathfrak{h}' + 0,892 \cdot D$.

Man erhält also den

Ausflufs durch den Kreis, wenn man in No. 167 D statt β, $\mathfrak{h}' + 0,107 \cdot D$ statt $\mathfrak{h}$, und $\mathfrak{h}' + 0,892 \cdot D$ statt H schreibt.

§. 135.

Bossüt machte nachstehende Erfahrung bei einer kreisrunden Oeffnung in einer dünnen Platte.

Es war $\mathfrak{h}' = 1'''$, $D = \beta = 12'''$, also $\mathfrak{h} = 1 + 0,107 \cdot 12 = 2,284'''$ und $H = 1 + 0,892 \cdot 12 = 11,704'''$; $g = 15,09' = 181,08'' = 2172,96'''$ also $\sqrt{g} = 46,6$; $\sqrt{H} = 3,42$; $\sqrt{\mathfrak{h}} = 1,51$; $\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}} = 0,44$; daher (nach No. 167)

$M = 0,916 \cdot \gamma \cdot \frac{4}{3} \cdot 12 \cdot 46,6 \cdot (40,028 - 4,355) = 24364 \cdot \gamma$ Kub. Linien $= \gamma \cdot 14,1$ Kub. Zoll.

Nun fand *Bossüt* (Hydrod. II. B. S. 31.) für 1 Minute 628 also für 1 Sekunde 10,47 Kub. Zoll. Hiernach wäre also $\gamma = \frac{10{,}47}{14{,}10} = 0{,}74$, und man würde bedeutend zu wenig finden, wenn man $\gamma = 0{,}62$ setzen wollte.

Ich habe bei mehreren Vergleichungen immer gefunden, daſs mit Abnahme der Geschwindigkeit (d. h. der mittleren c) der Werth von γ, zunimmt, was bei sehr langsamer Bewegung des Wassers sehr bedeutend und daher durchaus nicht ausser Acht gelassen werden kann, was man auch in Bezug auf Einfachheit der Ausdrücke für die Ausübung fordern mag. In dieser Hinsicht bleibt die Formel No. 167 für die Ausübung allgemein genügend, wenn man bemerkt, daſs

$$168.)\quad \gamma = 1 - \frac{c}{c + 0{,}4} \cdot k$$

gesetzt werden müsse, wenn c die in Fuſsen ausgedrückte mittlere Geschwindigkeit des ausflieſsenden Wassers bezeichnet. Zur Bestimmung dieses Werthes von γ ist es hinlänglich,

$$\text{bei dünnen Wänden } c = 2 \cdot \sqrt{g\,(\mathfrak{h} + \tfrac{4}{9} h)}$$

$$\text{— dicken — — } c = \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt{g\,(\mathfrak{h} + \tfrac{4}{9} h)}$$

zu nehmen, wenn h die Wasserhöhe von der obersten Stelle der Oeffnung bis zum Schwerpunkte der Oeffnungsfläche bezeichnet.

Ex. Nehmen wir aus der Tafel (§. 133) $H = 0{,}02$ Meter $= 0{,}06156'$, $\beta = 0{,}8$ Meter $= 2{,}4624'$, so war die Ausfluſsmenge für 1 Sekunde $= 3{,}846$ Kilogr. $= 8{,}215$ Cölln. ℔ $= \frac{8{,}215}{73{,}280}$ Par. Kubikfuſs $= 0{,}112$ Kubikfuſs. Dabei war $\mathfrak{h} = 0$, also $c = 2\sqrt{15 \cdot \tfrac{4}{9} \cdot 0{,}06156}$ $= \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt{0{,}92340} = 1{,}28'$; nehmen wir nun $k = 0{,}38$; so wird $\gamma = 1 - \frac{1{,}28}{1{,}68} \cdot 0{,}38 = 0{,}71$.

Hier ist nun $\mathfrak{h} = 0$, also

$$M = 0{,}85 \cdot 0{,}71 \cdot 2{,}462 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot (\sqrt{15{,}09}) \cdot 0{,}06156 \cdot \sqrt{0{,}06156} = 7{,}679 \cdot 0{,}0153 = 0{,}117 \text{ Kubikfuſs.}$$

Das Resultat der Beobachtung gab 0,112 Kubikfuſs.

§. 136.

Hier war nur noch von einer dünnen Wand die Rede, über die das Wasser bei den Versuchen (§. 133) wegstürzte. Derselbe Beobachter lieſs nun auch bei demselben Behältnisse an demselben Einschnitte, dessen Breite $= 2{,}4624'$ war, ein 3 Fuſs langes Gerinne mit horizontalem Boden anbringen, und erhielt folgendes:

Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflußmenge in jeder Sekunde.	Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflußmenge in jeder Sekunde.	Höhe des Wasserspiegels über dem untern Rande des Einschnitts.	Ausflußmenge in jeder Sekunde.
8 Centimeter.		4 Centimeter.		2 Centimeter.	
8		4		2	
8	32,142 Kilogr.	4		2	
8		4	11,538 Kilogr.	2	3,813 Kilogr.
8		4		2	
6	21,428.	4		2	
6		4			
5		4		1	
5	16,666.			1	1,243.
5					

Statt 34,615 Kilogr. (§. 133) erhielt man jetzt bei 0,08 Meter Wasserhöhe nur 32,142 Kilogr. oder etwa $\frac{1}{13}$ weniger.

Diese Verminderung der Abflußmenge ist der Bodenfläche und den Seitenwänden zuzuschreiben. Der Unterschied ist bedeutend und kann nicht ausser Acht gelassen werden. Wie aber diese Verminderung sich ändern würde, wenn die Länge des Bodens 4 = 6 = 8 = 12 Fuße betrüge, oder nur $\frac{1}{2}'$, $1'$, $2'$ können wir nicht angeben. Wir wollen deßhalb die verminderte Ausflußmenge nicht durch $\frac{12}{13}\,M$ ausdrücken, sondern durch $\left(1 - \left(\sqrt{\frac{\delta}{3}}\right) \cdot \frac{1}{13}\right) . M$ wo δ die Länge des Wegs, über welchen das Wasser laufen muſs, um bis zum freien Absturze zu gelangen, in Fuſsen bezeichnet.

Es kommen die Abflußmengen bei einerlei Wasserhöhe in beiden Fällen (ohne und mit Gerinne) einander desto näher, je geringer die Höhe ist, wovon die größte hier 0,08 Meter oder sehr nahe $\frac{1}{4}$, die kleinste nur $\frac{1}{32}$ Fuſs beträgt. Wahrscheinlich wird aber auch bei fernerer Vergröſserung der Wasserhöhe bei dem 3′ langen Gerinne die Ausflußmenge nicht mehr merklich unter $\frac{12}{13} . M$ herabfallen, wenn M nach obiger Formel berechnet wird. Bei *diesen* Berechnungen kann man übrigens eben so gut rheinl. als Par. Fuſse gebrauchen. Hiernach erhalten wir dann den sehr allgemeinen Ausdruck.

$$169.)\quad M = \left(1 - \frac{1}{13} . \sqrt{\frac{\delta}{3}}\right) . \left(0{,}85 + 0{,}15 . \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}}\right) . \left(\tfrac{2}{3}\gamma\beta\sqrt{g}\right) . \left(H\sqrt{H} - \mathfrak{h}\sqrt{\mathfrak{h}}\right)$$

wo sich alles auf Fuſse bezieht, und δ nicht über 27 Fuſse betragen darf, so daſs $1 - \frac{1}{13} . \sqrt{\frac{\delta}{3}}$ nicht kleiner als $\frac{10}{13}$ wird.

Für *Ueberfallwehre* (oder überhaupt für Oeffnungen, durch welche der Wasserspiegel des Behältnisses selbst durchgeht) wird $\mathfrak{h} = 0$, also

$$170.)\quad M = \left(1 - \frac{1}{13} . \sqrt{\frac{\delta}{3}}\right) . 0{,}85 . \tfrac{2}{3} . \gamma . \beta . H . \sqrt{g\,H}$$

Dabei wird γ nach No. 168 genommen, und k bei Ueberfallwehren wie für Oeffnungen in dünnen Platten; nur bemerke ich noch, daſs ich die Wandfläche W (§. 130) dadurch bestimme, daſs ich durch die tiefste Stelle der Oeffnung eine horizontale Linie ziehe, über welcher dann das Wandstück W abgeschnitten wird. Aber wegen der Bestimmung von H können angehende Ingenieurs hierbei noch in Verlegenheit kommen; sie werden zu wissen verlangen, wie ich mich hierbei verhalte? Ich habe gefunden, daſs sich der merkbare Abhang des Spiegels gegen die Oeffnung nicht über eine Stelle verbreitet, die über 3 . β von der Oeffnung entfernt ist. Ich nehme daher für H die Höhe, in welcher man will, daſs der Wasserspiegel in der Entfernung 3 . β von der Oeffnung über der horizontalen Oberfläche des Abfallwehres, d. h. über dem untern Rande der Oeffnung stehen soll. Es versteht sich, daſs die Seitenwände des Wehres oder des Einschnitts, zwischen welchen das Wasser seinen Abfluſs hat, allemal etwas höher als H seyn müssen, um diesen Abfluſs auf die bestimmte Breite β zu beschränken. Uebrigens kann aber auch β der Länge des ganzen Wehres (des ganzen Wehrdamms) gleich seyn, so daſs der Bach oder der Fluſs in seiner ganzen Breite überfällt, da dann die Ufer zu beiden Seiten die gedachten Seitenwände bilden, deren Höhe gröſser als H seyn soll.

§. 137.

Die bisher beigebrachten Erfahrungen waren nur im Kleinen angestellt. Wir haben aber Beobachtungen sehr im Groſsen, die uns daher hier von groſser Wichtigkeit sind. Man findet sie in den Mémoires de l'Academie Roy. des Sc. Inscript. et B. L. de Toulouse T. II. 1784 p. 39. Die nachstehende Tafel giebt davon eine kurze Uebersicht.

Nummer der Versuche.	Höhe des Wassers über dem Schwerpunkte der Oeffnung in Par. Fuſsen.	Zeit des Ausflusses in Sekunden.	Gröſse der Oeffnung in Quadrat-Fuſsen.	Natürliche Ausfluſsmenge in Kubik-Fuſsen.	Wirkliche Ausfluſsmenge in Kubik-Fuſsen.	Wirkliche Wassermenge nach den Versuchen in einer Sekunde.	Theoretische Wassermenge in Kubik-Fuſsen in einer Sekunde.	Verhältniſs der wirklichen Wassermenge zur theoretischen = 1 angenommen	Nach Hrn. Bauer's Formel berechnete Wassermenge in 1 Sek.
1.	4,170	5550	5,774	506648	378508	68,199	91,287	0,7442	58,462
2.	6,222	2400	6,156	292751	183625	76,510	121,978	0,6410	75,314
3.	6,270	1380	12,441	332918	183625	133,062	241, 245	0,5495	135,360
4.	5.861	2520	6,156	298323	183625	72,867	118,382	0,6290	73,092
5.	5,892	1410	12,441	329805	183625	130,231	233,904	0,5548	131,220
6.	13,656	720	6,817	140494	86407	120,010	195,131	0,6128	121,420
7.	12,083	180	5,693	27588	17742	98,571	153,268	0,6408	98,365
8.	12,673	300	3,172	26227	18608	62,027	87,424	0,7067	62,067
9.	12.881	300	1,502	12522	10097	33,658	41,742	0,8030	33,706

Die Wand war 20 Zoll dick.

Die *natürliche* Ausfluſsmenge, welche auch die *theoretische* genannt wird, ist,

$= \beta \cdot (H - \mathfrak{h}) \cdot 2 \sqrt{g \mathfrak{H}}$, ohne Rücksicht auf eine Zusammenziehung, berechnet, und dabei für $\mathfrak{H}$ die Tiefe des Schwerpunkts unter dem Wasserspiegel genommen worden.

Der vormalige Rheinbaudirektor in *Düsseldorf*, jetzt Geheimer-Oberbaurath in *Berlin* Herr *Bauer* hat mir die Tafel mitgetheilt; derselbe hat mit vielem Scharfsinne aus den Beobachtungen die nachstehende Formel abgeleitet.

$$171.)\quad M = 6{,}7034 \cdot \alpha^{0{,}828} \cdot \sqrt{\mathfrak{H}}$$

die ich, um ihr eine analogere Form zu geben, in die folgende umwandle

$$172.)\quad M = 0{,}863 \cdot \alpha^{0{,}828} \cdot 2 \sqrt{g \mathfrak{H}}$$

wo $g = 15{,}1'$ und $\alpha = \beta \cdot (H - \mathfrak{h})$ in Bezug auf Fuſse genommen wird.

Die Vergleichung der Ausfluſsmengen zeigt, die einzige erste Beobachtung ausgenommen, eine äuſserst genaue Uebereinstimmung der Bauerschen Formel mit den wirklichen Beobachtungen. Sie hat aber dennoch ihre groſse Beschränkung. Für $\alpha = 1$ Quadr. Fuſs giebt sie allemal $M = 0{,}863 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{g \mathfrak{H}}$, (oder auch $M = 6{,}7034 \cdot 1 \sqrt{\mathfrak{H}}$) was offenbar der Natur der Sache nicht angemessen ist. Ja für $\alpha < 1$ Quadr. Fuſs giebt sie sogar $M > 0{,}863 \cdot \alpha\, 2 \sqrt{g \mathfrak{H}}$. Es sey z. B. $\alpha = \frac{1}{4}$ Quadr. Fuſs, so wird

$$log\ (\tfrac{1}{4})^{0{,}828} = -0{,}828 \cdot 0{,}60206 = 3{,}5014943 - 4$$

Die zugehörige Zahl ist 0,3173

Also $\qquad M = 0{,}863 \cdot 0{,}3173 \cdot 2 \sqrt{g \mathfrak{H}}$

oder auch $\qquad M = 1{,}0953 \cdot \alpha \cdot 2 \sqrt{g \mathfrak{H}}$

was, weil auch $\mathfrak{H}$ grösser als die mittlere Geschwindigkeitshöhe ist, etwa um $\frac{1}{10}$ gröſser als die *theoretische* Ausfluſsmenge wäre. Auf die Verschiedenheit dicker und dünner Wände, und auf die Verhältniſszahl $\frac{\alpha}{W}$ nimmt diese Formel gar keine Rücksicht.

Es kann also No. 171 (oder No. 172.) nicht allgemein gebraucht werden. Ueberhaupt können Beobachtungen zur Ableitung einer *allgemeinen* Formel nur so benutzt werden, daſs man dabei den einzelnen Bestimmungsstücken in Erwägung des Einflusses, den sie etwa auf das Resultat haben können, nachgeht, um im Ganzen sich nicht vom Gange der Natur zu entfernen. Es ist an sich etwas unnatürliches statt α eine Potenz dieser Fläche in den Ausdruck bringen zu wollen. Aus einer solchen Formel können Ungereimtheiten folgen, die bei unserer Formel (No. 169.) nie zu fürchten sind.

Die stärkste Abweichung der wirklichen Ausfluſsmenge von der theoretischen zeigt sich bei der dritten Beobachtung, wo statt der 241 Kubikfuſs nur 133 in 1 Sek. ausflossen.

Wir wollen unsere Formel auf diesen Fall anwenden, und die Oeffnung, deren Form nicht bestimmt ist, als ein Quadrat von 12,441 Quadratfuſs annehmen, so ist die Seite dieses Quadrats oder $\beta = \sqrt{12{,}441} = 3{,}527'$; die halbe Höhe der Oeffnung $= 1{,}733$; also $H = 6{,}270 + 1{,}733 = 8{,}003'$ und $\mathfrak{h} = 6{,}270 - 1{,}733 = 4{,}537$; die Wanddicke δ

war 1,666′. Nach (§. 129) können wir hier, ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit $\gamma = 0{,}7$ setzen, oder $k = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; aber mit Bezug auf die Geschwindigkeit wird $\gamma = 1 - \frac{c}{c+0{,}4} \cdot k$. Hier ist (No. 168.), wenn wir im jetzigen Falle $c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{g} \cdot (\mathfrak{h} + \frac{4}{9}(H - \mathfrak{h}))$ setzen, $c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{15{,}1} \cdot (4{,}537 + \frac{4}{9}(8{,}003 - 4{,}537)) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{15{,}1} \cdot (4{,}537 + \frac{4}{9} \cdot 3{,}466)$ $= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{91{,}7627} = 12{,}630$; daher der verbesserte Werth von $\gamma = 1 - \frac{12{,}63}{12{,}63 + 0{,}4} \cdot 0{,}3$ $= 1 - 0{,}291 = 0{,}709$; $\sqrt{\mathfrak{h}} = 2{,}13$; $\sqrt{H} = 2{,}83$; $\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}} = 0{,}753$; $\sqrt{g} = 3{,}88$;

$\frac{\sqrt{\left(\frac{\delta}{3}\right)}}{13} = 0{,}057$. Demnach (No. 169.)

$$M = (1 - 0{,}057) \cdot (0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}753) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}71 \cdot 3{,}527 \cdot 3{,}88 \cdot (21{,}05 - 9{,}66) = 133{,}97 \text{ Kubikfufs.}$$

Die Beobachtung gab 133,06 Kubikfufs.

Wir wollen noch eine Anwendung auf die neunte Beobachtung machen, wo $\mathfrak{H}$ am gröfsten und die Oeffnung am kleinsten war. Die Oeffnung war 1,502 Quadratfufs; also, die Form eines Quadrats angenommen, $\beta = \sqrt{1{,}502} = 1{,}226'$; ihre Höhe $= \beta = 1{,}226'$; $H = 12{,}881' + 0{,}613' = 13{,}494'$; $\mathfrak{h} = 12{,}881' - 0{,}613' = 12{,}268'$; $\sqrt{H} = 3{,}674$; $\sqrt{\mathfrak{h}} = 3{,}5$; $\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}} = 0{,}953$. Ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit ist hier $\gamma = 0{,}81$, oder $k = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$; also verbessert (No. 168.) $\gamma = 1 - \frac{c}{c+0{,}4} \cdot 0{,}19$. Hier nehmen wir zuerst $c = 2\sqrt{g\,\mathfrak{H}} = (2\sqrt{g}) \cdot \sqrt{12{,}881} = 27{,}857'$, und korrigiren diesen Werth durch die Multiplikation mit 0,81, welches $c = 22{,}5'$ giebt, also $\gamma = 1 - \frac{22{,}5}{22{,}5 + 0{,}4} \cdot 0{,}19$ $= 0{,}813$. Hiermit erhalten wir nun

$$M = (1 - 0{,}057) \cdot (0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}953) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}813 \cdot 1{,}226 \cdot 3{,}88 \cdot (49{,}577 - 42{,}938) = 32{,}008 \text{ Kubikf.}$$

Die Beobachtung gab 33,658 Kubikfufs, also $\frac{1}{19}$ mehr.

Die erste Beobachtung verdient noch darum unsere besondere Aufmerksamkeit, weil bei ihr die Bauersche Formel eine so bedeutende Abweichung gab.

Dabei war die Oeffnung 5,774 Quadratfufs also, ein Quadrat angenommen, $\beta = \sqrt{5{,}774}$ $= 2{,}4'$; $H = 4{,}17 + 1{,}2 = 5{,}37'$; $\mathfrak{h} = 4{,}17 - 1{,}2 = 2{,}97'$; $\sqrt{H} = 2{,}317$; $\sqrt{\mathfrak{h}} = 1{,}723$; γ könnten wir nach (§. 129) $= 0{,}81$ setzen, oder $k = 0{,}19$; also nach (No. 168.) $\gamma = 1 - \frac{c}{c+0{,}4} \cdot 0{,}19$. Nehmen wir $c = 0{,}81 \cdot (2\sqrt{g}) \cdot \sqrt{4{,}17} = 1{,}62 \cdot 3{,}88 \cdot 2{,}042 = 12{,}84$, so wird $\gamma = 1 - \frac{12{,}84}{13{,}24} \cdot 0{,}19 = 0{,}816$.

Nunmehr erhalten wir aus (No 169.)

$$M = (1 - 0{,}057) \cdot (0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}88) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}816 \cdot 2{,}4 \cdot 3{,}88 \cdot (12{,}44 - 5{,}12)$$

$= 71{,}260$ Kubikfufs, wofür Herr Bauer nur 58,462 Kubikfufs findet.

Die Beobachtung gab 68,199 Kubikfuſs.

Wir haben hiermit hinlängliche Beweise für die allgemeine Anwendbarkeit unserer Formel gegeben.

§. 138.

Für den nicht leicht vorkommenden Ausfluſs durch eine dreieckte Oeffnung, läſst sich gleichfalls mittelst der Differentialrechnung ein allgemeiner Ausdruck finden, den ich hier übergehen zu dürfen glaube. Man findet ihn in meinem Lehrbuche der Hydraulik. Doch erhält man in der Ausübung hinlängliche Genauigkeit, wenn man

$$173.)\quad M = \left(1 - \frac{\sqrt{\tfrac{1}{3}\delta}}{13}\right) \cdot \left(0{,}85 + 0{,}15 \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}}\right) \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot 2 \cdot \sqrt{g\,\mathfrak{H}}$$

setzt, wo $\mathfrak{h}$ die Tiefe der höchsten Stelle der Oeffnung, H die Tiefe der untersten Stelle der Oeffnung, $\mathfrak{H}$ die Tiefe des Schwerpunkts der Oeffnungsfläche unter dem Wasserspiegel, und α die Gröſse der Oeffnungsfläche bezeichnet, die dann jede beliebige Gestalt haben darf.

XI. Kapitel.

UEBER DIE BEWEGUNG DES WASSERS IN REGULAEREN OFFENEN KANAELEN.

§. 139.

Es ist wohl der Mühe werth, hier einen Blick auf die älteren Bemühungen um diesen Gegenstand zu werfen. Wir dürfen nicht sehr weit zurück gehen, um die Unvollkommenheit der Hydraulik selbst noch in den Zeiten solcher Schriftsteller, die noch mit uns lebten und unsere grofse Achtung verdienen, kennbar zu machen. *Kästners Hydrodynamik,* welche 1769 (und 1797 zum andernmal) erschien, giebt uns noch hinlängliche Belehrung über die Unbrauchbarkeit damaliger hydraulischer Lehren in Bezug auf unseren Gegenstand. Seine Betrachtung *über den Lauf der Flüsse* (S. 191, 2te Ausg.) ist rein theoretisch, blos auf diejenigen Erscheinungen beschränkt, welche eintreten würden, wenn die Wassertheilchen einzig und allein den Eindrücken unserer Schwere unterworfen wären, ohne dafs irgend eine andere Kraft oder Hindernifs nebenbei einträte.

§. 140.

Fig. 66 stellt das Längenprofil eines regulären Kanals vor, der überall gleich weit ist, und den man sich über b hinaus, so weit man will, fortgesetzt denken kann; mn, bv seyen die Wassertiefen in verschiedenen Querschnitten. Es ist nun gestattet, irgend einen beliebigen Querschnitt, wie hier den in bv als *ersten* anzusehen, und die Erscheinungen von b aus abwärts zu untersuchen; bea bezeichnet den Neigungswinkel des Bodens gegen die horizontale ea; der Raum N ist mit Wasser angefüllt, das sich in b an bv anschliefst. Wenn nun ein Wassertheilchen bei o im untern Querschnitt bei p ankommt: mit welcher Geschwindigkeit wird es durch mn durchgehen? *Alle Bewegungshindernisse werden bei Seite gesetzt.*

War seine Geschwindigkeit in $o = c$, so kommt hierzu noch die von der Fallhöhe $oa - pq$ herrührende Geschwindigkeit während der Bewegung von o bis p; ist diese $= \mathfrak{C}$, und die Geschwindigkeit in $p = C$ so wird $C = c + \mathfrak{C}$.

War die Geschwindigkeit in v noch $= o$, so ist $c = 2\sqrt{g} \, . \, ov$ wo sich ov auf die Figur bezieht. Man hat also

$$C = 2\sqrt{g} \, . \, (ov + oa - pq) = 2\sqrt{g} \, . \, (va - pq)$$

Dabei hätte man sich N als ein Behältniſs zu denken, das beständig auf die Höhe bv mit Wasser angefüllt erhalten würde.

Ist b die Breite des Querschnitts in bv, und M die in 1 Sekunde abflieſsende Wassermenge, so ist

$$M = \tfrac{2}{3} \, b \, . \, bv \, . \, 2\sqrt{g} \, . \, bv$$

oder, H statt bv gesetzt

$$M = \tfrac{4}{3} \, b \, . \, \sqrt{g \, H^3}$$

Wäre die Tiefe $mn = h$, so müſste in diesem Querschnitte dieselbe Wassermenge in jeder Sekunde durchflieſsen; da aber in diesem Querschnitte die Geschwindigkeit der Wassertheilchen durch das fortdauernde Fallen schon gröſser geworden ist als im ersten, so muſs $h < H$ seyn, und so muſs die Tiefe längs dem Kanale abwärts immer mehr und mehr abnehmen, wie die Geschwindigkeit immer mehr und mehr zunimmt. Auch muſs das Verhältniſs der Geschwindigkeiten an der Oberfläche und am Boden dem der Gleichheit immer näher kommen.

§. 141.

So betrachtet *Kästner* die Sache. Er macht auch Anwendungen auf horizontale Kanäle, bei welchen er mit *Gulielmini* annimmt, daſs die Geschwindigkeit eines jeden Wassertheilchens von dem Druck der lothrecht darüber stehenden Wassersäule herrühre. Dabei stellt er noch (in der 2ten Ausg.) eigene Untersuchungen an, macht sogar Anwendungen auf die Donau, und findet, daſs ihre Geschwindigkeit beim Ausflusse etwa $2\frac{1}{2}$ mal so groſs seyn müsse als sie wirklich ist.

§. 142.

Karsten beginnt mit dem Gulielminischen Satze, daſs die Bewegung der Wassertheilchen in jeder Tiefe eines Querschnitts im horizotalen Kanale einzig von der Höhe der lothrecht darüber stehenden Wassersäule abhänge, und setzt daher, wie §. 140, $M = \tfrac{4}{3} \, b \, . \, \sqrt{g \, . \, H^3}$.

Nachher bemerkt er, daſs zwar hiernach die Geschwindigkeit des Wassers auf der Oberfläche $= o$ seyn müsse, daſs dieses aber schon wegen des obwohl nur geringen Zusammenhanges der Wassertheilchen unter einander nicht so angenommen werden könne. *Kästner* a. a. O. S. 210 will diese Erklärung nicht gelten lassen, und sagt, sie gelte bei

dieser Untersuchung nicht, wo man an Zusammenhang der Wassertheilchen nicht denke, was strenge genommen in Bezug auf den vorstehenden Werth von *M* seine Richtigkeit hat, weil derselbe auf die Voraussetzung gegründet ist, daſs aller Zusammenhang wegfalle. Karstens Meinung ist aber, daſs der wirklich vorhandene Zusammenhang zwar groſs genug sey, daraus auch die Bewegung der Wassertheilchen auf der Oberfläche im horizontalen Kanale zu begreifen, aber zu unbedeutend, um jenen Werth von *M* merklich abzuändern. Er zeigt nur, was aus dem Mangel alles Zusammenhangs folge, bemerkt aber nachher (V. Th. des Lehrbegriffs S. 104), daſs jene Voraussetzung in der Natur nicht angenommen werden könne, daſs daher jene theoretische Bestimmung von *M* auch nur als *Näherung* anzusehen sey.

Kästner Hydrodyn. (2te Ausg. S. 207) sagt, die Wassertheilchen in der Oberfläche würden von den unteren *getragen* und und daher von diesen fortgeführt, wie Jemand, der in einem Wagen ruhig sitze, mit diesem fortgeführt werde. Diese Vergleichung verwirft *Karsten* a. a. O., wo sich die aus Kästners Hydrodynamik angeführte Stelle auf die erste Ausgabe bezieht. *Karsten* hat hierbei selbst übersehen, daſs kein Tragen ohne Zusammenhang der *tragenden* und der *getragenen* Theile möglich ist, daſs also Kästner, der die Erscheinung einer Bewegung bei gänzlichem Mangel von Zusammenhang erklären wollte, in dieser Erklärung selbst wieder Zusammenhang voraussetzte.

In der That müſsten aber auch bei völliger Beseitigung alles Zusammenhangs die kleinsten Wassertheilchen in der Oberfläche nothwendig mit in Bewegung kommen, weil durch das Voreilen der Wassertheilchen in den unteren Schichten, sobald Wasser in den Kanal kommt, Abdachung oder Neigung des Wasserspiegels bewirkt werden muſs. Auch ist schon aus der Hydrostatik hinlänglich bekannt, daſs bei horizontaler Oberfläche keine Bewegung erfolgen kann, und daſs nur nach der Seite hin Bewegung eintritt, nach welcher das Niveau der Oberfläche tiefer liegt.

Uebrigens ist Karstens Vortrag über die Bewegung des Wassers in Kanälen eben so wenig belehrend und eben so unbrauchbar als der Kästnersche.

§. 143.

Silberschlag gewann durch seine Preisschrift (1754) über den Wasserbau an Strömen selbst im Auslande einen Namen; sie hatte sogar die Ehre, späterhin unter den Titel: Theorie des Fleuves, traduite de l'Allemand, par M. d'Au** Officier réformé. Paris 1769 ins Französische übersetzt zu werden. Er verdrängte aber selbst diese Schrift durch die beiden Bände seiner *Hydrotechnik*, welche in den Jahren 1772 und 1773 erschienen. Die Arbeiten von *Kästner* und *Karsten* waren ursprünglich von 1769 und 1770.

»Vor allen Dingen, sagt er S. 105, haben wir uns mit den Bewegungsgesetzten flüssiger Körper in offenen Kanälen bekannt zu machen, ehe wir die bei Anlegung dersel-

ben zu beobachtenden Regeln festsetzen. Wäre meine Absicht, mich in diese Materie weiter einzulassen, als der gemeine Gebrauch solches erfordert: mit was für einem grofsen Vortheil würde ich mich der Arbeiten jener grofsen Männer (die am Firmamente der literarischen Welt immer glänzen werden, indefs der ephemerische Schimmer viel späterer Schriftsteller kaum noch im Andenken seyn wird L.) eines *Gulielmini*, eines *Daniel Bernoulli*, eines *Euler*, eines *d'Alembert*, eines von *Segner*, eines *Kästner*, eines *Lambert* und mehrerer Arbeiten grofser Mathematiker bedienen können.«

Silberschlag redet hier nur von den Verdiensten dieser Männer um die Theorie, die er selbst für die Ausübung unbrauchbar fand.

§. 144.

Silberschlag erwarb sich durch dieses Werk ein Verdienst, das seinen Namen unvergefslich machen wird. Nur erst die Fortschritte der Hydraulik, zu denen er selbst die nächste Veranlassung gegeben hatte, lehrten seine Mängel kennen. So sagt er z. B. S. 107: »So lang ein Kanal seinen Neigungswinkel nicht ändert, nimmt die Geschwindigkeit des durch ihn herabfliefsenden Wassers nach den Bewegungsgesetzen schief liegender Flächen beständig zu.« Aus diesem irrigen Satze leitet er viele andere ab, die in der Ausübung angenommen die nachtheiligsten Folgen haben mufsten. Noch viele andere fehlerhafte Sätze und unrichtige Theorien, die in diesem Werke enthalten und jetzt als solche allgemein anerkannt sind, glaube ich hier unberührt lassen zu dürfen.

§. 155. *)

So sehr sich auch in mancher Rücksicht italienische Schriftsteller um Hydraulik und insbesondere um Hydrotechnik verdient gemacht haben, worüber die vielen literarischen Notizen in *Kästners Hydrodynamik* eine sehr gute Belehrung geben, so haben sie doch zur nähern Beleuchtung unsers Gegenstandes nichts beigetragen, auch keine Beobachtungen, die zu dieser Beleuchtung führen könnten, mitgetheilt. Engländer und Schweden haben grofses Verdienst um praktische Mechanik überhaupt, aber keines um den Gegenstand dieses Kapitels. Polen und Russen fehlt es nicht an Talent und Eifer für das Studium der Mathematik; ihre Gewandheit selbst im höheren Kalkul verdient oft Bewunderung; aber zur Berichtigung und Erweiterung unserer Kenntnisse in Bezug auf die Bewegung des Wassers in Kanälen haben sie noch nichts beigetragen; wie dann überhaupt auch alle neuere Einschaltungen und Erweiterungen der Analysis hierbei nichts helfen und in diesem Bezuge leere fruchtlose Spekulationen bleiben. Es fehlte nicht an neuern Kunstgriffen der Analysis, sondern an Beobachtungen und Geschicklichkeit, das, was man schon wufste, auf die Beobachtungen richtig anzuwenden.

*) Ich bemerkte diesen Sprung von §. 144 zu §. 155 erst nach Vollendung des ganzen Werkes.

§. 156.

Nach der Bekanntmachung des gedachten Silberschlagischen Werks machten sich in Frankreich mehrere nach einander folgende Hydrotechniker um diesen Gegenstand sehr verdient. Hierzu gab zunächst der Entwurf zu dem Kanale *de l'Yvette* Anlafs, an welchem gegen 1775 *Prony's* Vorgänger in der Direktion der Unterrichtsanstalten im Brücken- und Strafsenbau *Chezy*, nach *Prony's* vollgültigem Urtheile Einer der geschicktesten französischen Ingenieurs, zugleich mit dem berühmten *Perronet* arbeitete. *Silberschlag* kannte keine andere Bestimmungsstücke für die Bewegung des Wassers in Kanälen als Gefälle und Geschwindigkeit, und begnügte sich mit der hier ganz unstatthaften reinen Theorie der schiefen Ebene.

Wie weit schärfer *Chezy* seinen Gegenstand ins Auge fafste, erhellet sogleich aus der Zusammenstellung der Bestimmungsstücke, wobei er ausser dem absoluten Falle des ganzen Kanals zugleich die Länge desselben nebst Gröfse und Form vom Breitenprofil mit berücksichtigte, und die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von dem Gefälle und der Beschaffenheit des Breitenprofils zugleich mit Rücksicht auf Erfahrungen über die dabei eintretenden Bewegungshindernisse zu bestimmen suchte, so dafs er dabei analoge Verhältnifsbestimmungen zu Hülfe nahm.

Es sey

	für einen Kanal A	für einen Kanal B
Länge	l	λ
Abhang der Oberfläche des Wassers auf diese Länge	z	ζ
Summe der beiden Seiten und der Grundlinie des Breitenprofils	k	$\varkappa$
Flächeninhalt des Breitenprofils	e	η
Mittlere Geschwindigkeit des Wassers in einem solchen Profil	C	c

so setzt *Chezy*

$$174.)\quad C : c = \sqrt{\frac{z\,.\,e}{l\,.\,k}} : \sqrt{\frac{\zeta\,.\,\eta}{\lambda\,.\,\varkappa}}$$

oder auch

$$175.)\quad c = \frac{\sqrt{\frac{\zeta\,.\,\eta}{\lambda\,.\,\varkappa}}}{\sqrt{\frac{z\,.\,e}{l\,.\,k}}}\,.\,C$$

Es ist nämlich analogisch, die Geschwindigkeit nach dem Verhältnisse der Quadratwurzel aus den für oder gegen die Bewegung wirkenden Kräften zu bestimmen. Je gröfser $\sqrt{z}$ ist, desto gröfser mufs c seyn. Es ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt,

dafs die Geschwindigkeit des Wassers, auch in regulären Kanälen, von welchen hier die Rede ist, durch mannichfaltige Bewegungshindernisse sehr beschränkt wird, und dafs ebendarum die Bewegung desselben nicht immer fort beschleunigt werden kann. Mit fortdauernder Beschleunigung müssen die Wasserquerschnitte nothwendig immer kleiner werden, nämlich die Wassertiefe immer mehr abnehmen oder die Oberfläche des Wassers der Bodenfläche immer näher kommen. Weil nun die vom Boden herrührende Bewegungshindernisse sich defshalb immer mehr durch die ganze Wassermasse bis zur Oberfläche fortpflanzen, und mit der zunehmenden Geschwindigkeit zugleich der Widerstand wächst, so nimmt *Chezy* an, dafs defshalb der Widerstand bald der beschleunigenden Kraft gleich werde, also *gleichförmige* Bewegung eintrete. In diesem Zustande ist dann der Widerstand, weil das Wasser in allen Querschnitten sich ganz unter einerlei Umständen befindet, auch in allen Querschnitten ganz derselbe.

Je gröfser die Länge l ist, der ein bestimmtes Gefälle z zugehört, desto kleiner ist die beschleunigende Kraft, und desto kleiner die Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand mit der beschleunigenden Kraft ins Gleichgewicht kommt; zu einem gröfseren Werthe von l gehört also ein kleinerer von C; zu einem gröfseren von λ ein kleinerer von c.

Die Bewegungshindernisse ergeben sich hauptsächlich am Boden und den Seitenwänden. Je gröfser also $\varkappa$ ist, desto kleiner mufs c werden, wenn sonst alles ungeändert bleibt. Aber je gröfser dabei η ist, desto gröfser ist die Menge von Wassertheilchen, in welche der bei jedem Querschnitte des Kanals vorkommende Widerstand vertheilt wird, also desto kleiner die Bewegungshindernifs für jedes einzelne Wassertheilchen, und ebendarum desto gröfser die Geschwindigkeit, bei welcher die gleichförmige Bewegung eintritt.

Auf solche Betrachtung gründete *Chezy* die Proportion No. 174. Sie giebt

$$176.)\quad c = \left(C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\varsigma\,\eta}{\lambda\,\varkappa}}$$

§. 157.

Wenn nun auch auf diese Weise nicht *alle* Bewegungshindernisse, und die angegebenen nicht ganz so in Rechnung gebracht seyn mögen, so glaubte doch dieser grofse Ingenieur, dafs man mit Hülfe dieser Formel in der Ausübung sich immer der Wahrheit genügend nähern werde, wenn man den Werth von $C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}}$ durch Beobachtungen bei vorhandenen Kanälen bestimme, die dann selbst entscheiden würden, ob $C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}}$ wirklich eine bestimmte Zahl sey, so dafs sich die Geschwindigkeit c wirklich oder doch beinahe wie $\sqrt{\frac{\varsigma\,\eta}{\lambda\,\varkappa}}$ verhalte.

Es liefs sich zum voraus erwarten, dafs dieses Verhalten nur *beiläufig* Statt haben, oder dafs jede andere Beobachtung auch einen andern Werth von $C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}}$ geben werde.

Hierher gehörige Messungen und Beobachtungen findet man in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* und in meinen *Neueren Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften* (Mannheim und Heidelberg 1816) §. 50 — 52. Diese zeigen nun allerdings eine nicht ganz unbedeutende Veränderlichkeit des gedachten Ausdrucks; nimmt man aber aus den verschiedenen Werthen das arithmetische Mittel, so findet man an letzterer Stelle die Zahl 92,66, wofür wir 92 beibehalten wollen, also

$$177.)\quad c = 92 \cdot \sqrt{\frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa}}$$

Alles in Bezug auf Pariser Fuſse.

Die entferntesten Resultate weichen nur um $\frac{1}{10}$ von dieser Mittelzahl ab.

Anwendungen auf Kanäle, in welchen die Beweguug des Wassers noch im Zustande der Beschleunigung ist, finden nicht Statt.

Darum findet auch keine Anwendung auf horizontale Kanäle Statt, weil in solchen der Abfluſs nur durch den Abhang des Wasserspiegels gegen die horizontale Bodenfläche möglich wird, hiermit aber die nothwendige Folge verbunden ist, daſs die Wasserquerschnitte längs dem Kanale immer untiefer, also immer kleiner werden müssen, so daſs die Geschwindigkeit, weil doch durch den kleinern Querschnitt in jeder Sekunde ebensoviel Wasser durchflieſsen muſs, als durch den gröſsern, abwärts immer zunehmen, also das Wasser mit beschleunigter Bewegung abflieſsen muſs.

Die Chezysche Formel ist also in ihrer Anwendung sehr beschränkt.

§. 158.

Im Jahre 1779 erschienen die *Principes d'Hydraulique* von *Dubuat*, und schon 1786 die 2te Ausgabe. Wir haben hiervon eine teutsche Uebersetzung von *Lempe*, und eine vom ersten Bande dieses Werks durch *Kosmann*; dieser erste Band ist der eigentlich hierher gehörige; Herr *Eytelwein* hat sehr nützliche Anmerkungen beigefügt.

Dubuat wollte der Chezyschen Formel eine gröſsere Allgemeinheit in der Hinsicht geben, daſs sie auch auf die kleinsten Breitenprofile anwendbar seyn sollte. Statt $\frac{\varsigma}{\lambda}$ setzt er $\frac{1}{b}$, und r statt $\frac{\eta}{\varkappa}$. Hiernach wäre bei Chezy

in Bezug auf Pariser Fuſse $c = 92 \cdot \sqrt{\frac{r}{b}}$

in Bezug auf Pariser Zolle $c = 320 \cdot \sqrt{\frac{r}{b}}$

Dafür findet *Dubuat* durch mancherlei Künsteleien

$$178.)\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - logn.\ \sqrt{(b + 1{,}6)}} - 0{,}3 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)$$

Alles in Bezug auf Pariser Zolle.

Die Einschaltung von *logn.* $\sqrt{(b+1{,}6)}$ gründet sich weder auf eine Integration, noch auf irgend eine Analogie; so verhält es sich auch mit 0,1 und $0{,}3 . \sqrt{r} - 0{,}1$. Er wollte durch dieses Einflicken die Chezysche Formel für gewisse Fälle anwendbar erhalten; denn so giebt sie, für $\sqrt{r} = 0{,}1''$ oder $r = 0{,}01''$ die Geschwindigkeit $c = o$, wie er verlangt, weil dann die Wassertheilchen am Boden des Kanals hängen bleiben müfsten. Hiermit hat er ohne Nutzen die Rechnungen nur verwickelter gemacht, und die im vorigen §. bemerkten Beschränkungen werden dadurch nicht beseitigt. Aber durch die Menge von Anwendungen, welche Dubuat in diesem Werke von seiner Formel gemacht hat, und die sich auf gleiche Weise von der Chezyschen machen lassen, ist seine Schrift wichtig geworden. Sie kann als das erste brauchbare Werk angesehen werden, das über die Bewegung des Wassers in Kanälen erschienen ist, und das sich mit einiger Vollständigkeit über alle dahin gehörige Materien verbreitet. Ich habe dieses Werk in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* benutzt, und seinen Gebrauch theils zu erleichtern, theils zu berichtigen gesucht. Von *Chezy* ist meines Wissens keine Schrift im Druck erschienen.

§. 159.

Fast gleichzeitig mit der 2ten Ausgabe des Dubuatschen Werks, nämlich 1787, erschienen in Paris *Neue Grundlehren der Hydraulik* von *Bernard*, und hiervon 1790 eine teutsche Uebersetzung mit Anmerkungen von mir, daher ich es hier gleich unter dem teutschen Titel angezeigt habe. Dieses Werk enthält in Bezug auf natürliche Flufsbetten und auf Hydrotechnik viele nützliche Bemerkungen.

§. 160.

Im Jahre 1800 übergab *Coulomb* dem Nationalinstitut eine Abhandlung über Erfahrungen, welche zur Bestimmung des Zusammenhangs flüssiger Massen und der Gesetze des Widerstandes bei langsamen Bewegungen dienen sollen. Er zeigt darin, dafs sich der Widerstand durch einen zweitheiligen Ausdruck bestimmen lasse, wovon der eine der ersten und der andere der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sey. Einige Jahre später machte *Girard*, dirigirender Ingenieur bei den Brücken und Strafsen und insbesondere auch bei den (damaligen) Arbeiten am *Ourcq*-Kanal, zwei Abhandlungen über die Theorie fliefsender Wasser bekannt, worin er jenes Coulombsche Gesetz benutzte, was vorher auf die Bewegung des Wassers in Kanälen und Flufsbetten noch nicht angewendet worden war.

Diese Anwendung giebt die Girardsche Formel

$$179.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = \varphi \cdot (c + c^2)$$

wo die Buchstaben zur Linken die Bedeutung §. 156 haben, c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers ist, und φ einen aus Beobachtungen abzuleitenden Koëfficient bedeutet.

Vergleichungen mit Beobachtungen geben in Metern

$$180.)\quad c = -0{,}5 + \sqrt{\left(0{,}25 + 8052{,}54 \cdot \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa}\right)}$$

Hiernach berechnete Werthe kommen der Wahrheit bald mehr, bald weniger nahe als die Chezysche und Dubuatsche Formel; im Ganzen steht aber die Girardsche nach; sie ist gleichen Beschränkungen unterworfen, und wegen der unreinen quadratischen Gleichung unbequemer. Auch hatte *Girard* bei seiner doch immer nur hypothetischen Formel darin gefehlt, daſs durch den gemeinschaftlichen Koëfficient φ der Bewegung des Wassers schon vorgeschrieben wurde, daſs die erste und zweite Potenz der Geschwindigkeit zu gleichen Theilen wirken sollen, da es doch natürlich ist, erst aus Beobachtungen abzuleiten, nach welchem Verhältnisse beide Potenzen in die Formel aufgenommen werden müssen, hiernach also jeder Potenz einen eigenen Koëfficient zu geben, und die beiden Koëfficienten aus der Erfahrung zu bestimmen.

§. 161.

Prony wurde auf diesen Fehler aufmerksam. Im Jahre 1804 erschienen von ihm *Récherches physico- mathématiques sur la Théorie des eaux courantes* (*par Prony, Paris* 1804) die ich im Jahre 1812 mit vielen Anmerkungen teutsch herausgab, unter dem Titel: *Theoretisch praktische Abhandlung über die Leitung des Wassers in Kanälen und Röhrenleitungen von Prony* (Gieſsen 1812).

Unter mehr Aufwand von Analysis, als nöthig gewesen wäre, kommt derselbe hier auf die Form

$$181.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} \cdot g = \alpha c + \beta c^2$$

wo g bekanntlich soviel ist als bei uns $2g$.

Die Einführung der Gröſe g sollte wahrscheinlich der Formel ein mehr mathematisches Ansehen geben, als ob sie aus mechanischen Grundgesetzen abgeleitet worden wäre, was doch der Fall nicht ist. Es ist die Chezysche nach Girard abgeänderte Formel, nur so modificirt, daſs obiger Fehler dabei vermieden worden ist. Die Gröſse g ist dabei ein ganz gleichgültiger und ebendarum ganz überflüssiger Faktor, für den wir auch die 1 sezzen könnten. Aus (No. 181.) wird auch

$$\frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = \frac{\alpha}{g} \cdot c + \frac{\beta}{g} \cdot c^2$$

Schreiben wir nun δ statt $\frac{\alpha}{g}$, und μ statt $\frac{\beta}{g}$, so haben wir

$$182.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}\ \delta \,.\, c + \mu c^2$$

wie wenn in der obigen Formel $g = 1$ gesetzt wird.

Aus 2 Beobachtungen, wo ζ, η, λ, $\varkappa$ und c bekannt sind, erhält man hiernach 2 unbestimmte Gleichungen, welche δ und μ als unbekannte Gröfsen enthalten, die sich dann mittelst dieser Gleichungen ergeben. Aus einem andern Paare von Beobachtungen findet man wieder andere Werthe von δ und μ; aus vielen solchen Werthen kann man dann ein arithmetisches Mittel nehmen.

Es lassen sich aber noch andere und leichtere Wege einschlagen, um zu solchen Mittelwerthen von δ und μ zu gelangen, wie man, wenn man es der Mühe werth hält, aus dem angeführten Pronyschen Werke und meiner dortigen Vorerinnerung ersehen kann. In Bezug auf Meter findet man nach *Prony* $\delta = 0{,}0000948$; $\mu = 0{,}000271$; also

$$183.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948 \,.\, c + 0{,}000271 \,.\, c^2$$

Es ist aber 1 Meter = 3,0794 Par. Fufs = 36,9535″, daher in Bezug auf Zolle

$$184.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948 \,.\, c + 0{,}00000738 \,.\, c^2$$

und in Bezug auf Fufse

$$185.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948 \,.\, c + 0{,}00008856 \,.\, c^2. \quad \text{(s. §. 178)}$$

Aus (No. 177.) wird

$$186.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0001165 \,.\, c^2.$$

Sollen beide Werthe zusammentreffen, so hat man

$$1165 \,.\, c^2 = 885 \,.\, c^2 + 948 \,.\, c$$

oder

$$280 \,.\, c = 948$$

also

$$c = \frac{948}{280} = 3{,}38'$$

Die Pronysche Formel giebt daher $\frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}$ gröfser oder kleiner als die Chezysche, nachdem $c < 3{,}38$ oder $c > 3{,}38$ Par. Fufs ist.

§. 162.

Es bedarf nicht der wiederholten Erinnerung, dafs alle solche Bestimmungen nur Näherungsresultate geben können, und dieses nur bei *regulären* Kanälen. Unübersteigliche Schwierigkeiten stehen solchen Bestimmungen entgegen, wenn man natürliche Flufsbette betrachtet. Der Boden ist bald mit gröfseren bald mit kleineren Steinen mehr oder weni-

ger bedeckt, bald ist er im Steigen, bald im Fallen, bald kommt man auf hervorstehende Felsen, bald auf Vertiefungen; da findet man kein bestimmtes Breitenprofil auf etwas bedeutende Strecken, sondern ewige Wechsel in der Form und in der Gröſse.

Mit dem Allem ist Veränderlichkeit der Bewegung nothwendig verbunden. Wassermassen, die an Hindernisse im Bette anstoſsen, verlieren hier ganz oder zum Theil ihre Geschwindigkeit abwärts, sie erheben sich, vermischen sich mit dem fortflieſsenden oberen (der Oberfläche näher liegenden) Wasser, und dieses kann die beigetretene blos träge Masse nur mit Verlust eigener Geschwindigkeit mit sich fortführen. In einer nachfolgenden weiter abwärts liegenden Verengung des Bettes kann das Wasser nur mit vergröſserter Geschwindigkeit durchkommen; gröſsere Geschwindigkeit kann nur durch vergröſsertes Gefälle bewirkt werden, es muſs sich also hier das Wasser selbst einen stärkeren Abhang seiner Oberfläche bilden, was nur durch Aufstauung bewirkt werden kann, und diese Aufstauung wirkt wieder rückwärts auf mehr oder weniger bedeutende Strecken. Der Strom bildet demnach ein System von Massen, die alle mannichfaltig in einander wirken, bald Geschwindigkeit gewinnen, bald verlieren; er gleicht einer Maschine, deren innere Theile mit ihren gegenseitigen Wirkungen wir nicht kennen, von denen wir aber wissen, daſs sie unzähligen Wechseln mit ab- und zunehmenden Massen, mit ab- und zunehmenden Geschwindigkeiten, Hindernissen und Kräften unterworfen sind, und die sich ebendarum allen mathematischen Untersuchungen ganz entziehen. *La Place* bewies, daſs eine Mechanik des Himmels möglich war; aber eine Mechanik der Ströme in ihren natürlichen Betten übersteigt die Kräfte des menschlichen Wissens. In Bezug auf diesen Gegenstand verdienen die *Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst* von *Funk* (Lemgo 1808) und überhaupt die Schriften dieses Mannes, der den gröſsten Hydrotekten angereiht werden muſs, nachgelesen zu werden. *)

Die allzugroſsen Schwierigkeiten, in welche Untersuchungen der Art verwickeln, erlauben uns nicht, in diesem Werke uns darauf einzulassen, da schon die Betrachtung regulärer Kanäle so vieles zu wünschen übrig läſst. Auch ist es natürlich, in Bezug auf Bestimmungen bei schon vorhandenen Fluſsbetten hydrometrische Vermessungen zu Hülfe zu nehmen. Die allgemeine Anerkennung dieses Satzes hat aber mit Unrecht mehrere Hydrotechniker zu dem Ausspruche verleitet, daſs überhaupt alle hierher gehörige mathematische Untersuchungen und Formeln zur Darstellung der Bewegung flieſsender Wasser überflüssig und entbehrlich seyen, weil man sich auf wirkliche hydrometrische Vermessungen mit weit gröſserer Zuverlässigkeit verlassen könne. Sie haben dabei übersehen, daſs man bei erst noch anzulegenden Kanälen keine Geschwindigkeitsmessungen vornehmen kann, daſs man also bei solchen Anlagen, wo es doch immer auf reguläre Kanäle abgesehen ist, schon anderswoher wissen müsse, wie die Abmessungen des Kanals mit

*) Leider verstarb dieser verdienstvolle Hydrotechniker im Jahre 1823.

der Geschwindigkeit des Wassers und der Abflufsmenge zusammenhängen, um Gefälle, Breite und Tiefe eines Kanals zum voraus zweckmäfsig angeben zu können.

§. 163.

In dieser Ueberzeugung von der Wichtigkeit dieser Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Kanälen habe ich daher auch diesen Gegenstand immer einer grofsen Aufmerksamkeit werth geachtet; ich fühlte das Bedürfnifs bei eigenen mir anvertrauten praktischen Arbeiten noch vor der Erscheinung meines *Lehrbuchs der Hydraulik*. Darum machte ich meine Landesleute mit den Bemühungen von *Dubuat* und mit den neueren von *Prony* bekannt, und wagte mich späterhin selbst an eine neue Untersuchung, die man in den Abhandlungen der kön. Akademie der Wissenschaften zu München für das Jahr 1812 findet. In dieser Abhandlung habe ich die *Chezysche* Formel

$$M = \varphi \cdot \eta \cdot \sqrt{\frac{\zeta \eta}{\lambda \varkappa}}$$

wo φ in Bezug auf Par. Fufse $= 92{,}66$ oder schlechthin $= 92$ ist, zum Grunde gelegt.

Nur um für die unmittelbare Anwendung einen bestimmteren Ausdruck zu erhalten, und zugleich die Abmessungen des Kanals in die Formel zu bringen, setzte ich die von *Chezy* angenommene unveränderliche Wassertiefe mn (*Fig.* 67) $= h$, die mittlere Profilbreite $\alpha\beta = b$, also Profilfläche $\eta = bh$, und $ac + cd + bd$ oder $\varkappa = b + 2h$; man sieht, dafs dieser Ausdruck für $\varkappa$ *hier* gar wohl gestattet ist. Dieses giebt nun

187.) $$M = \varphi \cdot bh \cdot \sqrt{\frac{\zeta b h}{\lambda\,(b + 2h)}} = \cdot \varphi \cdot \sqrt{\frac{\zeta b^3 h^3}{\lambda \cdot (b + 2h)}}$$

Wegen der unbedeutenden Abänderung nenne ich auch noch diese Formel die *Chezysche*.

Anstatt aber mit *Chezy* die Wassertiefe als unveränderlich anzusehen, liefs ich h nur für die Wassertiefe am Anfange des regulirten Abflusses (s. §. 182.) gelten, betrachtete die Oberfläche des Wassers längs dem Kanale als eine schiefe Ebene, wobei ich die Wassertiefe am Ende des Kanals mit H bezeichnete, drückte alle Wassertiefen zwischen h und H durch eine veränderliche Gröfse u aus, und setzte hiernach die zu jeder Tiefe u gehörige Geschwindigkeit

$$c = \varphi \cdot \sqrt{\frac{\zeta b}{\lambda} \cdot \frac{u}{b + 2u}}\,.$$

Mittelst der Differentialrechnung suchte ich nun das arithmetische Mittel der zu allen möglichen Werthen von u, die zwischen h und H fallen, gehörigen Werthe von c, und fand

188.) $$c = \varphi \cdot \sqrt{\frac{\zeta b}{\lambda}\left(0{,}5 - \frac{b}{4\,(h - H)} \cdot [\text{logn.}\,(b + 2h) - \text{logn.}\,(b + 2H)]\right)}$$

Setzen wir den Abhang des *Bodens* auf die Länge $\lambda = \varepsilon$, so ist $\zeta = \varepsilon + h - H$.

Ist jetzt b die mittlere Breite des *ganzen* Kanals, so kommt das Gefälle ζ der Wassermasse $H \,.\, b \,.\, \lambda$ (zwischen der Oberfläche op (*Fig.* 68) und der parallelen mn) zu; die wirklich in Bewegung befindliche Wassermasse ist aber $= \frac{H + h}{2} \,.\, b\lambda$. Darum setzte ich das Gefälle für die gesammte Wassermasse $= \frac{H \,.\, b \,.\, \lambda}{\frac{H + h}{2} \,.\, b\lambda} \,.\, (\varepsilon + h - H)$, also $\frac{2H \,.\, (\varepsilon + h - H)}{H + h}$ statt ζ, und hiermit gab sich

$$189.) \quad M = \varphi \,.\, bh \,.\, \sqrt{\left(\frac{bH \,.\, (\varepsilon + h - H)}{\lambda \,.\, (h + H)} \times \left(1 - b \,.\, \frac{ln \,.\, (b + 2h) - ln \,.\, (b + 2H)}{2 \,.\, (h - H)}\right)\right)}$$

Mittelst der Differentialrechnung ergiebt sich hieraus wieder die Chezysche Formel, sobald $H = h$ wird.

§. 164.

Bei einem nicht parallelepipedischen Kanale z. B. wie *Fig.* 67, ist die Breite des darin fliefsenden Wassers selbst eine veränderliche Gröfse, worauf dann im Werthe von b als dem mittleren *aller* Breiten gehörige Rücksicht genommen werden mufs.

Es kann sich aber auch der Kanal abwärts gleichförmig (mit *divergirenden* Wänden) erweitern, oder (mit *konvergirenden* Wänden) verengen. Auch für diesen Fall habe ich a. a. O. die Formel zu verallgemeinern gesucht, und den nachstehenden Ausdruck gefunden

$$190.) \quad \frac{M^2 \lambda}{\varphi^2 \,.\, bh} = (\varepsilon + h - H) \times \left(\frac{(h - H) \,.\, b + \frac{B - b}{N} \,.\, \left(H + (h - H) \,.\, \frac{N - 2(b + 2H)}{2N}\right)}{+ \left\{ \frac{bH}{N} - \frac{(B - b) \,.\, H + (h - H) \,.\, b}{N^2} \,.\, (b + 2H) + \frac{(B - b) \,.\, (h - H) \,.\, (b + 2H)^2}{N^3} \right\} \times (logn. (B + 2h) - logn. (b + 2H))} \right)$$

wo $N = B - b + 2 \,.\, (h - H)$ ist, b die mittlere Breite des obersten, und B die mittlere des untersten Querschnitts bezeichnet.

Für $H = h$ erhält man hieraus wieder die *Chezysche* Formel.

§. 165.

Bisher hatte ich noch angenommen, dafs die Bewegung in Bezug auf die Abflufsmenge so betrachtet werden könne, als bildete die Oberfläche des Wassers eine schiefe Ebene, welches bei dieser nur auf Näherung abzweckenden Untersuchung auch wohl gestattet ist.

Eigentlich ist aber $\frac{\zeta}{\lambda}$ bei einem und demselben Kanale, wenn nicht $H = h$ ist, eine veränderliche Gröſse, und ich habe deſshalb in gedachter Schrift noch eine zweite Methode zu Verallgemeinerung der Chezyschen Formel gebraucht, indem ich mit Anwendung der Differentialrechnung

$$\frac{\zeta}{\lambda} = -\frac{d\left(y + \frac{\lambda - x}{\lambda} \cdot \varepsilon\right)}{dx}$$

setze, wo x eine von einem beliebigen Punkte des Kanals abwärts genommene Länge desselben, und y die Wassertiefe am Ende dieser Strecke bezeichnet. Hiernach wird

$$\frac{M^2}{\varphi^2} = \frac{b^3 y^3 \cdot (\varepsilon\, dx - \lambda\, dy)}{\lambda \cdot (b + 2y) \cdot dx} \quad (\odot$$

also $$\frac{M^2}{\varphi^2} \cdot x = \frac{b^3}{\lambda} \cdot \left(\int \frac{\varepsilon y^3\, dx}{b + 2y} - \int \frac{\lambda y^3\, dy}{b + 2y}\right)$$

Um die erste Integration zu erleichtern, setzte ich für sie $\frac{h + H}{2}$ statt y, also

$$\int \frac{\varepsilon y^3\, dx}{b + 2y} = \frac{\varepsilon \cdot (h + H)^3}{8 \cdot (b + h + H)} \cdot x$$

Hiernach ergab sich für die Länge λ

191.) $$\frac{M^2 \lambda}{\varphi^2} = \frac{b^3}{16} \times$$
$$\left(\frac{2\varepsilon \cdot (h + H)^3}{b + h + H} + \frac{(b + 2h)^3 - (b + 2H)^3}{3} - 1{,}5 \cdot b \cdot ((b + 2h)^2 - (b + 2H)^2) + 6 \cdot b^2 \cdot (h - H) - b^3 \cdot (\text{logn.}\,(b + 2h) - \text{logn.}\,(b + 2H))\right)$$

Auch diese Formel verwandelt sich in die einfache Chezysche, sobald $H = h$ wird. (S. a. a. O. S. 102).

Hier, wo B nicht vorkommt, nimmt man für b die mittlere Breite längs dem ganzen Kanale.

§. 166.

Die Vorstehenden Formeln aus der gedachten Abhandlung sind bei weitem weniger beschränkt, als die von *Chezy*, *Dubuat* und *Prony*; sie gewähren, weil sie ε (den Abhang des *Bodens*) statt ζ (d. h. statt des Abhangs der Wasserfläche) enthalten, den groſsen Vortheil, eines von den zum Kanal selbst gehörigen Bestimmungsstücken in die Formel eingeführt zu haben, das uns bei der Anlage von Wichtigkeit ist und das wir in unserer Gewalt haben. Wir dürfen nunmehr nur $\varepsilon = o$ setzen, um die Bestimmungen für *horizontale* Kanäle zu erhalten. In diesem Falle verschwindet $\int \frac{\varepsilon y^3\, dx}{b + 2y}$ und wir erhalten die völlig scharfe Integralgleichung.

$$192.)\quad \frac{M^2\lambda}{\varphi^2} =$$

$$\frac{b^3}{16}\left(\begin{array}{l}\dfrac{(b+2h)^3-(b+2H)^3}{3}-1{,}5\,.\,b\,((b+2h)^2-(b+2H)^2)\\ +\,6\,.\,b^2\,(h-H)-b^3\,.\,(ln.\,(b+2h)-ln.\,(b+2H))\end{array}\right)$$

und $$193.)\quad M = \frac{\varphi b}{4}\times$$

$$\sqrt{\frac{b}{\lambda}\,.\left(\begin{array}{l}\dfrac{(b+2h)^3}{3}-1{,}5\,.\,b\,.\,(b+2h)^2+6\,.\,b^2h-b^3\,.\,ln.\,(b+2h)\\ -\left(\dfrac{(b+2H)^3}{3}-1{,}5\,.\,b\,.\,(b+2H)^2+6\,.\,b^2H-b^3\,.\,ln.\,(b+2H)\right)\end{array}\right)}$$

Ex. Bei einem schon angelegten parallelepipedischen horizontalen Kanale sey $\lambda = 1000'$, $b = 10'$, $h = 4'$ und $H = 3{,}5'$; so wird

$$b + 2h = 18 \qquad b + 2H = 17$$
$$(b + 2h)^2 = 324 \qquad (b + 2H)^2 = 289$$
$$(b + 2h)^3 = 5832 \qquad (b + 2H)^3 = 4913$$
$$ln.\,(b + 2h) = 2{,}8903717 \qquad ln.\,(b + 2H) = 2{,}8332133$$

$$\frac{16\,.\,\lambda}{b^3\,.\,\varphi^2} = \frac{16000}{1000\,.\,\varphi^2} = \frac{16}{\varphi^2}$$

wo wir dann in Bezug auf Fuſse allemal $\varphi = 92$ setzen können, also $\varphi^2 = 8464$. Hiernach wird nun

$$\frac{16\,.\,M^2\lambda}{b^3\varphi^2} \text{ oder } \frac{16\,.\,M^2}{\varphi^2} = \left(\begin{array}{l}1944-4860+2400-2890\\ -(1637-4335+2100-2833)\end{array}\right) = 25$$

also $$M = \frac{92\,.\,5}{4} = 115 \text{ Kubikfuſs.}$$

Die Geschwindigkeit des Wassers ist also

1.) wo $h = 4'$ ist, $= \dfrac{115}{4\,.\,10} = 2{,}875'$

2.) wo $H = 3{,}5$ ist, $= \dfrac{115}{3{,}5\,.\,10} = 3{,}286'$

§. 167.

Aber bei einem erst noch anzulegenden Kanale, wo sich der eigentliche Nutzen solcher Berechnungen zeigen soll, zeigt sich in der Anwendung eine neue Schwierigkeit: wie groſs soll man, wenn λ, b und h gegeben sind, H annehmen, um M zu bestimmen?

Hier unterschied ich in jener Abhandlung *freien* Lauf und *versperrten* Lauf; letzterer tritt nämlich ein, wenn dem abflieſsenden Wasser am Ende der Länge λ z. B. ein Damm, über den es sich erheben muſs, oder eine Fallschütze, die ihm einen Durchgang gewährt,

entgegengesetzt wird. Im letzteren Falle kann H jeden möglichen Werth haben, bei welchem $H < h + \varepsilon$ bleibt, so daſs im horizontalen Kanale nur $H < h$ bleiben muſs; es dürfte z. B. $H = 0{,}99 \cdot h$ seyn, um jede verlangte Wassermenge in 1 Sekunde abzuführen, wenn nur b groſs genug genommen wird.

Im freien Kanale aber muſs der Wasserspiegel diejenige Neigung annehmen, bei welcher die gröſstmögliche Wassermenge abflieſsen kann. In der Anwendung auf den horizontalen Kanal müſste daher, wie es scheint

$$\frac{d\left(-\frac{(b+2H)^3}{3} + 1{,}5 \cdot (b+2H)^2 - 6 \cdot b^2 H + b^3 \cdot ln.\,(b+2H)\right)}{d\,H}$$

$= o$ seyn. Setzt man $b + 2H = z$, so erhält man

$$\frac{d\left(-\tfrac{1}{3} z^3 + 1{,}5\, bz^2 - 6 \cdot b^2 \cdot \frac{z-b}{2} + b^3 \cdot ln.\, z\right)}{\tfrac{1}{2}\, d\, z} = o$$

also auch $$\frac{d\,(\tfrac{1}{3} z^3 - 1{,}5 \cdot bz^2 + 3b^2 z - b^3 \cdot ln.\, z)}{d\, z} = o$$

Daher $$z^2 - 3bz + 3b^2 - \frac{b^3}{z} = o$$

oder $$z^3 - 3bz^2 + 3b^2 z - b^3 = o$$

d. i. $$(z - b)^3 = o, \text{ also } z = b \text{ und } H = o.$$

Diese Differentiirung hatte ich a. a. O. unterlassen, und dagegen nur Proberechnungen angestellt, diese aber nicht gehörig fortgesetzt. Ihre Fortsetzung würde sonst dasselbe Resultat gegeben haben, daſs nämlich bei einem bestimmten Werthe von h wirklich für $H = o$ die Formel das Maximum von M giebt. Daſs aber ein solches Maximum von M für $H = o$ nicht eintreten kann, ist für sich offenbar, und ich benutze darum diese Gelegenheit, den dort eingeschlichenen Fehler hier zu bemerken.

§. 168.

Ich habe nun hier den Umstand, welcher die Formeln der französischen Schriftseller auf horizontale Kanäle unanwendbar macht, auf eine neue Weise zu beseitigen gesucht.

Allerdings muſs man den Satz gelten lassen; daſs die kleinste Tiefe H bald und nicht erst am Ende eines langen Kanals eintritt. Man wird mit Sicherheit annehmen können, daſs schon auf eine Länge von $50 \cdot (\varepsilon + h)$ in allen Fällen die Bewegung des Wassers gleichförmig geworden ist, in einzelnen Fällen auch noch früher, was hier gleichgültig ist.

Jene Hindernisse der Bewegung, welche nach unserer Rechnung bis zur Länge λ mit zunehmender Geschwindigkeit eine Summe von Widerständen erzeugen, welche die Bestimmung der kleinsten Wassertiefe H zur Folge hätten, treten der Erfahrung zu Folge schneller ein, so daſs die kleinste Tiefe, über welche hinaus dann wegen eingetretener

Gleichheit zwischen beschleunigender Kraft und Widerstand die Bewegung gleichförmig bleibt, schon frühe hergestellt wird. Dieses gilt selbst für horizontale Kanäle; das von der Wassertiefe h abwärts fliefsende Wasser mufs, wegen des mit der zunehmenden Geschwindigkeit zugleich wachsenden Widerstandes auch in diesen bald zur gleichförmigen Bewegung kommen. Allemal tritt daher bald der von den französischen Ingenieurs angenommene Parallelismus ein, auf den aber, für $H = h$ und $\varepsilon = o$, ihre Formeln unanwendbar bleiben.

In dieser Schrift ist es Hauptzweck, alle Bestimmungen möglichst zu vereinfachen, und ich habe defshalb jetzt wieder eine

Neue Untersuchung über die Bewegung des Wassers in regulären Kanälen

angestellt, die ich hier nur zum weiteren Nachdenken vorlege. (s. §. 178).

§. 169.

Wie die Wassermenge M, für jede Sekunde in den Kanal eingelassen wird, gilt hier gleich. Hat man vor dem Kanale eine Fallschütze und einen bedeutend hohen Wasserstand, so darf die Fallschütze nur wenig aufgezogen werden z. B. nur 2 Zoll hoch; das Wasser strömt dann mit grofser Schnelligkeit in den Kanal; diese Geschwindigkeit wird sogleich durch die mannichfaltigen Hindernisse sehr vermindert; es erfolgt eine unordentliche Bewegung mit Aufwallungen und Rückstürzungen, bis eine nach einem bestimmten Gesetze fortdauernde regulirte Bewegung eintritt. Die Stelle wo dieses geschieht, gilt hier als Anfang des regulirten Kanals, und die hier sich bildende Wassertiefe bezeichnen wir mit $\mathfrak{h}$, von der dann die Tiefe noch bis zu der unveränderlichen h zunehmen kann.

Ist die Geschwindigkeit des Wassers am Anfange des Kanals klein, so kann, wenn ε grofs genug ist, die Geschwindigkeit im Kanale noch zunehmen, so dafs die Wassertiefen bis zu der Stelle, wo der Widerstand der bewegenden Kraft gleich wird, immer abnehmen, und nun an dieser Stelle, wo das Wasser seine kleinste Tiefe erlangt hat, solches seinen Lauf mit gleichförmiger Bewegung fortzusetzen anfängt. Die Entfernung der Tiefen $\mathfrak{h}$ und h bezeichnen wir mit λ. Die h wird dann nach Beschaffenheit des Werthes von ε ein *Maximum* (wie im erwähnten ersten Falle) oder ein *Minimum* (wie im erwähnten zweiten Falle).

Die Verhältnifszahl $\frac{\varsigma}{\lambda}$ kann durchaus nicht auf den Theil des Kanals bezogen werden, in welchem die Bewegung schon gleichförmig geworden ist, also der Parallelismus zwischen der Wasserfläche und dem Kanalboden Statt hat.

Diesen unrichtigen Bezug hat Chezy angenommen, was dann die Unanwendbarkeit seiner Formel auf horizontale Kanäle zur nothwendigen Folge haben mufste. Im horizontalen Kanale

ist der Abhang des Bodens $= o$, also müſste man für horizontale Kanäle $\varepsilon = o$ setzen, was dann auch $M = o$ gäbe, da wir doch auch in horizontalen Kanälen bei hinlänglicher Breite jede verlangte Wassermenge ableiten können.

Die Chezysche Formel bedarf also (wie alle Formeln französischer Ingenieurs) einer wesentlichen Abänderung, die darauf beruht, daſs im oberen Theile des Kanals zwischen den Tiefen $\mathfrak{h}$ und h eigentlich nie der Parallelismus Statt hat, am allerwenigsten im horizontalen Kanale, wo nothwendig $h < \mathfrak{h}$ werden muſs, und daſs wir nur diesen oberen Theil zu betrachten haben, dessen Länge durch λ bezeichnet wird, daſs also auch ε den Abhang des Bodens auf diese Länge λ ausdrückt. Es kann aber in einzelnen Fällen λ die Länge des ganzen Kanals übertreffen, so daſs die Bewegung nirgends gleichförmig wird.

§. 170.

Wir könnten uns zuerst einen Kanal denken, wo h ein *Minimum*, also $h < \mathfrak{h}$ wäre Aber das für diesen Fall aufgefundene Bewegungsgesetz ist keineswegs auf die Voraussetzung $h < \mathfrak{h}$ beschränkt, sondern muſs, wenn es der Natur der Sache angemessen seyn soll, auch für $h > \mathfrak{h}$ anwendbar bleiben. Die Geschwindigkeit des Wassers bei der gleichförmigen Bewegung sey $= c$, so setze ich hypothetisch

$$c = \varphi \cdot \sqrt{\frac{b\mathfrak{h} \cdot (\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{\lambda \cdot (b + 2\mathfrak{h})} \cdot \frac{2\mathfrak{h}}{h + \mathfrak{h}}}$$

$$= \varphi \cdot \sqrt{\frac{2b\mathfrak{h}^2 \cdot (\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot \lambda}}$$

oder 193.*)

$$\begin{cases} c = \varphi \cdot \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\dfrac{2b \cdot (\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot \lambda}} \\ M = \varphi \cdot bh \cdot \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\dfrac{2b \cdot (\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot \lambda}} \end{cases}$$

Für $h = \mathfrak{h}$ erhält man die Chezysche Formel wieder; für $\mathfrak{h} > h$ erhält man einen gröſsern Werth von c und von M, und für $\mathfrak{h} < h$ kleinere Werthe als nach Chezy, wenn gleich die Höhe h bei mir und bei Chezy einerlei angenommen wird, was dann auch der Natur der Sache angemessen ist. Denn die Geschwindigkeit in der Höhe h hängt nicht einzig von der Höhe h ab, sondern zugleich von der Geschwindigkeit, mit welcher die Wassertheilchen in der Höhe ankommen, also zugleich von $\mathfrak{h}$.

F r e i e K a n ä l e.

§. 171.

Für freie Kanäle (d. h. in welchen der Bewegung des Wassers nirgends eine Fallschütze u. dgl. im Wege steht) ist allemein

194.) $$M^2 = 2\varphi^2 \cdot b^3 h^2 \mathfrak{h}^2 \cdot \frac{\varepsilon + \mathfrak{h} - h}{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot \lambda}$$

Differentiirt man hier nach h, so erhält man für das Maximum von M, also für den *freien* Kanal

$$195.)\quad h = -\frac{2\mathfrak{h} - \varepsilon}{4} + \sqrt{\left(\left(\frac{2\mathfrak{h} - \varepsilon}{4}\right)^2 + \varepsilon\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^2\right)}$$

welches auch gröſser als $\mathfrak{h}$ werden kann.

Für *horizontale* Kanäle ist $\varepsilon = o$, also

$$h = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{h} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{h}^2)} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{h} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\cdot\sqrt{5}$$

oder $$196.)\quad h = 0{,}62 \cdot \mathfrak{h} \text{ und } \mathfrak{h} = 1{,}61 \cdot h$$

Setzt man diesen Werth in No. 194., so wird

$$M^2 = 2\,\varphi^2 \cdot b^3 \cdot 2{,}59 \cdot h^4 \cdot \frac{0{,}61 \cdot h}{(b + 3{,}22 \cdot h) \cdot 2{,}61 \cdot h \cdot \lambda}$$

oder $$M^2 = 5{,}18 \cdot \varphi^2 \cdot b^3 \cdot h^4 \cdot \frac{0{,}61 \cdot h}{(2{,}61 \cdot bh + 8{,}40 \cdot h^2) \cdot \lambda}$$

also für *horizontale* Kanäle

$$197.)\quad M^2 = 3{,}16 \cdot \varphi^2 \cdot b^3 \cdot \frac{h^4}{(2{,}61 \cdot b + 8{,}40 \cdot h) \cdot \lambda}$$ (siehe unten No. 427. bis 429.)

Dabei hat φ^2 allemal eine Abmessung, und es ist in Bezug auf Par. Fuſse $\varphi = 92$; $\varphi^2 = 8464$.

Ex. Es sey $b = 10'$, $h = 2'$, $\lambda = 4000'$, so wird

$$M^2 = 3{,}16 \cdot 8464 \cdot 1000 \cdot \frac{16}{(26{,}1 + 16{,}8) \cdot 4000} = 2494$$

Daher genau genug $M = 50$ Kubikfuſs; dabei wäre $\mathfrak{h} = 3{,}22'$, und $c = \frac{M}{bh} = \frac{50}{20} = 2{,}5'$.

Verlangen wir also, daſs die Entfernung der beiden Tiefen $\mathfrak{h}$ und h 4000′ betrage, so müssen wir in jeder Sekunde 50 Kubikfuſs Wasser einlassen.

Sollte diese Entfernung nur 1000′ betragen, so müſsten wir in jeder Sekunde 2 . 50 oder 100 Kubikfuſs einlassen; in diesem Falle würde $c = \frac{100}{20} = 5'$.

Es darf aber c weder merklich kleiner als 1′, noch merklich gröſser als 6′ werden, weil wir noch nicht hinlängliche Erfahrungen für Geschwindigkeiten ausser diesen Grenzen haben.

§. 172.

Die allgemeine Gleichung (No. 195.) giebt für alle freie Kanäle

$$198.)\quad \mathfrak{h} = -\frac{\varepsilon - h}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(5h^2 - 6\varepsilon h + \varepsilon^2)}$$

Diesen Werth für $\mathfrak{h}$ in (No. 194.) gebraucht giebt den Werth von M für freie Kanäle.

§. 173.

Sind b, h und M vorgeschrieben, so müssen λ und ε zugleich gesucht werden, was die Berechnung etwas mühsam macht, weil man auch $\mathfrak{h}$ wissen muſs, und die Berechnung den Werth von ε schon voraussetzt. Inzwischen muſs das Gefälle E des ganzen Kanals, dessen Länge wir $= L$ setzen wollen, allemal gegeben seyn, also die Verhältniſszahl $\frac{E}{L}$, die mit $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ einerlei ist. Man setzt daher

$$M^2 = \varphi^2 b^2 h^2 \mathfrak{h}^2 \cdot \frac{2b \cdot \frac{E}{L} + \frac{2b \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\lambda}}{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h})}$$

Dieses giebt $\frac{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot M^2}{\varphi^2 b^2 h^2 \mathfrak{h}^2} - \frac{2bE}{L} = \frac{2b \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\lambda}$

und

$$199.)\quad \lambda = \frac{2b \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\frac{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot M^2}{\varphi^2 b^2 h^2 \mathfrak{h}^2} - \frac{2bE}{L}}$$

Man darf aber $\frac{E}{L}$, b, h, $\mathfrak{h}$ und M nicht alle nach Willkühr annehmen, um hiernach λ zu bestimmen, indem den 3 Gleichungen No. 187, 198 und 199 Genüge geschehen muſs. Hier ist nämlich (nach No. 187.) $\frac{E}{L} = \frac{(b + 2h) \cdot M^2}{\varphi^2 b^3 h^3}$, und dieser Bestimmung muſs in dem unteren Theil des Kanals, worin die Bewegung schon gleichförmig geworden ist, Genüge geschehen; es ist $\frac{E}{L}$ mit $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ einerlei, und es ist allemal $\lambda = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{E}{L}\right)}$. Dieses giebt uns

$$200.)\quad \lambda = \frac{\varphi^2 \varepsilon b^3 h^3}{(b + 2h) \cdot M^2}$$

Aus No. 199 wird

$$\lambda = \frac{2b \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\frac{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot M^2}{\varphi^2 b^2 h^2 \mathfrak{h}^2} - \frac{2b \cdot (b + 2h) \cdot M^2}{\varphi^2 b^3 h^3}}$$

$$= \frac{2\varphi^2 b^3 h^2 \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\left(\frac{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h})}{\mathfrak{h}^2} - \frac{2b \cdot (b + 2h)}{bh}\right) \cdot M^2}$$

$$= \frac{2\varphi^2 \cdot b^4 h^3 \cdot \mathfrak{h}^2 \cdot (\mathfrak{h} - h)}{[(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot bh - 2b \cdot (b + 2h) \cdot \mathfrak{h}^2] \cdot M^2}$$

oder

$$= \frac{2\varphi^2 b^3 h^3 \mathfrak{h}^2 \cdot (\mathfrak{h} - h)}{[(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot h - 2(b + 2h) \cdot \mathfrak{h}^2] \cdot M^2}$$

Der Nenner ist $= [bh \cdot (b + 3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 (b + h)] \cdot M^2$

Daher

$$201.)\quad \lambda = \frac{2\varphi^2 b^3 h^3 \mathfrak{h}^2 (\mathfrak{h} - h)}{[bh \cdot (b + 3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 \cdot (b + h)] \cdot M^2}$$

Diesen Werth dem No. 200. gleich gesetzt, giebt

$$\frac{\Phi^2 b^3 h^3 \varepsilon}{(b+2h) \cdot M^2} = \frac{2\Phi^2 \cdot b^3 h^3 \mathfrak{h}^2 (\mathfrak{h}-h)}{[bh \cdot (b+3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 (b+h)] \cdot M^2}$$

also 202.) $$\varepsilon = \frac{2\mathfrak{h}^2 \cdot (\mathfrak{h}-h) \cdot (b+2h)}{bh \cdot (b+3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 \cdot (b+h)}$$

$$\left(\text{auch nunmehr } \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{(b+2h)\, M^2}{\Phi^2 \cdot b^3 h^3}\right)$$

wo die $\mathfrak{h}$ wiederum nicht nach Willkühr angenommen werden darf, sondern so genommen werden muſs, wie es zugleich der Bestimmung No. 198. gemäſs ist. Durch diese beiden Gleichungen sind nun zwar $\mathfrak{h}$ und ε bestimmt; aber die Entwickelung einer dieser beiden Gröſsen führt allemal auf eine Gleichung von sehr hohem Grade, aus der ihr numerischer Werth doch nur durch weitläuftige Proberechnungen gefunden werden könnte. Ich gebe deſshalb diesen Weg hier auf, und gebrauche die Gleichungen lieber so, wie sie da stehen, unmittelbar zu Proberechnungen.

Hat man ε gefunden, so giebt nunmehr für jeden vorgeschriebenen Werth von M die Formel No. 200. den Werth von λ.

Ex. Es sey $h = 2'$, $b = 10'$; es sollen in jeder Sekunde 60 Kubikfuſs Wasser abgeleitet werden: man sucht $\mathfrak{h}$, ε und λ.

Hierzu dienen die Formeln No. 198 und 200.

1.) Es sey $\mathfrak{h} = 2{,}4'$; so wird

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 5{,}76 \cdot 0{,}4 \cdot 14}{20 \cdot 17{,}2 - 2 \cdot 5{,}76 \cdot 12} = 0{,}313'$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1{,}687}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(20 - 3{,}756 + 0{,}098)} = 2{,}874'$$

Es ist also $\mathfrak{h}$ zu klein angenommen worden.

2.) Wir nehmen nun einen Zwischenwerth zwischen 2,4 und 2,874 z. B. $\mathfrak{h} = 2{,}7$. Dieses giebt

$$\varepsilon = \frac{14{,}58 \cdot 0{,}7 \cdot 14}{20 \cdot 18{,}1 - 14{,}58 \cdot 12} = 0{,}764$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1{,}236}{2} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(20 - 9{,}168 + 0{,}583)} = 2{,}344$$

3.) Wir nehmen aufs Neue einen Zwischenwerth zwischen 2,7 und 2,344 z. B. $\mathfrak{h} = 2{,}52$; dieses giebt

$$\varepsilon = \frac{12{,}7 \cdot 0{,}52 \cdot 14}{20 \cdot 17{,}56 - 12{,}7 \cdot 12} = 0{,}465$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1{,}535}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(20 - 5{,}580 + 0{,}216)} = 2{,}753$$

4.) Nehmen wir $\mathfrak{h} = 2{,}6$; so wird

$$\varepsilon = \frac{13{,}52 \,.\, 0{,}6 \,.\, 14}{20 \,.\, 17{,}8 - 13{,}52 \,.\, 12} = 0{,}586$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1{,}414}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(20 - 7{,}032 + 0{,}342)} = 2{,}48$$

5.) Man kann nunmehr $\mathfrak{h} = 2{,}58'$ setzen. Die Berechnung giebt

$$\varepsilon = \frac{13{,}313 \,.\, 0{,}58 \,.\, 14}{20 \,.\, 17{,}74 - 13{,}313 \,.\, 12} = 0{,}554$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1{,}446}{2} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(20 - 6{,}648 + 0{,}308)} = 2{,}57'$$

Demnach (No. 200)

$$\lambda = \frac{8464 \,.\, 0{,}554 \,.\, 8000}{14 \,.\, 3600} = 744'$$

auch $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ oder $\frac{E}{L} = \frac{0{,}554}{744} = 0{,}000745$

Wäre die Länge des ganzen Kanals $L = 4000'$, so müfste man seinem Boden ein Gefälle $E = 4000 \,.\, 0{,}000745 = 2{,}98'$ oder $= 3'$ geben.

§. 174.

Findet man $\lambda > L$, so kommt das Wasser im ganzen Kanale nirgends zur gleichförmigen Bewegung. Verlangte man im vorigen Exempel nur $M = 10$ Kubikfufs für jede Sekunde, so hätte man im Nenner des Werthes von λ nur 100 ($= M^2$) statt 3600, also $\lambda = 36 \,.\, 744 = 26784'$. Wäre also der Kanal eine Meile lang, so käme das Wasser doch noch nicht zur gleichförmigen Bewegung. In diesem Falle würde auch die Wasserhöhe $\mathfrak{h}$ innerhalb dem Kanale nicht bis zu der vorgeschriebenen h abnehmen, sondern bis ans Ende des Kanals gröfser als h bleiben; weil nun dennoch die vorgeschriebene Wassermenge M in jeder Sekunde abfliefsen soll, so ist der Erfolg hiervon blos der, dafs $\mathfrak{h}$ einen andern Werth erhält. Ist nämlich die Länge des ganzen Kanals in diesem Falle $= \lambda'$, und der Abhang des Bodens auf diese Länge $= \varepsilon'$, so wird $\varepsilon' = \frac{\lambda'}{\lambda} \,.\, \varepsilon$, und nun nach No. 198

$$203.)\quad \mathfrak{h} = \frac{h - \varepsilon'}{2} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(5h^2 - 6\,\varepsilon' h + \varepsilon'^2)}$$

wo dann h die Wassertiefe am Ende der Länge λ' wäre, die man vorhin vorgeschrieben hatte. Wäre im vorigen Exempel λ' nur $= 500'$, so hätte man $\varepsilon' = \frac{500}{744} \,.\, 0{,}554' = 0{,}372'$; also

$$\mathfrak{h} = \frac{2 - 0{,}372}{2} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(20 - 4{,}464 + 0{,}242)} = 2{,}8'$$

Das Wasser würde also jetzt am Anfange des Kanals 2,8' tief stehen, und am Ende 2' tief; der Abhang seiner Oberfläche wäre $0{,}372 + 0{,}8 = 1{,}172'$.

§. 175.

Es sey (vom Anfange des Kanals, wo die Wassertiefe $= \mathfrak{h}$ ist, herabgemessen) λ'' ein Theil von λ d. h. von dem oberen Stück des Kanals, in welchem die Bewegung noch nicht gleichförmig geworden ist, und die Wassertiefe am Ende von $\lambda'' = \mathfrak{h}''$, so läſst sich bei ungeänderten Werthen von λ, ε, b, $\mathfrak{h}$ und M für jede Länge λ''. ($< \lambda$) Die Wassertiefe $\mathfrak{h}''$ hier genau genug

$$= h + \frac{\lambda - \lambda''}{\lambda} \cdot (\mathfrak{h} - h) = \mathfrak{h} - \frac{\lambda''}{\lambda} \cdot (\mathfrak{h} - h) \text{ setzen.}$$

Ob wir gleich im bisherigen Vortrage den Kalkul ganz methodisch behandelt haben, als ob die Grundformel (No. 193.) ihre völlige Richtigkeit hätte, so darf man doch nie vergessen, daſs solche nur als beiläufige Bestimmung gelten kann, aus der sich die Gestalt der Oberfläche auf keine Weise ableiten läſst. Eine kleine Abänderung im Werthe von $\mathfrak{h}$ könnte schon einen bedeutenden Einfluſs auf den Werth von $\mathfrak{h}''$ haben. Dagegen kann die jedesmalige Tiefe $\mathfrak{h}''$, welche zu λ'' gehört, nie viel, d. h. um keinen bedeutenden aliquoten Theil, von demjenigen Werthe von $\mathfrak{h}''$ abweichen, welchen die Voraussetzung giebt, daſs die Oberfläche des Wassers zwischen den beiden Tiefen $\mathfrak{h}$ und h eine schiefe Ebene sey.

Hat übrigens das Wasser einmal die gleichförmige Bewegung erlangt d. h. hat man $\lambda < L$ befunden, so dauert die Bewegung unterhalb λ immer gleichförmig fort; es bleibt durchaus auf die ganze Länge $L - \lambda$ die Wassertiefe h unveränderlich, also die Oberfläche des Wassers dem Boden parallel. Ganz anders verhält sich die Sache in Bezug auf

Versperrte Kanäle.

§. 176.

Wird am Ende des Kanals z. B. eine Fallschütze niedergelassen, bis unter die Oberfläche des frei abflieſsenden Wassers, so haben wir einen *versperrten* Kanal.

Wir setzen wie bisher seine ganze Länge $= L$, den Abhang des Bodens auf diese Länge $= E$, den oberen Theil des Kanals, in welchem das Wasser noch mit ungleichförmiger Bewegung abflieſst, $= \lambda$, den Abhang auf diese Länge $= \frac{\lambda}{L} \cdot E = \varepsilon$; die Wassertiefe am Anfange von $\lambda = \mathfrak{h}$, am Ende von $\lambda = h$, am Ende von L, nach willkührlicher oder auch vorgeschriebener Herablassung der Fallschütze, $= H$, so ist allemal, wegen der nothwendigen Aufstauung, $H > h$, oft auch $> \mathfrak{h}$.

Auch auf diesen Fall sind die Formeln der französischen Ingenieurs ganz unanwendbar.

§. 177.

Ich setze fürs Erste $\lambda < L$, und nehme L so groſs an, daſs die sich rückwärts verbreitende Aufstauung nicht bis zum unteren Ende von λ reiche, daſs also die Wassertiefe

an der obern Grenze der Rückstauung noch $= h$ sey. In wiefern oder unter welchen Umständen diese Voraussetzung gelten kann, wird sich aus der ferneren Untersuchung ergeben. Es versteht sich, daſs hier wiederum nur von beiläufigen Untersuchungen die Rede seyn kann.

Wir haben hiernach jetzt 3 Abtheilungen des Kanals zu betrachten:

1.) den *oberen* Theil $ab = \lambda$ (*Fig.* 69), in welchem die Bewegung noch ungleichförmig, $a\alpha = \mathfrak{h}$, und $b\beta = h$ ist.

2.) den *mittleren* $bc = m$, wo die Bewegung gleichförmig, also $c\gamma = b\beta = h$ ist.

3.) den *unteren* $cd = u$, wo die Bewegung wieder ungleichförmig, $d\delta = H$ und $c\gamma =$ h ist, und allemal $d\delta > c\gamma$ oder $H > h$ seyn muſs.

Ist dk horizontal, ak lothrecht, so ist $ak = E$, $da = L$. Für den unteren Theil cd wird No. 194. so gebraucht, daſs wir darin h statt $\mathfrak{h}$, H statt h, u statt λ und $\frac{u}{L}$. E statt ε schreiben. Dieses giebt hier

$$204.)\quad M^2 = 2\varphi^2 \,.\, b^3 H^2 \,.\, h^2 \,.\, \frac{\frac{u}{L} \,.\, E + h - H}{(b + 2h) \,.\, (H + h) \,.\, u}$$

Für den mittleren Theil $bc = m$ gilt die Chezysche Formel (No. 197.), indem wir darin $\frac{E}{L}$ statt $\frac{\varsigma}{\lambda}$ schreiben, also

$$205.)\quad M^2 = \varphi^2 \,.\, \frac{E\, b^3 \,.\, h^3}{L \,.\, (b + 2h)}$$

Beide Werthe von M^2 gleich gesetzt, giebt

$$2H^2 \,.\, \frac{\frac{u}{L} \,.\, E + h - H}{(H + h) \,.\, u} = \frac{E}{L} \,.\, h$$

oder

$$206.)\quad 2 \,.\, \frac{E}{L} \,.\, H^2 \,.\, u + 2hH^2 - 2H^3 = \frac{E}{L} \,.\, hHu + \frac{E}{L} \,.\, h^2\, u$$

welches die hierher gehörige Fundamentalformel ist.

Setzt man $u = 0$, so wird $2hH^2 - 2H^3 = 0$ also $H = h$, wie sich gehört, weil dann bc oder $m = bd$ wird, also cd verschwindet

$$\frac{E}{L}\; (2H^2 - hH - h^2) \,.\, u = 2H^3 - 2H^3 - 2hH^2$$

also

$$207.)\quad u = \frac{2H^2 \,.\, (H - h)}{\frac{E}{L} \,.\, [2H^2 - h \,.\, (H + h)]}$$

Je kleiner H wird, desto kleiner wird dieser Werth, so daſs er für $H = h$ die Länge des unteren Theils $cd = o$ giebt.

Zur Anwendung dieser Formel werden h, b und M vorgeschrieben, woraus man (§. 173) $\mathfrak{h}$, ε und λ findet.

Hiermit hat man also $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ oder $\frac{E}{L}$; und nun giebt No. 207. für jede Stauungshöhe H die Länge ihrer Verbreitung. Nur mufs $\frac{E}{L}u + h - H$ eine bejahte Gröfse bleiben.

Ex. Es sey $b = 10'$, $h = 2'$, $M = 60$ Kubikfufs, so findet man (§. 174) $\varepsilon = 0{,}554'$; $\lambda = 744'$; $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ oder $\frac{E}{L} = 0{,}000745$. Soll nun das Wasser bei d (*Fig.* 69) bis zur Höhe von 5′ aufgeschwellt werden, so hat man

$$u = \frac{2 \,.\, 25 \,.\, (5 - 2)}{0{,}000745 \,.\, [2 \,.\, 25 - 2\,(5 + 2)]} = \frac{150}{0{,}0268} = 5600'$$

Es mufs also die Länge bd (*Fig.* 69) wenigstens $= 5600'$ seyn, und L wenigstens $= 5600 + 744$ oder $6344'$, weil die Berechnung voraussetzt, dafs die Stauung nicht über β hinaus reiche.

Aus No. 206. hat man auch

$$208.)\quad H^3 - \left(h + \frac{E}{L} \,.\, u\right) \,.\, H^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{E}{L} \,.\, u \,.\, h \,.\, H + \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{E}{L} \,.\, h^2 u = o$$

Diese kubische Gleichung hat zwei Abwechselungen von Zeichen, also allemal zwei bejahte Wurzeln, wie es die Natur der Sache erfordert, denn durch den Querschnitt bei c (*Fig.* 69) mufs immer dieselbe Wassermenge M durchfliefsen, es mag der Kanal bei d ganz offen oder versperrt seyn. Für den *versperrten* Kanal ist $H > h$; für den *freien* Kanal kommt die Gleichung auf Null, wenn man in ihr $H = h$ setzt, wie sich gehört. Den andern Werth von H, den für den versperrten Kanal, findet man aus der Gleichung durch Proberechnungen. Für $\frac{E}{L} \,.\, u = 4{,}172'$ (im vorigen Exemp.) und $h = 2'$ findet man auf diese Weise auch $H = 5'$. Ein Beweis von der Konsequenz unsers Kalkuls.

Allgemeine Anmerkung zur Anwendung der Sätze §. 169 — 177.

§. 178.

Ich gestehe gerne, dafs die vorstehenden Bestimmungen (§. 169 bis 177) manche Erinnerungen zulassen, die für sie nicht empfehlend sind. Die Chezysche Formel ist allerdings aus einem Gesichtspunkte gefunden worden, der nicht dieselbe Richtigkeit verspricht, wie die Pronysche No. 185. §. 161. Es ist dort schon bemerkt worden, dafs bei kleinern Werthen von c die Chezyische Formel $\frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa}$ kleiner angiebt als die Pronysche, dafs also bestimmte Werthe von $\frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa}$ nach Chezy gröfsere Werthe von c geben müssen als nach Prony (solange nämlich, nach §. 161, $c < 3{,}38'$, ist).

Dieser Unterschied kann sehr bedeutend werden. Weil nun die Pronysche Formel auf einer richtigeren Ansicht beruht, auf welche auch die vorstehende Untersuchung eigentlich hätte gebaut werden sollen, und überdas die hier gefundenen Bestimmungen zu ver-

wickelt sind, so rathe ich, in der Ausübung, die Pronysche Formel No. 185. mit einer kleinen Aenderung zum Grunde zu legen.

Wird nämlich der Parallelismus zwischen der Oberfläche und dem Boden angenommen, so ist der Abhang der Oberfläche ζ zugleich das Gefälle des Bodens ε, also $\frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}$ einerlei mit $\frac{\varepsilon\eta}{\lambda\varkappa}$, was aber nicht angenommen werden kann, weil sonst mit $\varepsilon = o$ oder für einen horizontalen Kanal auch $c = o$ werden müfste. Man setze daher für diesen Fall nach No. 196. $h = 0{,}62 . \mathfrak{h}$ oder schlechthin $h = 0{,}6 . \mathfrak{h}$, und den Abhang der Oberfläche $= \mathfrak{h} - 0{,}6 . \mathfrak{h} = 0{,}4\,\mathfrak{h}$; daher $\varepsilon + 0{,}4 . \mathfrak{h}$ statt ζ *). Hiermit wird in Par. Fufsen

$$208.^{a}) \quad \frac{(\varepsilon + 0{,}4 . \mathfrak{h}) . \eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948 . c + 0{,}00008856 . c^2$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt für die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte, dessen Tiefe $\mathfrak{h}$ ist

$$208.^{b}) \quad c = -0{,}535 + \sqrt{\left(0{,}286 + 11292 . \frac{(\varepsilon + 0{,}4 . \mathfrak{h}) . \eta}{\lambda\varkappa}\right)}$$

wo $\mathfrak{h}$ die Wassertiefe am Anfange der regulirten Bewegung des Wassers ist.

Setzen wir, wie oben $b . \mathfrak{h}$ statt η, $b + 2\mathfrak{h}$ statt $\varkappa$, so wird, wo diese Substitution gestattet ist,

$$208.^{c}) \quad c = -0{,}535 + \sqrt{\left(0{,}286 + 11292 . \frac{(\varepsilon + 0{,}4 . \mathfrak{h}) . b\mathfrak{h}}{\lambda . (b + 2\mathfrak{h})}\right)}$$

Wir wollen hiervon eine Anwendung auf den bedeutenden Kanal machen, welcher der *Neue Londoner Flufs* genannt wird. *Hachette* theilt in der 2ten Ausg. seines *Traité élémentaire des Machines* (Paris 1819) S. 81, aus einem Berichte des Herrn *Bruyère*, Generalinspector der Brücken und Strafsen, vom 30. April 1802 folgende Abmessungen mit:

$\lambda = 202800'$, $\zeta = \varepsilon = 14'$, $\varkappa = 36'$, $\mathfrak{h} = 3'$, $\eta = 45$ Quadratfufs

Hiernach giebt die Formel No. 208.[b]

$$c = -0{,}535 + \sqrt{\left(0{,}286 + 11292 . \frac{(14 + 1{,}2) . 45}{202800 . 36}\right)}$$
$$= -0{,}535 + \sqrt{1{,}3439} = -0{,}535 + 1{,}160 = 0{,}625'$$

oder $c = 12 . 0{,}625' = 7{,}500''$

Die wirkliche Geschwindigkeit war nach dortiger Angabe $= 8{,}75''$ also um $1{,}25''$ oder $\frac{1}{6}$ der berechneten gröfser.

Nähme man $b = \frac{45}{3} = 15'$, und $b + 2\mathfrak{h} = 21'$ statt $\varkappa$, so fände man $c = 9{,}74'$ statt $8{,}75$ also um $1''$ gröfser als nach der Angabe oder fast nur um $\frac{1}{9}$ zu grofs.

*) Bei allen Anwendungen, wo der Abhang der Wasserfläche in Strecken gemessen wird, welche die Voraussetzung des Parallelismus gestatten, nehme ich für ε den Werth von ζ, so dafs dann noch $0{,}4 . \mathfrak{h}$ zu diesem Werthe addirt wird.

In der That ist aber auch eine solche Zusammenstellung wie $\mathfrak{h} = 3'$, $\eta = 45$ Quadratfuſs und $\varkappa = 36'$ kaum glaublich, da doch auf jeden Fall die Mittlere von allen Breiten von der Breite der Oberfläche bis zum Boden herab $= \frac{45}{3} = 15$ seyn muſste, wenn $\mathfrak{h} = 3'$ war. Doch wäre der Fall möglich, wenn der lothrechte Durchschnitt eine Art von Muschellinie bildete, die gleich anfänglich sich ihrer Asymptote oder der Oberfläche des Wassers sehr schnell näherte, und nun der Werth von $\mathfrak{h}$ an der Stelle der gröſsten Tiefe genommen worden wäre.

Ist c vorgeschrieben, so hat man

$$208.^{d})\quad \frac{[(c + 0{,}535)^2 - 0{,}286] \cdot \lambda}{11292} = \frac{(\varepsilon + 0{,}4 \cdot \mathfrak{h}) \cdot b\,\mathfrak{h}}{b + 2\,\mathfrak{h}}$$

Hieraus wird

$$208.^{e})\quad \varepsilon = \frac{[(c + 0{,}535)^2 - 0{,}286) \cdot \lambda \cdot (b + 2\mathfrak{h})]}{11292 \cdot b\,\mathfrak{h}} - 0{,}4 \cdot \mathfrak{h}.$$

Ist M oder die in 1 Sekunde abflieſsende Wassermenge vorgeschrieben, so hat man $c = \frac{M}{b \cdot \mathfrak{h}}$, also

$$208.^{f})\quad \varepsilon = \frac{\left(\left(\frac{M}{b\,\mathfrak{h}} + 0{,}535\right)^2 - 0{,}286\right) \cdot \lambda \cdot (b + 2\mathfrak{h})}{11292 \cdot b\,\mathfrak{h}} - 0{,}4 \cdot \mathfrak{h}$$

§. 178.*

Die Vorstehenden Bestimmungen (No. 208.ᵃ bis 208.ᶠ) beziehen sich auf *freien* Lauf in regulären Kanälen, wie über dem Gerinnboden ma nach $kyxz$ (*Fig.* 69*, *Tab.* XLIX). Wir können aber für die Ausübung die Frage nicht unberührt lassen:

> *Wenn wir bei a eine Fallschütze anbringen, wodurch der Wasserspiegel bis in v erhoben werden soll: bis wie weit wird sich das aufgeschwellte Wasser zurückstemmen?*

Mit Umgehung der oben hierüber angestellten Untersuchungen würde ich dem Praktiker folgendes Verfahren anrathen:

> k (*Fig.* 69*) sey des Anfang des Kanals (wo die regulirte Bewegung des Wassers als anfangend angenommen werden kann), und kp horizontal; vx sey gleichfalls horizontal, und y die Stelle, bis zu welcher sich die Aufschwellung verbreitet, so nehme ich zuerst
>
> $$208.^{g})\quad vy = 2 \cdot \frac{vz}{pz} \cdot pk \left(= 2 \cdot \frac{vx}{pk} \cdot pk = 2 \cdot vx\right)$$
>
> Dabei nimmt man die az (die Höhe, welche sich auf freien Abfluſs bezieht) $= 0{,}6 \cdot \mathfrak{h} = 0{,}6 \cdot mk$.

Von k bis y behält nun das Wasser seinen ungestörten Lauf, nach der Stemmung

wie vor der Stemmung, so daſs der Wasserspiegel gar keine Aenderung leidet, solang $vy < pk$ oder $vz < \frac{1}{2}pz$ bleibt. Wenigstens beiläufig.

Soll das Wasser bei a bis zu einer bestimmten Höhe $av = H$ aufgeschwellt werden können, ohne daſs diese Stemmung bedeutenden Einfluſs auf das Wasser bei k hat, so muſs $vz < \frac{1}{2}pz$, oder $H - 0{,}6 \,.\, \mathfrak{h} < \frac{\mathfrak{h} + \varepsilon - 0{,}6 \,.\, \mathfrak{h}}{2}$ d. i. $< \frac{\varepsilon + 0{,}4 \,.\, \mathfrak{h}}{2}$ bleiben, also $< 0{,}5 \,.\, \varepsilon + 0{,}2 \,.\, \mathfrak{h}$, demnach $H < 0{,}5 \,.\, \varepsilon + 0{,}8 \,.\, \mathfrak{h}$. Um aber dieser beiläufigen Bestimmung für kleinere Werthe von ε mehr Sicherheit zu geben, nehme man nur

$$208.^{h}) \quad H \text{ nicht} > 0{,}5 \,.\, \varepsilon + \tfrac{2}{3}\, \mathfrak{h}$$

Ist z. B. $\mathfrak{h} = 2'$; $\varepsilon = 6'$, so soll höchstens av oder $H = 3 + 1\frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}'$ werden.

Ist w die hiernach bestimmte Stelle, so sollte hiernach der bis w aufgeschwellte Wasserspiegel gerade die Stelle k erreichen, was nicht so genau zu erwarten ist. Wenn er aber auch z. B. durch die höhere Stelle t durchgehen sollte, so muſs doch tk so klein ausfallen, daſs daraus durchaus keine nachtheilige Erfolge für die Ausübung entstehen könnten. Selbst die Anwendung auf horizontale Kanäle ist der Natur der Sache nicht entgegen; für solche bleibt der Zustand des Wassers bei k nach der Formel ungeändert, wenn nur H nicht $> \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$ wird. Nimmt man $H = \frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$, so bleibt der Abhang der Oberfläche noch $= \frac{1}{3}\,\mathfrak{h}$, da er beim freien Abflusse $= 0{,}4 \,.\, \mathfrak{h}$ gesetzt wurde. Die Geschwindigkeit wird von k bis z nothwendig (wegen der allmählig abnehmenden Querschnitte) nach und nach beschleunigt. Aber gegen den Verlust am Abhange ($0{,}33\,\mathfrak{h}$ statt $0{,}40 \,.\, \mathfrak{h}$) werden auf der andern Seite auch die Querschnitte allmälig bis zu $\frac{2}{3}\,\mathfrak{h}$ statt der $0{,}6$ vergröſsert. Weil nun $\sqrt{0{,}33} : \sqrt{0{,}40} = 574 : 632$ ist, so muſs ohne merklichen Unterschied bei $H = \frac{2}{3}\mathfrak{h}$ eben soviel Wasser wie im freien Kanale bei $H = 0{,}6\,\mathfrak{h}$ abflieſsen.

XII. Kapitel.

VON GESCHWINDIGKEITS-MESSUNGEN BEI FLIESSENDEN WASSERN UND DAVON ABHAENGENDEN BESTIMMUNGEN DER ABFLUSSMENGEN, IN OFFENEN BETTEN.

§. 179.

Ich habe oben schon erinnert, dafs gegen dergleichen Formeln, wie im vorigen §. von Einigen bemerkt worden ist, sie seyen ohne allen Nutzen, weil man die Wasser- oder Abflufsmengen leichter und sicherer durch Geschwindigkeitsmessungen finden könne. Sie haben aber dabei übersehen, dafs Geschwindigkeitsmessungen nur bei Wassern in schon vorhandenen Betten Statt haben, jene Bestimmungen also (XI. Kap.) für erst noch anzulegende Kanäle immer sehr wichtig und dem praktischen Ingenieur unentbehrlich bleiben.

Mehrere Erinnerungen von praktischen Schriftstellern gegen die Anwendbarkeit solcher Formeln auf schon vorhandene Wasserbette, wegen bedeutender Abweichung der berechneten Resultate von den Resultaten, welche hydrometrische Messungen ergaben, beruhen blos auf der falschen und unstatthaften Anwendung, die sie von der Chezyschen Formel gemacht haben. Insbesondere sucht Herr v. *Wiebeking* in seiner (theoretisch) *prakt. Anleitung zur Wasserbaukunst* in Vergleichung mit seinen hydrometrischen Messungen überall die Resultate der Chezyschen Formel als sehr unrichtig darzustellen. Er hat sie auf natürliche Wasserbette angewendet, bei denen die vorausgesetzte Regelmäfsigkeit eigentlich nie Statt hat, bei denen sich aber das Resultat der Formel dem der hydrometrischen Messung doch immer desto mehr nähern mufs, je mehr sich das natürliche Bett dem eines regulären Kanals nähert. Aber immer findet er sehr bedeutende Abweichungen. Es wird daher nicht überflüssig seyn, hier einige Beispiele aus der gedachten Wasserbaukunst mit gehöriger Anwendung der Chezyschen Formel vorzulegen, von der wir wegen der Verschiedenheit des

Werthes von φ, dessen Modificirung wir nicht bewerkstelligen können, selbst bei regulären Kanälen immer eine Abweichung gestatten müssen, die $\frac{1}{6}$ vom wahren Resultate betragen kann. Ich gestatte die Möglichkeit dieser Abweichung zur gröfsten Sicherheit für die Ausübung. In meinen *neuen Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften* (vom Jahre 1816) habe ich S. 72. 19 Beobachtungen von *Dubuat* mitgetheilt, bei welchen der kleinste Werth von φ, wenn sich alles auf Par. Zolle beziehen soll, $= 300{,}25$; der gröfste $= 342{,}60$ ist. Das arithmetische Mittel ist 321,4. Das arithmetische Mittel aus allen 19 Werthen von φ giebt dasselbe. Die Reduction auf Fufse giebt $\varphi = 92{,}7$, wofür ich 92 beibehalten habe. Man sieht, dafs die Abweichung des mittleren Werthes von den beiden äufsersten nur $\frac{1}{15}\,\varphi$ beträgt. Freilich sind diese Beobachtungen nur bei Kanälchen von 18 bis zu 135 Quadratzoll Weite angestellt worden; aber a. a. O. S. 74 findet man no. 34 und 35 auch Beobachtungen an einem Flusse, dessen Querschnitte über 260 Quadratfufs betrugen. Die Beobachtung no. 34 gab $\varphi = 316{,}49$; die no. 35 gab $\varphi = 334{,}93$. Beide fallen zwischen die beiden äufsersten Werthe von φ, welche bei den *regulären* Kanälen gefunden wurden, und man wird annehmen dürfen, dafs hier die Abmessungen vielleicht zufällig richtig getroffen worden sind d. h. so wie das Wasser bei einem regulären Kanale von den dort angegebenen Abmessungen abfliessen würde.

Wenn dort no. 28. bei einem um $\frac{1}{5}$ gröfseren Abhange des Wasserspiegels und einem etwa um $\frac{1}{6}$ gröfseren Querschnitte als no. 29, nach der Beobachtung in no. 29 über $\frac{1}{4}$ mehr Wasser abflofs als in no. 28, so kann solchen offenbar gegen die Natur der Sache streitenden Angaben kein Glauben beigemessen werden. Es können dabei sehr viele Irrungen eintreten. Ist der Boden von a bis b (*Fig.* 70) eben, so fliefst längs diesem Kanale *mehr* Wasser ab als längs dem höckerichten $agfedcb$. Bringt man nun überdas statt der Tiefen $a\alpha$ und $b\beta$ die gröfseren $c\gamma$, $d\delta$, $e\varepsilon$, $f\varphi$ in Rechnung, oder nimmt doch solche mit, so findet man eine noch gröfsere Abflufsmenge als im Kanale mit dem ebenen Boden, also einen gröfseren Werth von φ. Eine andere Schwierigkeit liegt in der richtigen Angabe von $\frac{\varepsilon}{\lambda}$. So wird z. B. (no. 29) $\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{15360}$, und in no. 36 sogar $\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{35723}$ angegeben. Wenn nun die Beobachtung auf die Länge von 15360 Zollen ($= 1280'$) nur $1''$ Gefälle für den Wasserspiegel giebt; wer will dafür bürgen, dafs das wahre Gefälle nicht $1\frac{1}{2}$ bis $\frac{7}{4}$ oder gar 2 Zolle betrage? Denn bei Abwägungen aller Art kann man auf die Länge von $1280'$ um $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ = 1 Zoll fehlen. Dann wäre also λ nicht $= 1280$, sondern nur $= 640'$, wenn mann um $1''$ gefehlt hätte. Es könnte aber auch das Gefälle um $\frac{1}{2}''$ kleiner seyn, als man es gefunden hat, da dann $\lambda = 2560'$ wäre. Man bleibt also unsicher, ob man $\lambda = 640'$ oder $\lambda = 2560'$ nehmen solle? Daher können wir die Richtigkeit der Chezyschen Formel durchaus nicht nach Angaben von Beobachtnngen bei so ausserordentlich geringem Gefälle prüfen. Um so mehr scheint es uns der Mühe werth, die

Anwendung der Chezyschen Formel bei ein paar Fällen, welche uns Wiebeking mitgetheilt hat, hier zu versuchen.

§. 180.

I. In der angeführten Wasserbaukunst (II. Bd. S. 338) werden hydrometrische Messungen am Salzachflufse mitgetheilt. Auf die Länge von 11790 Fufs betrug die Neigung seiner Oberfläche $\frac{1}{675}$ seiner Länge. Hiernach können wir auf die Länge von 8170′ die Neigung wenigstens beiläufig auch zu $\frac{1}{675}$ der Länge annehmen; auf diese Länge hat der Flufs gerade parallele Ufer; die Breite beträgt 90′, die mittlere Tiefe 4′, Die Chezysche Formel giebt also hier, wo die Bewegung als schon gleichförmig geworden anzusehen ist,

$$\text{die mittlere Geschwindigkeit} = 92 \cdot \sqrt{\frac{360}{675 \cdot 100}} = 6{,}7'$$

Die hydrometrische Messung dafür 7,09′

Die Abweichung beträgt nur $\frac{1}{17}$ der berechneten.

II. Ebendaselbst (S. 348) beträgt die Neigung der Oberfläche des Salzachflusses an einer andern Strecke, auf die Länge von 83190′, $\frac{1}{854}$ der ganzen Länge, wo sich aber keine so parallele Ufer befinden. Multipliciren wir nun die vorhin berechnete mittlere Geschwindigkeit mit $\sqrt{\frac{675}{854}}$, so erhalten wir 5,96′. Breite und Tiefe sind hier nicht besonders angegeben, um die Geschwindigkeit genauer berechnen zu können. Die hydrometrischen Messungen gaben aber die mittlere Geschwindigkeit = 5,07′; demnach beträgt die Abweichung von der durch Beobachtung gefundenen Geschwindigkeit doch nur $\frac{1}{6}$ der berechneten.

Es versteht sich aber, dafs auch selbst die durch Beobachtung gefundenen Geschwindigkeiten nicht ganz genau sind.

III. Eine noch merkwürdigere Anwendung ist die folgende:

Am Kanale zu *Landsberg* (*Wasserbaukunst* III. Bd. §. 212) war die obere Breite (d. h. die am Anfange dieses Abfallkanals) = 24 Par. Fufs, untere (die am Ende des Kanals) = 25,6′; die obere Tiefe $\mathfrak{h} = 1{,}42'$, untere $h = 0{,}72'$; die Länge des ganzen Kanals $L = 148'$; Abhang des Bodens $E = 5{,}35'$; also $\frac{E}{L} = \frac{5{,}35}{148} = 0{,}036$.

Das Wasser mufste hier bei seiner geringen Tiefe und grofsen Schnelligkeit (denn es durchlief die ganze Länge von 148′ in 13,48 Sekunden) sehr bald zur gleichförmigen Bewegung kommen, so dafs die Tiefe $h = 0{,}72'$ sehr bald als unveränderliche Tiefe eintreten mufste. Ich setze daher den unveränderlichen Querschnitt = 24 . 0,72 = 17,28 Quad. Fufs und nun nach Chezy

$$c = 92 \cdot \sqrt{\frac{0{,}036 \cdot 17{,}28}{24 + 1{,}44}} = 92 \cdot \sqrt{0{,}0244} = 14{,}37$$

wofür wir wegen der erfolgenden geringen Erweiterung 14,2 setzen wollen.

Nach (No. 201.) finden wir, weil $\frac{2\varphi^2}{M^2} = 0{,}282$ ist,

$$\lambda = \frac{0{,}282 \cdot 5160 \cdot 2{,}016 \cdot 0{,}7}{17{,}28 \cdot 28{,}26 - 4{,}032 \cdot 24{,}72} = 5{,}57'.$$

Nach (No. 202.) $\varepsilon = \frac{4{,}032 \cdot 0{,}7 \cdot 25{,}44}{17{,}28 \cdot 28{,}26 - 4{,}032 \cdot 24{,}72} = 0{,}195'.$

Also müfste $\frac{E}{L} = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{0{,}195}{5{,}57} = 0{,}035$

seyn, und nach der Angabe war $\frac{E}{L} = 0{,}036.$

Eine Uebereinstimmung mit unseren Formeln, welche alle Erwartung übertrifft, die aber mehr einem Zufalle zuzuschreiben, und keineswegs immer so zu erwarten ist.

Uebrigens wäre nun bei dem so gefundenen Gefälle $M = c \cdot b \cdot h = 14{,}2 \cdot 24 \cdot 0{,}72 = 245$ Kubikfufs, wofür wir aber nach unserer obigen Vorschrift $\frac{5}{6} \cdot 245$ also $M = 204$ Kubikfufs annehmen. Nach Wiebekings Beobachtung durchlief das Wasser in 13,48 oder 13,5 Sekunden (wie Wiebeking zu den 0,48 Sekunden gekommen ist, läfst sich nicht absehen) den Weg von 148', was die Geschwindigkeit $= \frac{148}{13{,}48} = 10{,}98'$ und $M = c \cdot bh = 10{,}98 \cdot 24 \cdot 0{,}72 = 190$ Kubikfufs gäbe, wo dann die Differenz immer noch etwa $\frac{1}{14}$ der berechneten Wassermenge betrüge. Man mufs aber erwägen, dafs die Beobachtung selbst die Geschwindigkeit um $\frac{1}{14}$ zu klein angeben kann; nämlich die Geschwindigkeit des Schwimmers um $\frac{1}{14}$ kleiner als die des Wassers, um so mehr, je gröfser die Geschwindigkeit des Wassers ist.

Wenn daher gleich bei der Chezyschen Formel der Werth von φ nicht zuverlässig, sondern nur ein aus mannichfaltigen Beobachtungen genommener *Mittelwerth* ist, so bewährt doch selbst dieser ausserordentliche dritte Fall die Anwendbarkeit der Formel unter der festgesetzten Beschränkung, dafs wir um $\frac{1}{6}$ fehlen können.

§. 181.

Auf die natürlichen Bette unserer Ströme bleiben übrigens solche Bestimmungen ganz unanwendbar. Hier ist zwar, da wir immer nur die mit der Maschinenkunde in Verbindung stehenden Lehren vor Augen haben, vom Strombau keine Rede, doch will ich, um von jener Unanwendbarkeit zu überzeugen, hier einige Beobachtungen am Rheine mittheilen.

Observationspunkte, zwischen denen mehrere Visirstationen gemacht wurden.	Längen der nacheinander folgenden Distanzen, nach dem Stromstriche gemessen in Fussen.	Neigung der Oberfläche. Fuss.	Zoll.	Lin.	Reducirte Längen, auf welche die Neigung der Oberfläche = 1 ist.	Geschwindigkeit in der Oberfläche im Stromstriche in Fussen.
Von der alten Aarmündnng	720	—	4	4	1987	5,11
Weiterhin.............................	648	—	3	11	2095	5,9
Weiterhin bis gegen Linz..............	2604	—	8	3	3787	5,4
— bis Linzhausen..............	2592	—	5	—	6220	4,9
— unter Kasbach..............	5004	—	6	9	8896	4,1
— bei Erpel..................	3600	—	4	1	10579	3,4
— unter Remagen..............	2880	—	9	—	3840	3,01
— bis gegen einen Bach........	4920	—	9	2	6441	3,32
— unter Unkel................	4092	1	4	9	2933	2,96
— ober Oberwinter............	3984	—	8	5	5581	2,95
— gegen die Honneffer Inclavirung	6600	1	4	6	4800	3,28
— — — — — —	1572	—	2	6	7546	4,7
— gegen d. Ende d. Honneffer Insel	2700	2	8	9	989	7,1
— gegen Roendorf..............	4920	2	—	—	2460	6,72
— unter Mehlem...............	4596	2	1	6	2163	6,2
— gegen Dollendorf............	10800	1	6	4	7069	4,47
— zur Kirche von Ober-Cassel...	6984	1	2	4	5847	4,55
— zur alten Windmühle........	7080	1	—	4	6889	5,13
— gegen den Wichelhof........	11340	2	11	6	3833	4,06
— gegen die Sieg..............	6180	2	9	9	2197	6,9
— oberhalb Reith..............	10500	2	4	9	4386	3,9
— (dem rechtseitigen	8160	1	8	9	4719	3,3
— Stromstriche nach)........	4800	1	2	8	3927	5,76
— unter Nieder-Cassel........	3300	—	10	10	3655	3,42
— gegen Nieder-Weſslingen....	9840	2	10	2	3456	4,4
— gegen Langeln..............	11340	2	8	4	4211	3,97
— zwischen Suerd und Weiſs...	6000	1	4	6	4364	3,9
— gegen die Pörzer Windmühle.	8400	2	8	1	3351	4,6
— gegen das rothe Haus........	5520	1	4	3	4075	3,5
— unter Rothenkirchen........	10980	3	3	—	3378	4,6
— zu den Schiffsmühlen........	12000	3	—	2	3981	4,14
— zur Rathkirche in Mühlheim.	14400	4	5	—	3260	5,2

Diese Beobachtungen hat uns *Wiebeking* in seiner *Wasserbaukunst* S. 329. mitgetheilt. Hier ist bei $\frac{1}{10579}$ Gefälle die Geschwindigkeit gröſser als bei $\frac{1}{4719}$; bei $\frac{1}{5581}$ so groſs als bei $\frac{1}{2933}$; bei $\frac{1}{1987}$ sehr genau so groſs als bei $\frac{1}{3260}$ (eigentlich noch etwas kleiner) u. s. f.

§. 182.

Weil in den vorstehenden Beobachtungen die Profile fehlen, so will ich noch die nachstehende Tafel von Beobachtungen beifügen, welche uns der groſse holländische Wasserbaudirektor *Brünnings* nach seinen hydrometrischen Vermessungen am Rheine mitgetheilt hat.

Man denke sich eine z. B. von 8 zu 8 Ruthen bezeichnete quer über den Strom straff

angezogene hinlänglich starke Schnur, von Ufer zu Ufer ausgespannt, und bei jedem Zeichen an der Schnur die Tiefe des Stromes gemessen, nebst des Geschwindigkeit an diesen Stellen; nimmt man nun das arithmetische Mittel zwischen jedem Paare solcher Tiefen oder Perpendikulären als die mittlere Tiefe eines solchen Profilstücks, und das arithmetische Mittel zwischen den Geschwindigkeiten in beiden Perpendikulären als die mittlere Geschwindigkeit des Stroms in diesem Profilstück an, so giebt die Länge (hier die von 8 Ruthen) mit der mittleren Tiefe multiplicirt die Fläche des Profilstücks, und diese mit der mittleren Geschwindigkeit multiplicirt die Abflufsmenge. Diese Bemerkung wird zur Erklärung der Art, wie man zu einer solchen Tafel gelangen kann, hinlänglich seyn.

Abstand der beiden äusfersten Perpendikulären von den Ufern.	Abstand der Perpendikulären von einander.	Wasserhöhen, nach welchen die Profile berechnet wurden.		Obere Breite des Flusses, oder Länge der Profile.	Flächeninhalt der Profile.	Mittlere Tiefe der Profile.		Mittlere Geschwindigkeit für die ganzen Profile.	Abflufsmengen für eine Sekunde.
Ruthen.	Ruthen.	Fuss.	Zoll.	Ruthen.	Quadratfuss.	Fuss.	Zoll.	Fuss.	Kubikfuss.
5¼	10	9	3	140½	26461¾	15	8½	4,1552	109787
5	9¾	9	3	97¾	19153½	16	3 37/39	3,8554	73844
3½	7	9	3	49	7190½	12	2¾	4,6960	33767
3⅝	7	7	5¾	49¼	7017⅜	11	10½	3,8816	27239
3¾	8	14	4	63½	12630	16	6⅞	4,1405	52295
2¼ *)	5	10	11	28⅘	3088⅛	8	11⅕	3,3124	10229
2¼	5	7	5¾	24½	2089⅛	7	1¼	2,9233	6107
2¾	8	11	10	53½	9108	14	2⅐	3,5473	32309

Die Wasserhöhen unter der dritten Ueberschrift sind ohne Zweifel Pegelhöhen, die sich auf die Wasserhöhen über einem bestimmten Normalpunkte beziehen. *Brünnings* hat aus den Zahlen der vierten und sechsten Ueberschrift die der fünften berechnet, also nicht die einzelnen Profilstücke sondern die *ganzen* Profile, und dann diese ganzen Profilflächen mit der mittleren Geschwindigkeit aus allen Perpendiculären multiplicirt, um die Abflufsmengen zu finden. Man findet aber die letzteren genauer, wenn man die Flächen der einzelnen Profilstücke mit ihrer jedesmaligen mittleren Geschwindigkeit multiplicirt, also auf diese Weise die Abflufsmenge für jedes einzelne Profilstück berechnet, da dann die Summe dieser einzelnen Abflufsmengen die Abflufsmenge für das ganze Profil giebt.

§. 183.

In Bezug auf Maschinenanlagen hat man es eigentlich nur mit kleineren Flüssen, Bächen und damit verbundenen künstlichen Gräben oder regulären Kanälen zu thun. Die dabei vorkommenden Fragen sind dann:

*) Hier war die letzte Perpendikuläre 6 1/16 Ruthen vom nördlichen Ufer entfernt.

1.) Auf wieviel Wasser kann man in jeder Sekunde rechnen?

2.) Welche Abmessungen mufs man dem Kanale geben, um jene Wassermenge mit Sicherheit darin ableiten zu können?

Die Beantwortung der zweiten Frage ergiebt sich aus dem XI. Kapitel; die der ersten gehört hierher. Man bedient sich dabei zur Geschwindigkeitsmessung verschiedener Werkzeuge, besonders

1.) Der *Pitotschen* Röhre. (Die jetzt von *v. Reichenbach* verbessert ist.)
2.) Schwimmender Körper.
3.) Des *Quadranten mit dem Pendel.*
4.) Des Strommessers von *Brünnings.*
5.) Des Strommessers oder der *hydrometrischen Flügel* von *Woltmann.*
6.) Einer hydrometrischen Schutzwand.
7.) Der *Wasserfahne* des *Ximenes.*
8.) *Michelotti's* Wasserhebel.
9.) *Nadi's* hydrometrischer Flasche.
10.) Des Wasserhebels von *Brünning's.*
11.) *Gauthey's* Geschwindigkeitsmessers.

Um den Quadrant mit dem Pendel und dessen Gebrauch hat sich besonders *Eytelwein* verdient gemacht; übrigens findet man Beschreibungen und Zeichnungen dieser Werkzeuge, No. 6. ausgenommen, mit gehöriger Prüfung in *Herrn Brünnings Abhandlung über die Geschwindigkeit des fliefsenden Wassers, und von den Mitteln, dieselbe auf allen Tiefen zu bestimmen, aus dem Holländischen übersetzt von Kröncke, Frankfurt am Mayn* 1798. Ich werde hier nur von No. 1, 2, 5, 6 und 11 reden. Die Ungewifsheit des Stofses gegen eine Kugelfläche macht den Gebrauch des Pendels zu mifslich.

§. 184.

ABCD (*Fig.* 71) sey der lothrechte Durchschnitt eines Wassers nach der Länge des Bettes an der Stelle, wo die Geschwindigkeit gemessen werden soll.

Um nun die Geschwindigkeit des Wassers in einer bestimmten Tiefe, wie hier bei n, anzugeben, schlug *Pitot* die Röhre vor, welche von ihm den Namen hat. Sie ist cylindrisch, unten umgebogen, und am umgebogenen Ende trompetenförmig erweitert, wie $abcde$. Indem nun das Wasser gegen die Oeffnung ef strömt, welche Pitot ganz frei liefs, steigt es schon hydrostatisch im ganz ruhigstehenden Wasser bis zur Oberfläche des Wassers AB, aber wegen der Bewegung des nach nm fliefsenden Wassers kommt die Wirkung des Stofses hinzu, so dafs das Wasser z. B. bis in p hinauf zu steigen genöthigt wird, da sich dann aus der Differenz beider Höhen $np - nq$ die Geschwindigkeit des Wassers bei n berechnen läfst. Ist nämlich pn (lothrecht gemessen) $= \mathfrak{h}$, $qn = h$, so

ist die Geschwindigkeit c bei $n = 2 \cdot \sqrt{g} \cdot (\mathfrak{h} - h)$ oder, in Bezug auf Pariser Fuſse, genau genug $c = 2 \cdot \sqrt{15} \cdot (\mathfrak{h} - h)$.

Aber die Stelle q ist sehr schwer und nie mit der hier erforderlichen Genauigkeit zu beobachten, weil bei der Bewegung die Oberfläche jeden Augenblick ihre Lage um etwas weniges ändert und das Wasser an der Aussenfläche der Röhre immer um ein weniges hinauf steigt. Darum wird nahe an dieser Röhre an derselben Leiste, an der die gedachte Röhre befestigt wird, noch eine zweite Röhre befestigt, wie die $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, in welcher das Wasser ohne Mitwirkung eines Stoſses sich blos vermöge des hydrostatischen Drucks bis zur Höhe $\varepsilon\pi = h$ erhebt.

Nähere Kenntniſs dieses Werkzeugs giebt *Fig.* 71*. Hier ist $a\,b\,c\,d$ eine 8 Linien dicke Leiste, an der die *Pitotsche Röhre* $g\,f$, welche aus der gläsernen Röhre $f\,k$ und dem messingenen Endstück kg zusammengesetzt ist, und die *Nebenröhre* $h\,i$, welche von Glas und unten mit einer messingenen Trompete $l\,i$ verbunden ist, befestigt sind. Zwischen beiden Röhren ist auf einer Schiene von Messingblech eine Scale, welche in Pariser Zolle und Linien eingetheilt ist (in der *Fig.* in 36 Pariser Zolle) mit einem Schieber m angebracht. Die Röhren liegen durchaus halb in der Leiste, welche daher unten wegen der Trompeten ungefähr $1\frac{1}{2}$ Zoll dick seyn muſs. Nach dem Gebrauch wird die Röhre fg herumgedreht und herunter geschoben, so daſs das messingene Endstück kg in die Rinne n in der Leiste fällt, worauf das Ganze mit einem Deckel d. h. mit einer änlichen Leiste, die ebenso ausgehölt ist wie die $a\,b\,c\,d$ und die sich um die Charniere o dreht, verschlossen wird. Um das beständige Schwanken der Oberfläche des Wassers in den Röhren zu vermindern, sind die Oeffnungen der Trompeten g und i mit dünnen Platten belegt; in der Mitte einer jeden ist eine Oeffnung zu $1\frac{1}{2}$ Linie im Durchmesser angebracht.

Beim Gebrauch liegt die Mitte der kleinen Oeffnung bei g mit der Oeffnung bei i beiläufig in einer horizontalen Linie; von welcher aufwärts die Scale eingetheilt ist. Die kleine Rinne p verschafft dem Wasser den Zutritt zur Oeffnung bei i. Beim Gebrauch wird nun das Instrument ohne Deckel, so wie es *Fig.* 71* zeigt, mit der Trompete kg gerade gegen die Richtung des Stromes untergetaucht, und nun werden die Höhen, bis zu welchen das Wasser in beiden Röhren steigt, beobachtet, woraus sich nach obiger Formel die Geschwindigkeit c ergiebt.

Zum Gebrauche in gröſserer Tiefe müſste man mehrere Röhren auf einander schrauben und an ein leiterförmiges Gestelle mit der Scale befestigen. Dabei müſsten dann die unter den Wasserspiegel fallenden Röhrstücke nicht gerade von Glas, sondern dürften von Messing oder sonst gutem Metall seyn.

Da durch einige Abweichung der Richtung der Trompete g von der des Stroms der Stoſs gegen die Oeffnung schon vermindert wird, folglich das Wasser in der Pitotschen Röhre nicht bis zu der Höhe über dem Wasserspiegel steigen kann, die seiner Geschwindigkeit entspricht, so könnte man dem Instrument dadurch mehr Genauigkeit verschaffen,

dafs man (wie beim *Woltmann'schen* Strommesser *Fig.* 72) auf der nach der Richtung des Stroms gekehrten Seite (also *Fig.* 71* auf der Seite *bc*) eine Platte von 10 — 12 Zoll Länge und 6 — 8 Zoll Höhe anbrächte (die nach jedesmaligem Gebrauch losgeschraubt werden könnte), und nun die Leiste *abcd* oben und unten mit aufrecht stehenden Zapfen versähe. Diese Zapfen müfsten dann in einem Charnier laufen, das mit Kapseln (wie *Fig.* 72) verbunden wäre, so dafs sich das ganze Instrument frei um einen Stab, der zwischen diese Kapseln eingeschraubt würde, herumdrehen könnte, und so, an diesem Stab auf den Boden des Stroms gestellt, die verlangte Richtung erhalten müfste.

Herr *von Reichenbach* in München hat durch eine Vorrichtung mit einer kleinen Pippe (Hahn) dem Instument noch mehr Bequemlichkeit und Genauigkeit verschafft Man sieht einen Entwurf dieser Vorrichtung *Fig.* 71** im Grundrisse.

$\alpha\beta\gamma\delta$ stellt das Pippengehäuse vor, von welchem ein Stab aufwärts geht, an dem die Pitotsche Röhre *b* und die Nebenröhre *a* befestigt sind. *c e* ist die Trompete, welche der Richtung des Stromes gerade entgegengesetzt wird. *d* sind 2 Seitentrompeten. Die Pippe *ef* ist in ihrer Mitte der Länge nach von *e* bis unter die Röhre *b* und von hier an aufwärts bis zu dieser Röhre nur in der Weite von etwa ein Stecknadelkopf durchbohrt, und ebenso von einer Seitentrompete zur andern horizontal in die Quere und in der Mitte ganz eng aufwärts bis zur Röhre *a*. Bei solcher Stellung der Pippe oder des Hahnes *cf* correspondirt also die Trompete *c* mit der Pitotschen Röhre *b*, und die beiden Trompeten *d* mit der Nebenröhre *a*. So wird das Instrument unter Wasser getaucht, welches dann in der Röhre *b* bis zu der Höhe steigen mufs, die seiner Geschwindigkeit entspricht, in der Röhre *a* dagegen blos bis zum Nivean mit dem äufseren Wasserspiegel. Nach kurzer Zeit, wenn das Wasser in der Röhre *b* zum ruhigen Stand gekommen ist, wird die Pippe gedreht, wodurch beide Röhren ausser Kommunikation mit ihren Trompeten und mit dem äufseren Wasser kommen. Das darin befindliche Wasser bleibt stehen, da ihm aller Abflufs abgeschnitten ist, und man kann nun das Instrument aus dem Wasser nehmen und den Unterschied der Wasserhöhen in beiden Röhren bequem messen, woraus sich dann nach obiger Formel die Geschwindigkeit $c = 2 . \sqrt{15} . (\mathfrak{h} - h)$ ergiebt, wofern die Höhen $\mathfrak{h}$ und h in Pariser Maafs ausgedrückt sind. Das Schliefsen oder Drehen der Pippe *cf* geschieht mittelst eines Draths, welcher von dem Schlüssel *g* an dem Stab herauf läuft.

So ist meines Bedünkens die Pitotsche Röhre ein treffliches hydrometrisches Werkzeug, das nach meiner jetzigen Ueberzeugung keinem andern nachsteht, vielleicht allen neueren vorgezogen zu werden verdient.

Zwar trifft das Wasser die Platte *rs Fig.* 71* nie mit seiner ganzen Geschwindigkeit. weil solches selbst in einer trompetenartigen Form anstöfst, so dafs die einzelnen Wasserfäden vom Mittelpunkte aus immer schiefer abfliefsen; aber die mittleren bei *g* anstos-

senden Wassertheilchen behalten ohne merkbare Aenderung ihre ursprüngliche Geschwindigkeit. S. unten §, 239. *)

§. 185.

In Teutschland bedient man sich jetzt sehr häufig des Woltmannschen Strommessers. *Woltmann*, der Erfinder dieses Werkzeugs, zeigte seine Einrichtung und Gebrauch in der von ihm 1790 zu *Hamburg* erschienenen *Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels.*

Die *Fig.* 72 bis 72** zeigt das Werkzeug, wie ich es von dem Berliner Künstler *Seyfert* erhalten habe, nur dafs die Hauptabmessungen dort viermal so grofs sind. Es besteht ganz aus Messing.

Fig. 72 ist die Ansicht von neben. Hier sind der Deutlichkeit halber nur 2 Flügel *A* und *B* gezeichnet. *Fig.* 72** sieht man alle 4 Flügel, wovon die drei, *A*, *B* und *E* (wie die *Fig.* 72) unter einem Winkel von 45° gegen die Stromrichtung gestellt und von hinten (d. h. *Fig.* 72 von *b* nach *a*) zu sehen sind, der vierte *F* aber aus der Scheide $\alpha\beta$ genommen und so gedreht ist, dafs man seine ganze Fläche von vornen sieht. Diese Flügel werden nun mit dem mitten durchgehenden Loch γ in das vierkantige Ende des Wellchens *a b* eingeschoben und durch eine Schraube *c* gegen das Herausfallen gesichert. An der Welle *a b* befindet sich bei *d* eine kleine Schraube ohne Ende und gerade darunter ein verzahntes Rädchen, welches in einem Steeg *e f* lauft, der sich bei *e* um ein angeschraubtes Zäpfchen drehen läfst. Dieser Steeg lauft durch einen Schlitz in dem Stäbchen *g h*, und durch sein äufseres Ende *f* geht ein Loch zum Befestigen eines starken Fadens oder einer Schnur. An dem Stäbchen *g h* ist eine Feder *i* angeschraubt, welche den Steeg *e f* niederdrückt, so dafs die Zähne des Rädchens *C* ausser Verbindung mit der Schraube ohne Ende kommen und überdas unten in den Zeiger *k* eingreifen, wodurch alle Bewegung des Rades verhindert wird. Diese ganze Vorrichtung dreht sich mittelst der Büchsen *l* um die stehende Welle *mn*, um die sich auch die Hülsen *o* mittelst Charnieren leicht drehen lassen. Von den Büchsen *l* gehen durchlochte gespaltene Plättchen *q* aus, zwischen welche die hier gleichfalls durchlochte grofse Stofsplatte *D* gerade in der Richtnng der Welle *a b* eingeschoben und mit durchgesteckten Schräubchen befestigt werden kann. Die kleine Welle *ab* dreht sich bei *b* um die zugespitzte Schraube *r* (die noch mit einer Stellschraube versehen ist) und ist bei *a*, wo sie durch das konisch durchlochte Gestellchen durchgeht, mit einem gleichfalls nach vornen konisch verjüngten stählernen Ringchen umgeben, welches hier den Zapfen bildet. Die Verbindung dieser Theile sieht man in der *Figur*.

Der Bügel *s t* hat bei *u* unterhalb 2 Löcher, in welche zwei Stiftchen angesteckt werden können, die an den Stiel *x* der runden messingenen Platte *v w* (deren Umfang, wie man, *Fig.* 72* im Grundrisse sieht, in 180 Grade eingetheilt ist) in einer oben an demselben befestigten hohlen Schiene *u* angebracht sind.

*) Der Mechanikus *Ertel* in München verfertigt die so verbesserte Pitotsche Röhre im Preise von 50 Gulden.

Das ganze Instrument wird in einem Kästchen aufbewahrt, wefshalb es in folgende einzelne Theile zerlegt werden kann:

1.) Die 4 Flügel sammt ihrem Mittelstück, *Fig.* 72**.

2.) Die vordere Schraube *c*.

3.) Das Gestelle mit Bügeln *st* und *γ*, Welle *ab*, Steeg *ef*, Stäbchen *gh*, Rädchen *C*, Welle *mn* nebst Hülsen *o*, Schrauben *p* und Plättchen *q* nebst ihren Schräubchen.

4.) Die Platte *D*.

5.) Die runde Platte *vw* sammt ihrem Stiel *wx* und der holen Schiene *u* mit den darin befindlichen Stiftchen.

Soll nun die Geschwindigkeit eines Wassers gemessen werden, so fügt man zuerst die einzelnen Theile des Instruments so zusammen, wie die *Fig.* 72 zeigt, befestigt bei *f* eine Schnur und zieht sie durch das im oberen Bügel bei *z* hierzu befindliche Loch. Dann bringt man einen Flügel nach dem anderen in seine tiefste Lage wie *B*, so dafs seine untere Schärfe mit der horizontalen Platte *vw* parallel ist, und dicht über derselben hingeht; nun schraubt man die Stellschraube *δ* etwas los und dreht den Flügel in seiner Scheide *αβ* so herum, dafs er mit der Richtung (nach welcher auf der runden Platte *Fig.* 71* die Linie von 0 bis zu 90° gezogen ist) der hinteren Tafel *D* oder der Welle *a b* (d. h. unter Wasser mit der Richtung des Stroms) einen Winkel von 45° (oder hier, wo die Peripherie von *v w* nur 180° hat, einen Winkel von 22½°) macht, wie *εζ Fig.* 72*, und schraubt dann die Stellschraube wieder fest. Sind auf diese Weise alle 4 Flügel gerichtet, so nimmt man die Platte *vw* mit ihrem Stiel von dem Instrument ab, und schraubt nun an einen durch die Hülsen 0 eingeschobenen Stab die Hülsen fest, und zwar in der Höhe an demselben herauf, in der man über dem Boden des Wassers die Geschwindigkeit messen will. Jede Hülse besteht defshalb aus 2 Theilen, die sich auf der einen Seite um ein gemeinschaftliches Charnier drehen und auf der andern mit einer durchgehenden Schraube *p* zusammengezwängt werden können. Jetzt bemerkt man die Nummer des Zahnes, hinter welchem der Zeiger *k* in das Rädchen *C* eingreift. Man stellt den Zeiger am bequemsten zwischen den letzten und ersten Zahn, also hier hinter den 160sten. So stellt man das Instrument am Stab unter das Wasser, welches die Platte *D* gerade nach der Richtung seines Stroms drehen wird, so dafs die *Axe* der Flügel ihm gerade entgegensteht, da das Ganze sich um die Welle *m n* drehen kann. Man hält dabei in der linken Hand den Stab fest und in der rechten die Schnur, die man schlaff herabhängen läfst. Die Flügel weichen nun nach der Theorie der schiefen Ebene dem Wasser beinahe ganz mit derselben Geschwindigkeit seitswärts aus, mit der dieses von vorn gegen sie stöfst, und drehen das Flügelwellchen *ab* beständig mit sich herum, das bis jetzt aber noch aufser Kommunikation mit dem Rädchen *C* ist. Jetzt zieht man plötzlich die Schnur straff an, wodurch der Steeg bei *f* gehoben wird, so dafs er im Schlitz in dem Stäbchen *hg* oben

anstöfst, und die Zähne des Rädchens unten aus dem Zeiger *k* herausgehoben werden, und nun oben in die Schraube ohne Ende *d* am Wellchen *a b* eingreifen. Die Zeit, zu welcher man die Schnur angezogen hat, mufs genau gemerkt und nun die Schnur eine bestimmte Zeit durch (z. B. ½ oder 1 Minute, wozu eine Sekundenuhr oder ein Sekundenpendel angewendet werden mufs) straff angezogen werden. Während dem laufen die Flügel stets mit derselben Geschwindigkeit um ihre Axe, mit der das Wasser vorn gegen sie stöfst, und das Rädchen geht auf jeden Umgang der Flügel und des Wellchens *a b* um einen Zahn fort, also bei 160 Umgängen der Flügel einmal ganz herum. In dem Augenblick, wo die vorgesetzte Zeit (die ½ oder 1 Minute) herum ist, läfst man die Schnur sinken, und sogleich wird durch die Feder *i* der Steeg und an ihm sein Rädchen niedergedrückt, so dafs es oben aufser Kommunikation mit der Schraube *d* kommt, und unten der Zeiger *k* zwischen seine Zähne eingreift. Man sieht nun nach der Nummer des Zahnes, der jetzt gerade vor dem Zeiger steht, und erkennt hieraus, wie viele Umgänge die Flügel in der bemerkten Zeit gemacht haben, woraus man dann findet, wie viel Weg sie in ihrem mechanischen Umfang (den mechanischen Halbmesser von der Axe bis zur Mitte einer Flügelschaufel gerechnet) oder, was dasselbe ist, welchen Weg das Wasser in dieser Zeit seiner Stromrichtung nach durchlaufen hat. Die Anzahl von Fufsen oder Zollen, durch die Anzahl von Sekunden, die bemerkt worden sind, dividirt, giebt dann den Weg, den das Wasser in einer Sekunde zurückgelegt oder durchflossen hat, oder die gesuchte Geschwindigkeit *c*.

Ex. Es sey der mechanische Halbmesser der Flügel $= 0{,}5' = 6''$; die Zeit, während welcher die Schnur straff gehalten wurde, oder die Zeit der Beobachtung $=$ 40 Sekunden. Der Zeiger *k* habe vor dem Eintauchen zwischen No. 160 und No. 1 eingegriffen, und greife jetzt nach dem Herausnehmen zwischen No. 50 und No. 51, so ist die Zahl der Umdrehungen des Wellchens mit den Flügeln $= 50$. Der mechanische Umfang der Flügel ist $= 3{,}14'$, also ist der Weg, den die Mittelpunkte der Flügel in diesem Umfang oder das Wasser in gerader Richtung seines Stroms in 40 Sekunden durchlaufen hat $= 3{,}14 \cdot 50$ und der Weg, den das Wasser in einer Sekunde durchlaufen hat, oder die Geschwindigkeit des Wassers für eine Sekunde $= \frac{50}{40} \cdot 3{,}14 = 3{,}92'$.

Man wiederholt solche Beobachtungen mehrmals und nimmt dann das arithmetische Mittel aus den gefundenen Resultaten.

Noch ist zu bemerken, dafs man in Rücksicht auf die unvermeidliche Reibung in den Theilen des Instruments den Abweichungswinkel der Flügel von der Stromrichtung besser zu etwa 43° nimmt.

Wo ein *stehendes* Wasser von einiger Ausdehnung und hinreichender Tiefe Gelegenheit dazu bietet, wird es immer die Mühe lohnen, das Instrument zu ajustiren. Diefs geschieht, indem man mit dem unter das Wasser eingetauchten Instrument in der Hand am Ufer hingeht nnd die Strecke, die man so nach einiger Zeit zurückgelegt hat, genau

mifst (am besten ist es, wenn man in einer geraden Linie fortschreiten kann). Während dem Fortgehen mufs die Schnur beständig gespannt erhalten werden. Man sieht nun beim Herausziehen, wie viele Umgänge die Flügel auf die bestimmte Strecke gemacht haben, und findet aus mehreren solchen Beobachtungen genau, wie sich die Geschwindigkeit des von vorn gegen die Flügel stofsenden Wassers (welche natürlicher Weise identisch mit der Geschwindigkeit ist, mit welcher bei diesem Verfahren die Flügel gegen das Wasser stofsen) zu der Geschwindigkeit verhält, mit welcher die Flügel seitwärts nach der Richtung um ihre Axe dem Stofs ausweichen.

Ex. Man könnte finden, dafs, nachdem man mit dem eingetauchten Instrument in der Hand 200′ fortgeschritten, das Rad nach der Annahme des arithmetischen Mittels um $62\frac{1}{2}$ Zähne vorgerückt wäre, also die Flügel 62,5 Umdrehungen gemacht hätten. In diesem Falle kämen auf eine Umdrehung der Flügel $\frac{200}{62,5} = 3,2'$, um die das Wasser fortgeflossen wäre, statt der 3,14′ im vorigen *Ex.* Man würde also nach dieser Ajustirung im vorigen Ex. die Geschwindigkeit $c = \frac{50}{40} . 3,2 = 4'$ statt 3,92′ finden.

Dieses Werkzeug verbindet mit dem Vortheile hinlänglicher Genauigkeit den grofser Bequemlichkeit, da es nicht nur leicht zu transportiren ist, sondern auch mit einem und demselben Exemplar ohne nöthige Aufsatzstücke u. dgl. die Geschwindigkeiten, sowohl nahe an der Oberfläche des Wassers als auf dessen Grund und mit gleicher Leichtigkeit in dessen Mitte als an den Ufern gemessen werden kann, wenn nur der Stab, an dem das Ganze auf- und niedergeschraubt wird, hinlänglich lang ist. Aus allen auf solche Weise gefundenen Geschwindigkeiten wird dann aufs Neue das arithmetische Mittel gezogen.

§. 185*.

Röder *) bezieht sich auf ein Werk von *Gauthey* **), in dessen Ermangelung wir hier *Röders* eigene Worte mittheilen:

»Man kann in den Fall kommen, die Geschwindigkeit an grofsen Seichten, in Bächen, ja in Zuleitungsgräben messen zu sollen, dabei möchte aber die Beobachtung derselben durch Schwimmer beschwerlich werden.

Hierzu hat der ehemalige Generalinspektor des Brücken- und Strafsenbau's in Frankreich, *Gauthey*, ein ziemlich einfaches Werkzeug erfunden, welches die Geschwindigkeit durch den Stofs auf eine kleine Fläche angiebt, und noch wenig bekannt seyn dürfte. Eine 6″ 2‴ breite und halb so hohe blecherne Tafel *mcd* (*Fig.* 72***) ist an einer eisernen 3′ 7″ langen, wie ein Messer abgeschärften Stange *a b* befestigt. Der Stiel *ab* hat bei *g* ein 1″ 5‴ weites Loch, und ist oben bei *l*, in entgegengesetzter Richtung, abgeplattet, wo er ein kleines rundes und ein längliches Loch hat. Ganz unten bei *b* ist der Stiel wie

*) Praktische Darstellung der Brückenbaukunde, 2 Bde. Darmstadt 1821, I. Bd. pag. 30.

**) Mémoires sur les canaux de navigation. Paris 1816. 4. par Gauthey.

bei *l* geplattet und die Schaufel daran befestigt. Die Schaufel mit dem Stiel muſs bei *g* ihren Schwerpunkt haben.

Der andere Theil des Instruments besteht aus einer eisernen Handhabe *efg* von 2′ 2″ Länge, die bei *g* gespalten ist und den Schaufelstiel mit einem angeschraubten Zapfen so faſst, daſs er sich sehr leicht bewegt. An der Handhabe ist ein eiserner Gradbogen *n*, dessen Mittelpunkt in der Mitte des Zapfens *g* liegt, befestigt; ferner ein eben so gebogener, etwa 2‴ dicker Messingdrath. Auf dem Bogen sind die Grade gezeichnet, welche der Stoſs des Wassers auf die Schaufel äuſsert. In *f* ist eine Stahlfeder *k* geschraubt, die oben den Ring (das Röllchen?) *i* berührt, so daſs man die Feder durch die Bewegung des Stiels um den Punkt *g* spannen kann. *Ae* ist ein hölzerner Handgriff.

Um diesen Gradbogen einzutheilen, bedarf man folgender, nach Belidor berechneten, Tabelle über die Verhältnisse des Stoſses zu den Geschwindigkeiten auf eine Fläche von 6″ 2‴ Breite und 3″ 1‴ Höhe (oder 0,132 Quadratfuſs).

Geschwindigkeit.	Stoſs.	Geschwindigkeit.	Stoſs.	Geschwindigkeit.	Stoſs.	Geschwindigkeit.	Stoſs.
Fuss.	Pfund.	Fuss.	Pfund.	Fuss.	Pfund.	Fuss.	Pfund.
0,258	0,0075	1,805	0,4088	3,363	1,4991	4,911	3,1989
0,516	0,0353	2,070	0,5654	3,621	1,7339	5,172	3,5435
0,777	0,0782	2,328	0,7155	3,879	1,9988	5;429	3,9068
1,035	0,1413	2,586	0,8858	4,137	2,2865	5,688	4.4217
1,293	0,2424	2,844	1,0675	4,395	2,6803	5,946	4,6941
1,551	0,2449	3,105	1,2720	4,653	2,9074	6,207	5,1031

Man befestigt nun den Handgriff in wagrechter Stellung in einem Schraubstock, bohrt ein kleines Loch in die Mitte der Schaufel, zieht einen dünnen Bindfaden durch und hängt einen leichten Beutel daran. Dieser wird nun nach und nach, nach den in der Tabelle enthaltenen Gewichten, mit Sand gefüllt. Die Belastungen spannen die Feder und man kann die Linien an dem Gradbogen verzeichnen und so das Werkzeug vollenden. Der Messingdrath *o* dient eines Theils zum Festhalten des Gradbogens, andern Theils, um darüber ein Läppchen zu hängen, welches gegen *p* hingeschoben die gröſste Oscillation bezeichnet; gegen *o* hin muſs sie der Beobachter mit dem Augenmaaſs auffassen, um aus beiden das Mittel nehmen zu können.

Beim Gebrauch faſst man den Griff mit einer, den Schaufelstiel mit der andern Hand, taucht den Stiel senkrecht in das Wasser und läſst ihn, um allzu heftige Oscillationen zu vermeiden, allmählig los, wo er dann vom Wasser ergriffen wird und die Platte *l* die Grade angiebt.

Es hat dieses Werkzeug viele Aehnlichkeit mit dem Strompendel, ist ziemlich einfach; sein richtiger Gebrauch dürfte jedoch, da die Handhabe mit dem Griff ohne feste

Haltung ist, erst durch deren Fixirung, mittelst irgend einer kleinen Vorrichtung, erhalten werden können.

Gauthey findet diesen Strommesser auch auf gröſsere Flüsse anwendbar, und da für eine gröſsere Geschwindigkeit, als die in der Tabelle enthaltene, das Instrument zu schwach wäre, so schlägt er vor, dafür die Schaufel halb und für kleinere doppelt so groſs zu machen, wo dann die nämliche Eintheilung ebenfalls dienen könnte.«

So weit *Röder.* — Wir müssen aber noch erinnern, daſs beim Gebrauch dieses Instruments darum keine groſse Genauigkeit zu erwarten ist, weil die in der Tabelle berechneten Gewichte von den in der Ausübung gefundenen nicht wenig abweichen (s. §. 244); ausserdem aber auch in der Reduktion der französischen Maaſse auf die teutschen (nämlich rheinl. Fuſs und Cölln. Pfund) in dieser Tabelle Fehler begangen seyn müssen. Wir theilen daher zur Berichtigung der Belidorschen Angaben hier die nachstehende, nach §. 244. berechnete Tafel mit, womit man der Wahrheit wenigstens für die Ausübung nahe genug kommt.

TAFEL für die Grösse des Wasserstosses im unbegrenzten Strom, auf eine Stossfläche von 1/8 Quadratfuss oder 18 Quadratzollen (z. B. 3″ breit nnd 6″ hoch) rheinländisch.

Geschwindigkeit in rheinl. Fuſsen.	Stoſs in Cölln. Pfunden.	Geschwindigkeit in rheinl. Fuſsen.	Stoſs in Cölln. Pfunden.	Geschwindigkeit in rheinl. Fuſsen.	Stoſs in Cölln. Pfunden.
0,25	0,014	2,50	1,199	6,5	6,040
0,50	0,057	2,75	1,398	7,0	6,930
0,75	0,130	3,00	1,507	7,5	7,885
1,00	0,232	3,50	2,062	8,0	8,906
1,25	0,342	4,0	2,572	8,5	9,992
1,50	0,502	4,5	3,138	9,0	11,141
1,75	0,661	5,0	3,772	9,5	12,287
2,00	0,832	5,5	4,459	10,0	13,649
2,25	1,000	6,0	5,218		

§. 186.

Bei flieſsenden Wassern in sehr breiten und tiefen Betten sind die Pitotsche Röhre, so wie der Woltmannsche Strommesser nicht wohl anzuwenden. In solchen Fällen verdient der Gebrauch schwimmender Körper (*Treiber*), der auch sonst sehr einfach, bequem und genau genug ist, den Vorzug. Schon *Silberschlag* bediente sich hohler kupferner Kugeln, die aber nur die Geschwindigkeit nahe an der Oberfläche geben. Besser sind cylindrische hölzerne Stäbe, deren man nach Beschaffenheit der Wassertiefe mehrere an einander schrauben kann. *Wiebeking* hat sich solcher bei allen seinen Geschwindig-

keitsmessungen bei gröſseren und kleineren Flüſsen bedient. Seine Stäbe waren von Tannenholz, daurchaus mit guter Oehlfarbe angestrichen. Jeder hatte unten eine Röhre von Eisenblech, oder ein cylindrisches Gefäſs, worin soviel Eisen oder Blei gelegt wurde, daſs der Stab $\frac{19}{20}$ seiner Länge niedersank, also nur noch $\frac{1}{20}$ über dem Wasserspiegel hervorragte. An das obere Ende eines solchen Stabes wurde eine dünne Schnur befestigt, die wenigstens noch einmal so lang war, als die Tiefe des Flusses. An ihr Ende wurde eine kleine Korkscheibe (der *Schwimmer*) angebunden, um den Stab in jedem Falle wieder hervor heben zu können. Auf jeden Stab kam ein farbiges Fähnchen an einem Eisendrathe, welches mit einer Nummer bezeichnet wurde, um hiernach, wenn mehrere Treiber zugleich an einer Stelle in den Strom gelassen wurden, die Geschwindigkeit eines jeden besonders beobachten zu können. Der Gebrauch solcher Treiber setzt vollkommene Windstille voraus, wodurch er sehr beschränkt wird, weil bei dem Geschäfte diese Windstille nicht immer abgewartet werden kann.

Wo möglich stellt man solche Beobachtungen an einer Strecke an, wo man etwas steile und ziemlich gerade auch ziemlich parallele Ufer hat. Man miſst nun eine Strecke wie *AD* (*Fig.* 73) von z. B. 300 Fuſsen ab, und die *B C* auf jenseitigem Ufer gleichfalls = 300 Fuſs, und steckt in *A, B, C, D* Stäbe ein. Etwa 10 = 15 = 20 Fuſs oberhalb *A B* wird z. B. bei α der Stab eingesenkt. Ein Beobachter bei *E* giebt seinem Gehülfe, welcher die Schläge eines aufgehängten Sekundenpendels zählt, sobald der Stab in die Linie *AB* tritt, ein Zeichen zum Anfange der Beobachtung; dieser Gehülfe hat seine Stelle etwa in der Mitte zwischen *A* und *D*. Der Beobachter geht dann schnell genug von *E* nach *F*, und beobachtet hier den Eintritt des Stabes in die *DC*, den er gleichfalls jenem Gehülfe sogleich als Ende der Beobachtungszeit durch einen lauten Ruf bemerkbar macht.

Die Länge *AD* (hier 300′) mit der beobachteten Sekundenzahl (z. B. 80) dividirt, giebt die mittlere Geschwindigkeit (hier $= \frac{300}{80} = 3{,}75'$) für das Wasser zwischen *AB* und *DC*.

Weil die Geschwindigkeit des Wassers in den verschiedenen Parallelen, wie αb, βd, γc, oft merklich verschieden ist, so hängt die Genauigkeit der berechneten Abfluſsmenge, welche in einer Sekunde im Bette abflieſst, von der Anzahl von Linien ab, in welchen man Beobachtungen angestellt hat.

Allemall muſs man dabei die Wasserprofile nach *AB* und *DC* so aufnehmen, wie wir schon (§. 182) bemerkt haben.

Sind die Profile zwischen *AB* und *DC* nur wenig von einander verschieden, daſs z. B. das gröſste durch das kleinste dividirt nicht über 1,04 giebt, so darf man immer das Mittel zwischen den beiden Profilen *AB* und *DC* als das mittlere annehmen, und das arithmethische Mittel aus den beobachteten Geschwindigkeiten in βd, αb und γc als die mittlere Geschwindigkeit; diese mit der Fläche des mittleren Profils multiplicirt gäbe dann die Abfluſsmenge durch einen Querschnitt.

In allen Fällen erhält man aber ein genaueres Resultat, wenn man gleich mehrere

Zwischenprofile *op, mn, qr* aufnimmt, an Stellen, wo man durch Sondiren die Profile merklich verschieden findet, und dann die Abflufsmengen in 1, 1, 1, 1; 2, 2, 2, 2 u. s. f. besonders bestimmt, und nun das arithmetische Mittel der Summen 1+1+1+1, 2+2+2+2, etc. nimmt.

Bei den Beobachtungen werden dann die Zeiten bemerkt, in welchen der Treiber aus *AB* nach *op*, aus *op* nach *mn* u. s. w. gelangt; die Längen *Ao*, *om* etc. sind durch Messungen gegeben, und jede solche Länge mit der verflossenen Anzahl von Sekunden dividirt, giebt die Geschwindigkeit, und diese mit der Fläche des zugeordneten Profilstücks multiplicirt die durch dieses Profilstück (z. B. in der Breite *vw*) durchfliefsende Wassermenge.

§. 187.

Bei kleinen Bächen oder sonst geringen Wassern, die zwischen Gestein, das oft kaum vom Wasser bedeckt wird, hinfliefsen, und die dennoch oft zu irgend einer Maschinenanlage unsere Aufmerksamkeit verdienen, leistet die ganz einfache Vorrichtung, welche ich (§. 183. No. 6) eine *hydrometrische Schutzwand* genannt habe, die besten Dienste. Ich setze voraus, dafs solche Wasser ein starkes Gefälle einbringen.

Zuweilen fliefsen solche Wasser in sehr schmalen tiefen Gräben, wie *opqrst* (*Fig.* 74). In solchen Fällen lasse man eine bretterne Wand wie *ABCD* verfertigen, die unten und zu beiden Seiten abgeschärft ist. Diese Wand erhält eine Oeffnung, die etwas kleiner als *abcd* ist, und diese Oeffnung wird auf der einen Wandfläche mit einer Platte von dünnem Eisenblech wie *abcd* beschlagen. In dieser Platte ist eine Oeffnung *mnvw* angebracht, die ringsum etwas kleiner als die Oeffnung in der hölzernen Wand ist. Bei *ax* und *by* werden Leistchen angebracht, zwischen welchen ein sich gut anlegender Schieber auf und nieder geschoben werden kann.

Diese Wand wird nun in den Graben so eingetrieben, dafs die Platte mit dem Schieber dem oberen Theile des Grabens zugekehrt ist. Während dem Eintreiben läfst man den Durchgang *mnvw* ganz offen. Die Räume α, β über *p* und *s* werden zugedammt, auch verdammt man nöthigenfalls (was allemal geschehen mufs, wenn sich die Wand nicht im Boden *qr* eintreiben läfst) den Boden auf der inneren Seite vor der Wand mit Rasen oder Mist. Zu den Seiten kann man auch von den Ufern unterhalb *p* und *s* noch mit Hauen oder Schaufeln etwas wegnehmen lassen, um das Einsetzen der Wand zu erleichtern. Nunmehr wird der Schieber herab gelassen, so dafs die Oeffnung nur einige Zolle hoch bleibt. Stand der Wasserspiegel anfänglich in $\gamma\delta$, so wird er sich jetzt über $\gamma\delta$ erheben. Mit der Erhebung des Wasserspiegels zieht man den Schieber immer höher auf, doch so, dafs der untere Rand des Schiebers immer wenigstens 3 Zolle unter dem Wasserspiegel liegt. Auf diese Weise wird endlich der Wasserspiegel $\varepsilon\tau$ eine unveränderliche Lage erhalten, bei welcher alles in jeder Sekunde ankommende Wasser auch in einer Sekunde abfliefst. Jetzt hat man die Oeffnungshöhe $\sigma\theta$, wenn der untere Rand des Schie-

bers in hk liegt, und $\eta\theta$ als die Höhe des Wasserspiegels über dem oberen Rande der Oeffnung. Man kann nun in solchen Fällen allemal nach der Formel No. 169. rechnen.

Man sieht, dafs man durch dergleichen nicht grofse Oeffnungen Wassermengen ablassen kann, die bei etwas hohem Gefälle bedeutende Maschinen betreiben können.

Wo man mehr verbreitetes seicht abfliefsendes Wasser vor sich hat, mufs man eine längere z. B. 12 bis 15′ lange Wand, die dann nur 18 ≈ 20 ≈ 24″ hoch zu seyn braucht, einsetzen, die dann durch eingeschlagene Pfähle gehörige Festigkeit erhält. Diese Wand erhält nach Beschaffenheit des Abflusses einen hinlänglich langen Einschnitt, und so tief, dafs die Wand unter dem Einschnitte, wegen der hier allemal nöthigen Verdammung noch 8 ≈ 9 Zoll Holz behält. Es wird nun zuerst das oberhalb der gewählten Stelle liegende Gestein auf eine hinlängliche Breite und auf eine Länge von 40 ≈ 50 ≈ 60′ weggeräumt, und zu beiden Seiten, um das Austreten des Wassers zu verhindern, auf hinlängliche Länge ein Dämmchen aufgeführt, und die Wand in dieses Dämmchen mit ihren beiden Enden eingesetzt. Jetzt läfst man das Wasser so hoch aufschwellen, bis der Wasserspiegel unverrückt stehen bleibt, also Ab- und Zuflufs gleich grofs geworden sind. Da man jetzt die Wasserhöhe $no = h$ über dem äufseren Rande der Oeffnung messen kann, und die Länge $bo = \beta$ gleichfalls bekannt ist, so erhält man den Werth von M nach No. 170.

§. 188.

Wo man eines dieser Mittel zur Bestimmung der Wassermengen in Anwendung bringen kann, was dann bei wirklich vorliegenden abfliefsenden Wassern immer der Fall ist, wird man nicht auf den Gedanken kommen, die Formeln des vorigen Kapitels gebrauchen zu wollen, die man als blos subsidiarisch in Bezug auf Kanäle, welche erst noch angelegt werden sollen, gebrauchen *mufs*. Selbst bei schon vorhandenen *regulären* Kanälen geben die hier mitgetheilten Verfahrungsarten die Abflufsmengen genauer als jene Formeln. Bei solchen Kanälen sind die Geschwindigkeitsmessungen durch Treiber allemal die vorzüglichsten. Dabei hat man ohne viele Mühe zwei dergleichen Profile wie AB und DC (*Fig.* 73), von deren Flächen, wenn man sie einander nicht nicht ganz gleich findet, das arithmetische Mittel genommen wird. Stellt man dann 3 Geschwindigkeitsbeobachtungen z. B. nach βd, αb und γe an, und nimmt aus solchen das arithmetische Mittel, so kann solches sehr genau als die mittlere Geschwindigkeit gelten, die mit dem mittleren Profil multiplicirt die Abflufsmenge giebt. Ganz nahe an den Seitenwänden ist zwar die Geschwindigkeit allemal merklich kleiner als in einiger Entfernung von denselben; dagegen darf aber auch die Bemerkung nicht übersehen werden, dafs der Treiber nie *ganz genau* die mittlere Geschwindigkeit der an ihn anstofsenden Wassertheilhen annehmen kann. Jedes Wassertheilchen hat seine eigene Bewegung, manches bleibt zurück, manches eilt vor, jedes folgt mit der gröfsten Freiheit dem Antriebe zu seiner Bewegung, was beim Stabe, dem Treiber, nicht der Fall ist, da solcher vermöge des Zusammenhangs seiner Theile sich in allen seinen Theilen mit

gleicher Geschwindigkeit fortbewegen mufs. Er kann nicht den Wassertheilchen folgen, welchen zwischen der Oberfläche und dem Boden die gröfste Geschwindigkeit zukommt, doch ist seine Geschwindigkeit gröfser als die, welche den langsamsten Wassertheilchen zugehört. Ebendarum mufs ein Theil des Stabes da, wo das Wasser eine geringere Geschwindigkeit als er hat, das Wasser durchschneiden, also einen Widerstand überwinden, welcher nothwendig mit Geschwindigkeitsverlust verbunden ist; ein Theil von der Geschwindigkeit der schneller fliefsenden Wassertheilchen mufs nothwendig auf Druck verwendet werden, der theils den Stab in schiefe Richtung bringt, theils jenes Durchschneiden des langsamer fliefsenden Wassers bewirkt, Und selbst in einem Wasser, das schneller abfliefst, als wir einen cylindrischen Stab in ihm fortbewegen, mufs man überall die Wassertheilchen oder die Wassermasse trennen und nach den Seiten drücken, weil er sonst, vermöge seiner Form unmöglich durchkommen könnte. Die mittlere Geschwindigkeit des Stabes ist daher ohne Widerrede allemal etwas kleiner als die des Wassers, und so dient das Resultat solcher hydrometrischen Geschwindigkeitsmessungen immer zur Sicherheit.

XIII. Kapitel.

VON DER BEWEGUNG DES WASSERS IN ROEHRENLEITUNGEN.

§. 189.

Diese Untersuchungen, Früchte der Bemühungen französischer Hydrauliker, die man am Anfange der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts noch nicht kannte, gehören gleichfalls zu den wichtigsten Erweiterungen der Hydraulik. *Euler*, *Kästner* und *Karsten* ertheilen hierüber in ihren hydraulischen Schriften keinen Unterricht. Wir betrachten

I. Geradausgehende durchaus gleich weite Röhren.

§. 190.

Wenn bei einem mit Wasser angefüllten Behältnisse die Höhe des Wasserspiegels über dem Mittelpunkte einer in einer Seitenwand oder auch im Boden angebrahten Oeffnung $= h$, die Gröfse der Oeffnung $= \alpha$, und die Gröfse des beim Einströmen des Wassers in die Oeffnung zusammengezogenen Querschnitts $= \gamma . \alpha$ gesetzt wird, so hat man (§. 127 und 128). $M = \gamma\alpha . 2\sqrt{g} . h$, wo, wenn alles sich auf Pariser Fufse bezieht, $g = 15$ gesetzt werden kann.

Weil nun der Werth von γ sehr verschieden seyn kann, hier aber allemal bestimmte Werthe verlangt werden, die dann von bestimmten Grenzen der Wanddicke abhängen, so setzen wir, was allemal so eingerichtet werden kann, voraus

entweder 1.) es betrage die Dicke der Wand, in welcher sich die Oeffnung befindet, weniger als $\frac{1}{2}$ vom Durchmesser der Oeffnung;

oder 2.) es betrage der Durchmesser der Oeffnung höchstens $\frac{6}{7}$ von der Wanddicke.

Im ersten Falle haben wir eine *dünne* Wand und $\gamma = 0{,}62$.

Im zweiten eine *dicke* Wand und $\gamma = 0{,}81$ (§. 129).

Man hat also

für eine dünne Wand

$$M = 0{,}62 \,.\, \alpha \,.\, 2\sqrt{gh} \text{ oder auch } = (1 - 0{,}38) \,.\, \alpha \,.\, 2\sqrt{gh}$$

für eine dicke Wand

$$M = 0{,}81 \,.\, \alpha \,.\, 2\sqrt{gh} \text{ oder auch } = (1 - 0{,}19) \,.\, \alpha \,.\, 2\sqrt{gh}$$

Hierbei ist aber auf die Abhängigkeit der Abflufsmenge M von der Gröfse der Wandfläche W, in der sich die Oeffnung α befindet, und von der Geschwindigkeit C, mit der das Wasser in die Oeffnung einfliefst keine Rücksicht genommen. Mit Rücksicht auf erstere hat man genauer (No. 168.)

für eine dünne Wand

$$M = (1 - k) \,.\, \alpha \,.\, 2\sqrt{gh}$$

$$\text{Dabei ist } k = 1{,}3 \,.\, \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

für eine dicke Wand

$$M = (1 - k) \,.\, \alpha \,.\, 2 \,.\, \sqrt{gh}$$

$$\text{Dabei ist } k = 0{,}65 \,.\, \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

Für die Werthe von k findet man oben (§. 131) eine berechnete Tafel.

Statt des Koëfficienten $(1 - k)$, setze ich in der Folge allemal γ.

Wo nichts ausdrücklich erinnert wird, setze ich immer Werthe von $\frac{\alpha}{W}$ voraus, welche uns gestatten, für *dünne* Wände $\gamma = 0{,}62$, und für *dicke* Wände $\gamma = 0{,}81$ zu setzen.

Ich mache hier von No. 168 und 169 keinen Gebrauch, weil wir den Ausdruck für M bei Röhrenleitungem auf einem besonderen Wege mittelst der Erfahrung noch verbessern werden.

§. 191.

Was hier von einer Oeffnung in einer dicken Wand gesagt worden, gilt begreiflich doch nur bis zu einer gewissen Grenze der Wanddicke. Statt einer durch eine dicke Wand laufenden cylindrischen Oeffnung kann man sich auch eine kurze Ansatzröhre denken, von der dasselbe gilt. Aber je mehr eine solche Röhre verlängert wird, desto kleiner mufs M werden. Ueber welche Grenze hinaus diese Verminderung von M bemerkbar zu werden anfängt, und nach welchem veränderlichen Gesetze diese Verminderung bis zu einer Grenze fortschreitet, über welche hinaus diese Verminderung einem unveränderlichen oder doch solchen Gesetze unterworfen ist, das sich in der Ausübung als beiläufig unveränderlich ansehen läfst, ist noch von keinem Schriftsteller angegeben wor-

den. Dieser Umstand ist aber in Bezug auf unseren Gegenstand von geringer Bedeutung. Gewiſs ist, daſs die Betrachtuug, welche wir hier darüber anstellen werden, und die uns wenigstens zu einem beiläufigen Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen führen wird, schon von Röhrenleitungen von geringer Länge gilt, und daſs wir wegen der Anwendbarkeit unbesorgt seyn dürfen, wenn die Röhrenlänge nur 100 mal so groſs als ihr Durchmesser ist. Und diese Voraussetzung ist hier gar wohl gestattet, weil so kurze Röhrenleitungen noch keine bedeutende Kosten verursachen, wir also nöthigen Falls die Röhren, wenn sie zu wenig Wasser abführen sollten, entweder erweitern, oder noch eine zweite Röhrenleitung hinzu fügen können.

§. 192.

Bei den Röhrenleitungen finden ganz andere Verhältnisse Statt als bei offenen Kanälen. Bei jenen kann mit hinlänglicher Erhöhung des Wasserstandes durch eine und dieselbe Röhrenleitung jede Abflussmenge bewirkt werden, weil die vergröſserte Druckhöhe ihre Wirkung fortpflanzt, was bei letztern, die endlich überlaufen, nicht der Fall ist. Man gieng daher hier darauf aus, die zur Bewegung gehörige Druckhöhe zu bestimmen, die nämlich nach Abzug desjenigen Theils der gesammten Wasserhöhe, welcher zur Ueberwindung der Bewegungshindernisse verwendet werden muſs, von dieser noch übrig bleibt.

Im Behältnisse A (*Fig.* 75), welches bis an die horizontale ah mit Wasser angefüllt ist, das durch beständigen Zufluſs immer in der Höhe ah erhalten wird, sey bei b die Röhrenleitung bc angebracht, wo c der Mittelpunkt der Ausfluſsöffnung ist; durch c sey die horizontale dcf gezogen, und $ad = hf$ lothrecht, so ist ad oder hf die ganze Wasserhöhe, bc die Länge der Röhrenleitung, ab der Wasserstand, und wir setzen

Ganze Wasserhöhe	$ad = H$.
Höhe des Wasserstandes	$ab = h$.
Gefälle der Röhrenleitung	$bd = e$.
Länge der Röhrenleitung	$bc = \lambda$.
Durchmesser der Röhrenleitung............	$= d$.
Die zu d gehörige Kreisfläche............	$= \alpha$.
Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenl.	$=$ c.
Zugehörige Höhe.........................	$= v$.
Abfluſsmenge in einer Sekunde	$= M$.

Wegen des Drucks der Atmosphäre gegen die Oeffnung c bleibt die ganze Wassermasse Abc in beständigem Zusammenhange. Wenn die Atmosphäre so stark drückt als eine Wassersäule von der Höhe q, so ist der Druck der Wassersäule bc gegen die Oeffnungsfläche $c = (H - h) \, . \, \alpha - q \, . \, \alpha$; zu diesem Druck kommt noch der vom Wasser-

stande $= h \, . \, \alpha$ und der atmosphärische Druck auf den Wasserspiegel in A für ein Flächenstück α genommen $= q \, . \, \alpha$, also

der gesammte Druck gegen die Oeffnung e, allen Widerstand bei Seite gesetzt,

$$= (H - h) \, . \, \alpha - q\alpha + h \, . \, \alpha + q \, . \, \alpha = H \, . \, \alpha,$$

Bei b drückt von oben herab eine Wassersäule von der Höhe $h + q$; von e nach b erfolgt der Gegendruck einer Wassersäule von der Höhe $q - bd$ oder $q - (H - h)$, also drückt bei b von oben herab noch eine Wassersäule von der Höhe $h + q - (q + h - H)$ d. i. eine Wassersäule von der Höhe H, wobei dann der Druck des Wassers in der Röhrenleitung, der bei dem schon gehörig berücksichtigten atmosphärischen Druck von unten bereits in Anrechnung gekommen ist, nicht noch einmal in Rechnung kommen darf.

Man hat es also hier mit Wasser zu thun, das bei b mit der zur Höhe H gehörigen Geschwindigkeit in die Röhrenleitung einzuströmen strebt, und wenn ausser der Zusammenziehung des Wassers bei b keine Hindernisse der Bewegung Statt hätten, so wäre $M = \gamma \, . \, \alpha \, . \, 2\sqrt{gH}$ (§. 190) $= 2\alpha\sqrt{g\,(\gamma^2 H)}$.

Eine Bemerkung darf nicht übersehen werden; sie ist wenigstens gegen die etwaige Erinnerung nöthig, als ob wir sie unbeachtet gelassen hätten. Wenn nämlich das Wasser in der Röhrenleitung so schnell abschöfse, dafs die Geschwindigkeit gröfser als $2\sqrt{g \, . \, \gamma^2 H}$ wäre, so müfste es sich bei b vom Wasser im Behältnisse trennen; es müfste da eine Luftleere entstehen, weil mehr als $2\alpha \, . \sqrt{g \, . \, \gamma^2 (h + q)}$ Kubikfufs Wasser in einer Sekunde nicht nachfolgen könnte. Wird also $c > 2\sqrt{g \, . \, \gamma^2 (h + q)}$, so findet der Satz, dafs das Wasser mit der zur Höhe H gehörigen Geschwindigkeit in die Röhre einzuströmen strebt, nicht mehr Statt. Dieser Fall kann aber bei Röhrenleitungen nie vorkommen, wie wir uns in der Folge überzeugen werden.

§. 193.

Es stehen aber der Bewegung des Wassers längs be (*Fig.* 75) mancherlei Hindernisse im Wege, theils wegen der Zusammenziehung, theils wegen der Hindernisse in den Röhren selbst. Gewifs ist, dafs die Geschwindigkeit c in den Röhren desto gröfser werden müsse, je gröfser d wird, weil der auf die Verzögerung wirkende Umfang nur im Verhältnisse von d, hingegen die Menge der Wassertheilchen, in welche der Widerstand vertheilt wird, im Verhältnisse von d^2 zunimmt. Auch mufs c desto gröfer werden, je gröfser H wird, und desto kleiner je gröfser λ wird. Wir können daher versuchen, ob sich c wie $\sqrt{\frac{dH}{\lambda}}$ verhalte, also $\frac{c}{\sqrt{\frac{dH}{\lambda}}}$ oder $c \, . \sqrt{\frac{\lambda}{dH}}$ wirklich eine unveränderliche Gröfse sey? Bezeichnen wir diese Gröfe mit φ, so hätten wir die hypothetische Formel

$$209.) \quad c \, . \sqrt{\frac{\lambda}{dH}} = \varphi$$

§. 194.

In den *Neueren Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften* (S. 23 und 24) findet man 51 Beobachtungen von *Dubuat, Bossut* und *Couplet.* Weil aber die meisten unter wenig verschiedenen Umständen angestellt worden sind, so will ich nur 5 davon ausheben. Alles bezieht sich auf Pariser Zolle.

Dort no.	H	d	λ	c	v (für $g = 180''$)
6	21,10	5,00	84240	4,81	0,0321
12	4,00	1,00	600	12,22	0,2074
35	24,00	1,33	1080	23,81	0,7874
43	145,10	18,00	43200	39,16	2,1299
50	26,66	1,00	117	79,30	8,7340

Die Formel (No. 209.) giebt $\varphi^2 = \frac{c^2 \cdot \lambda}{d H}$

In no. 6 ist $c^2 = 23{,}136$; $dH = 105{,}5$ also

$$\varphi^2 = \frac{23{,}136 \cdot 84240}{105{,}5} = 18500$$

In no. 12 ist $c^2 = 149{,}328$; $dH = 4$, also

$$\varphi^2 = \frac{149{,}328 \cdot 600}{4} = 22402$$

In no. 35 ist $c^2 = 566{,}916$; $dH = 32$, also

$$\varphi^2 = \frac{566{,}916 \cdot 1080}{32} = 19133$$

In no. 43 ist $c^2 = 1533{,}6$; $dH = 2612$, also

$$\varphi^2 = \frac{1533{,}6 \cdot 43200}{2612} = 25376$$

In no. 50 ist $c^2 = 6288{,}5$; $dH = 26{,}66$, also

$$\varphi^2 = \frac{6288{,}5 \cdot 117}{26{,}66} = 27600$$

Demnach no. 6. $\varphi^2 = 18500$; $\varphi = 136$

» 12. $\varphi^2 = 22402$; $\varphi = 149$

» 35. $\varphi^2 = 19133$; $\varphi = 138$

» 43. $\varphi^2 = 25376$; $\varphi = 159$

» 50. $\varphi^2 = 27600$; $\varphi = 166$

748

Das arithmetische Mittel giebt

210.) $\varphi = \frac{748}{5} = 149{,}6$

wofür wir $\varphi = 150$ setzen.

Die Abweichung vom kleinsten Werthe beträgt nur $\frac{150 - 136}{150}$ oder 0,0933 der mittleren; die Abweichung vom gröfsten Werthe beträgt $\frac{166 - 150}{150}$ oder 0,106 der mittleren.

Diese Bestimmung ist hinlänglich genau, indem die Ungewifsheit, ob man eine verlangte oder die hiernach berechnete Wassermenge M wirklich erhalten werde, selbst bei Voraussetzung der *gröfsten* Abweichung verschwindet, wenn man d bei der wirklichen Anlage um $\frac{1}{10}$ vergröfsert, indem hiermit die Weite α, die sich wie d^2 verhält, schon um $\frac{1}{5}$ vergröfsert wird.

Nunmehr hat man in Bezug auf Pariser Zolle.

$$211.)\qquad c = 150 \,.\, \sqrt{\frac{dH}{\lambda}}$$

Nur mufs in der Anwendung dieser Formel λ schon einige Länge haben, wenigstens nicht unter $100 \,.\, d$ betragen (§. 191).

§. 195.

Die zu c gehörige Geschwindigkeitshöhe ist v, und $c = \sqrt{4g \,.\, v}$. Vergleichen wir hiermit den Werth (No. 211.), so steht dort $22500 \,.\, \frac{d}{\lambda}$ statt $4g$, oder $5625 \,.\, \frac{d}{\lambda}$ statt g und H statt v. Weil aber $4g = 720''$ gesetzt werden kann, so können wir auch $c = \sqrt{4g \,.\, \frac{22500}{720} \,.\, \frac{d}{\lambda} \,.\, H} = \sqrt{4g \,.\, \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H}$ setzen, so dafs nur $\frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H$ statt v steht, d. h.

> Die Druck- oder Wasserhöhe erzeugt hier nicht wie beim Ausflusse durch eine Oeffnung in einer dünnen Platte die Geschwindigkeitshöhe H, sondern nur die $\frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H$, und es wird daher $c = \sqrt{4g \,.\, \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H}$.

Ist die hierbei in Abgang kommende Höhe $= z$, so hat man nur $c = \sqrt{4g\,(H - z)}$, wo dann $H - z = \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H$ wäre, also $z = \left(1 - \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda}\right) . H$ oder $= \frac{\lambda - 31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H$, wobei man sich der Bemerkung erinnern mufs, dafs λ wenigstens $= 100 \,.\, d$ seyn solle. $\frac{\lambda - 31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H$ ist also hier die *gesammte* Widerstandshöhe, welche mit Inbegriff des von der Zusammenziehung des Wassers beim Einflusse in die Röhrenleitung als verloren in Rechnung kommt.

Beim Einflusse in die Röhren ist der Wasserquerschnitt, bei der Röhrenweite α, nur $= \gamma \,.\, \alpha$ oder, wie es bei den Beobachtungen war, $= 0{,}81 \,.\, \alpha$. Wegen der Zusammenziehung wird die Höhe $\frac{v}{0{,}81^2} = 1{,}5 \,.\, v$ erfordert, welche nur die Geschwindigkeitshöhe v bewirkt, dafs also $0{,}5 \,.\, v$ verloren geht.

212.) $\left\{\begin{array}{l} \text{wegen des Widerstandes in den Röhren die Höhe } \frac{\lambda - 31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H - \frac{1}{2}\, v \\ = \frac{\lambda - 31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H - \frac{1}{2} \,.\, \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H = \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H. \quad \text{Hier ist} \\ v = \frac{31{,}2 \,.\, d}{\lambda} \,.\, H \text{ oder } H = \frac{\lambda}{31{,}2 \,.\, d} \,.\, v, \text{ also die Widerstandshöhe in den} \\ \text{Röhren selbst auch} = \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{\lambda} \,.\, \frac{\lambda}{31{,}2 \,.\, d} \,.\, v = \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} \,.\, v. \end{array}\right.$

Zur n fachen Geschwindigkeit gehört die Geschwindigkeitshöhe $n^2 v$, also in Bezug auf den Widerstand in den Röhren selbst die Widerstandshöhe $\frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} \,.\, n^2 v$.

Wäre die Röhrenweite α von der Einflufsmündung, die dann ε heifsen soll, verschieden, wie wenn eine durchlochte Platte vorgeschroben wäre, so wäre der Querschnitt des einströmenden Wassers $= (1 - k) \,.\, \varepsilon$, wo k aus der Tafel (§. 131) genommen wird. Jetzt wird also die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren, da bei den obigen Beobachtungen jener Querschnitt $= 0{,}81 \,.\, \alpha$ war, in dem Verhältnisse $\frac{(1-k) \,.\, \varepsilon}{0{,}81 \,.\, \alpha}$ kleiner, und man hat allgemein

213.) $\left\{\begin{array}{l} \varphi = \frac{(1-k) \,.\, \varepsilon}{0{,}81 \,.\, \alpha} \,.\, 150 \\ c = \frac{(1-k) \,.\, \varepsilon}{0{,}81 \,.\, \alpha} \,.\, 150 \sqrt{\frac{dH}{\lambda}} \end{array}\right.$

II. Geradeausgehende Röhrenleitungen mit wechselnder Weite.

§. 196.

In der Ausübung vermeidet man, wo möglich den Gebrauch ungleich weiter Röhren bei Röhrenleitungen. Inzwischen könnten doch Umstände z. B. Vorrath von Röhren von verschiedenem Durchmesser einen solchen Gebrauch veranlassen. Man sieht eine solche Röhrenleitung (*Fig.* 76).

Es sey hier Länge der ersten Strecke $= \lambda$
Durchmesser $= d$
Zugehörige Kreisfläche .. $= \alpha$

Ebenso gebrauche ich
für die zweite Strecke die Bezeichungen λ', d', α'
für die dritte » » » » » λ'', d'', α''
u. s. f.

Wir nehmen nun allgemein an, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röh-

renstrecke solle der Höhe v zugehören oder $c = 2\sqrt{gv}$ seyn. Den Querschnitt des Wassers beim Einfliefsen in die erste Oeffnung ε bezeichnen wir mit $(1 - k) \cdot \varepsilon$, bei der zweiten Oeffnung ε' mit $(1 - k') \cdot \varepsilon'$, bei der dritten ε'' mit $(1 - k'') \cdot \varepsilon''$ u. s. f. so auch die Geschwindigkeit längs λ, λ', λ'' etc. mit c, c', c'' etc.

Hiernach ist nun

Die Geschwindigkeit beim Eintritt in die erste Oeffnung $\varepsilon = \frac{2\alpha \cdot \sqrt{gv}}{(1-k) \cdot \varepsilon}$

Zugehörige Geschwindigkeitshöhe $= \frac{\alpha^2}{(1-k)^2 \cdot \varepsilon^2} \cdot v$

Die Geschwindigkeit beim Eintritt in die zweite Oeffnung $\varepsilon' = \frac{2\alpha \cdot \sqrt{gv}}{(1-k') \cdot \varepsilon'}$

Zugehörige Geschwindigkeitshöhe $= \left(\frac{\alpha}{(1-k') \cdot \varepsilon'}\right)^2 \cdot v$

So für den Eintritt in die dritte Oeffnung, Geschwindigkeit $= \frac{2\alpha \cdot \sqrt{gv}}{(1-k'') \cdot \varepsilon''}$

Zugehörige Geschwindigkeitshöhe $= \left(\frac{\alpha}{(1-k'') \cdot \varepsilon''}\right)^2 \cdot v$

u. s. f.

Zur Beseitigung der von der Zusammenziehung des Wasserquerschnitts an der Oeffnung ε herrührenden Verminderung der Geschwindigkeit bedarf also das Wasser vor dieser Oeffnung, um die zu v gehörige Geschwindigkeit längs der Strecke λ zu bewirken, der

$$\text{Druckhöhe} = \left(\frac{\alpha}{(1-k) \cdot \varepsilon}\right)^2 \cdot v$$

Damit nun das Wasser mit der Geschwindigkeit $\frac{2\alpha \cdot \sqrt{gv}}{(1-k') \cdot \varepsilon'}$ in die Oeffnung ε' einströmen könne, wird mit Rücksicht auf die Zusammenziehung eine Druckhöhe vor der Oeffnung ε' erfordert, die $= \left(\frac{\alpha}{(1-k') \cdot \varepsilon'}\right)^2 \cdot v$ ist.

Weil aber das Wasser schon mit der zur Höhe v gehörigen Geschwindigkeit bei ε' ankommt, so wird nur noch eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k') \cdot \varepsilon'}\right)^2 - 1\right) \cdot v \quad \text{erfordert.}$$

Das Wasser mufs nun in die dritte Oeffnung ε'' mit der zur Höhe $\left(\frac{\alpha}{(1-k'') \cdot \varepsilon''}\right)^2 \cdot v$ gehörigen Geschwindigkeit eintreten; weil es aber schon mit der zur Höhe $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 \cdot v$ gehörigen bei ε'' ankommt, so wird nur noch eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k'') \cdot \varepsilon''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2\right) \cdot v \quad \text{erfordert.}$$

Auf gleiche Weise gehört, wegen der Zusammenziehung in der vierten Oeffnung zur Bewegung in der vierten Strecke eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k''').\varepsilon'''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2\right).v$$

Demnach gehört zu den 4 Röhrenstrecken zusammengenommen, wegen der zusammengezogenen Querschnitte in den 4 Einflußöffnungen ε, ε', ε'', ε'''

214.) Die Druckhöhe =

$$\left[\left(\frac{\alpha}{(1-k).\varepsilon}\right)^2 + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k').\varepsilon'}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k'').\varepsilon''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k''').\varepsilon'''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2\right)\right].v$$

wo das höchst einfache Gesetz des Fortgangs für noch mehr als 4 Röhrenstrecken gleich ins Auge fällt.

§. 197.

Hier wurde blos auf die von den Zusammenziehungen der Wasserquerschnitte herrührende Geschwindigkeitsverminderungen Rücksicht genommen.

Dazu kommt nun noch der Widerstand in den Röhren selbst. Wegen dieses Widerstandes wird (nach No. 212.)

für die erste Strecke eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \frac{\lambda - 46{,}8.d}{31{,}2.d}.v$$

für die zweite eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \frac{\lambda' - 46{,}8.d'}{31{,}2.d'}.\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2.v$$

für die dritte eine

$$\text{neue Druckhöhe} = \frac{\lambda'' - 46{,}8.d''}{31{,}2.d''}.\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2.v$$

u. s. f.

erfordert, also für 4 Röhrenstrecken wegen des Widerstandes in den Röhren selbst

215.) Erforderliche Druckhöhe =

$$\left(\frac{\lambda-46{,}8.d}{31{,}2.d}.\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda'-46{,}8.d'}{31{,}2.d'}.\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \frac{\lambda''-46{,}8.d''}{31{,}2.d''}.\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2 + \left(\frac{\lambda'''-46{,}8.d'''}{31{,}2.d'''}\right).\left(\frac{\alpha}{\alpha'''}\right)^2\right).v$$

Bezeichnen wir also die in No. 214 mit v multiplicirte Größe mit $\mathfrak{A}$, die in No. 215 mit $\mathfrak{B}$, so haben wir für die gesammte Wasserhöhe op (*Fig.* 76), die wir mit H bezeichnen, für 4 Röhrenstrecken

216.) $H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).v;\quad v = \dfrac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}.$

Ich mußte um der Allgemeinheit willen mehrere Röhrenstrecken in Betrachtung ziehen; meistens hat man es aber nur mit *einer* Röhrenstrecke zu thun, wozu blos die Be-

zeichnungen λ, α, d und ε gehören, so daſs überdas fast immer $\varepsilon = \alpha$ ist. Daher hat man ganz gewöhnlich schlechthin

$$217.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \left(\frac{\alpha}{(1-k)\,.\,\alpha}\right)^2 = \frac{1}{(1-k)^2} = \frac{1}{0{,}81^2} = 1{,}5. \\ \mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8\,.\,d}{31{,}2\,.\,d} \\ H = \left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8\,.\,d}{31{,}2\,.\,d}\right).\,v = \frac{\lambda}{31{,}2\,.\,d}\,.\,v \end{cases}$$

Auch

$$218.)\quad \begin{cases} v = \frac{31{,}2\,.\,d}{\lambda}\,.\,H, \text{ genauer } = \frac{31{,}25\,.\,d}{\lambda}\,.\,H \\ c = \sqrt{4g\,.\,\frac{31{,}25\,.\,d}{\lambda}\,.\,H} = \sqrt{\left(\frac{22500\,.\,d}{\lambda}\,.\,H\right)} = 150\,.\sqrt{\frac{dH}{\lambda}} \end{cases}$$

Alles in Bezug auf Pariser Zolle, und unter der Voraussetzung, daſs λ wenigstens $= 100\,.\,d$ sey.

Die Werthe von k, k', k'' etc. werden nach der Tafel §. 131 genommen.

§. 198.

Obgleich in der Ausübung λ fast immer sehr viel mehr als $100\,.\,d$ beträgt, so können doch, besonders bei den Röhrenstrecken λ', λ'', λ''' u. s. f., welche vorkommen, bei denen $\lambda < 100\,.\,d$ oder $\lambda' < 100\,.\,d'$, oder $\lambda'' < 100\,.\,d''$ etc. wäre, und der Ausdruck (No. 215.) könnte dann sogar verneint werden. Es ist deſshalb bemerkt worden, daſs unsere Ausdrücke nur in Fällen angewendet werden sollen, wo λ nicht $< 100\,.\,d$ (oder λ' nicht $< 100\,.\,d'$ etc.) ist.

Um nun, wo $\lambda < 100\,.\,d$ ist, doch einigermaaſsen den Röhrenwiderstand für die Länge λ, die wir doch wenigstens zu 20″ annehmen, in Rechnung zu bringen, berechne man jedes Glied in No. 215 für $\lambda = 100\,.\,d$ ($\lambda' = 100\,.\,d'$ etc.) und multiplicire was herauskommt mit $\frac{\lambda}{100\,.\,d}$ $\left(\text{oder mit } \frac{\lambda'}{100\,.\,d'} \text{ etc.}\right)$. Wäre z. B. $d' = 3$, $\lambda' = 30 = 10\,.\,d'$, also $100\,.\,d' = 10\,.\,\lambda'$, so setzt man im zweiten Gliede (von No. 215.) $10\,.\,\lambda'$, statt λ', als ob man die Widerstandshöhe von $10\,.\,\lambda'$ statt der von λ' in diesem Gliede hätte; man berechnet also den Werth von $\frac{10\,.\,\lambda' - 46{,}8\,.\,d'}{31{,}2\,.\,d'}\,.\,\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$ oder den von $\frac{(100 - 46{,}8)}{31{,}2}$ statt des von $\frac{10 - 46{,}8}{31{,}2}$ und multiplicirt solchen mit $\frac{\lambda'}{100\,.\,d'}$ oder mit $\frac{1}{10}$, wodurch dann jenes Glied $= \frac{1}{10}\,.\,\frac{100 - 46{,}8}{31{,}2}\,.\,\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = 0{,}17\,.\,\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$, also die zur Länge $\lambda' = 30$ Zollen gehörige Widerstandshöhe $= 0{,}17\,.\,\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2.\,v$ gefunden würde. Es sey $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = 3$,

$v = 0{,}8''$, so wird diese Widerstandshöhe $= 0{,}17 \cdot 3 \cdot 0{,}8 = 0{,}408''$. Diese Berechnung ist hier genügend. Hätte man nur *eine* Strecke von der Länge $\lambda = 30''$, $d = 3''$, so fände man für sie auf dieselbe Weise die Widerstandshöhe $= 0{,}17 \cdot 0{,}8'' = 0{,}136''$ und $H = (1{,}5 + 0{,}17) \cdot 0{,}8 = 1{,}336''$. Wäre $H = 1{,}336''$ gegeben, so hätte man $v = \frac{1{,}336}{1{,}5 + 0{,}17} = 0{,}8''$. Der ganze Höhenverlust wäre $H - v = 1{,}336 - 0{,}8 = 0{,}536''$.

Der Mangel hierher gehöriger Beobachtungen in Bezug auf die Anwendung von No 215, wenn Röhrenstrecken dabei vorkommen, deren Länge noch nicht so viel beträgt als der 100fache Durchmesser, ist von keiner Wichtigkeit.

III. Geradeausgehende Röhrenleitungen mit Schiedwänden.

§. 199.

Eine Röhrenleitung könnte auch wie die (*Fig.* 77) auf eine gewisse Länge wie ac einerlei Weite α haben (oder α', α'' etc.), und z. B. bei m mit einer dicken oder dünnen Schiedwand mit einer Oeffnung ε' versehen seyn.

Dann gilt ac für zwei Strecken $am = \lambda$, $mc = \lambda'$; die Oeffnung ε' ist der Eingang in die Strecke λ'.

Auch hier behalten die Werthe No. 214 und No. 215 ihre völlige Anwendbarkeit, nur dafs $\alpha' = \alpha$, $d' = d$ bleibt.

IV. Röhrenleitungen mit plötzlichen Wendungen.

§. 200.

Plötzliche Wendungen müssen nach Möglichkeit vermieden werden, was aber in der Ausübung oft nicht thunlich ist.

Indessen darf ich annehmen, dafs *widersinnige* Wendungen wie die aus ab nach bc (*Fig.* 78) allemal vermieden werden können, und dafs nie eine stärkere als die rechtwinklichte aus ab in die bd vorkomme.

Auch hier fehlt es uns noch an hinlänglichen Beobachtungen, was uns jedoch in keine Verlegenheit setzen kann, indem dergleichen Wendungen, die allerdings immer schädlich bleiben, doch nicht so nachtheilig sind, als man gewöhnlich glaubt. Der Hauptnachtheil ist der, dafs solche Wendungen immer, mehr oder weniger, mit Verengung des Wasserquerschnitts verbunden sind.

Ich nehme defshalb an:

219.) Wenn die Weite der ersten Röhrenstrecke $= \alpha$, die der $ab = \mathfrak{w}$, und die der $b\acute{a} = \mathfrak{w}'$ ist, so ist, wenn die Geschwindigkeitshöhe für $\alpha = v$ bleibt, die wegen der Wendung bei b weiter erforderliche Druckhöhe $= \left(\left(\frac{\alpha}{0{,}81\ .\ \mathfrak{w}'}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right)^2\right).v$. Dabei ist der Wendungswinkel $= 90^\circ$.

Ist nun der Wendungswinkel $cbm = \beta$ in Graden, so setze ich die zum Ersatz erforderliche Höhe $= \frac{\beta}{90} . \left(\left(\frac{\alpha}{0{,}81\ .\ \mathfrak{w}'}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right)^2\right) . v$, wofür ich $\mathfrak{C} . v$ setzen will.

Hiernach erhalten wir dann für solche gebrochene Röhrenleitungen statt No. 218 jetzt

$$220.)\quad \begin{cases} H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) . v \\ v = \dfrac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}} \end{cases}$$

V. Röhren- und Springbrunnen.

§. 200*.

Mit dem bis an die horizontale ab immer voll erhaltenen Behältnisse A (*Fig.* 79) sey die durchaus gleich weite Röhrenleitung $\alpha\beta$ verbunden, die bei β in ein weiteres Röhrenstück B eingreift, in welches der Röhren- oder Brunnenstock no eingesetzt ist; wird nun nach de eine Ausflufsröhre q eingesteckt, so hat man einen *Röhrenbrunnen* Dabei ist

α Die Weite der Röhrenleitung.

d Ihr Durchmesser.

λ Ihre Länge $\alpha\beta$.

H Die Wasser- oder Fallhöhe bm.

Die Strecke von β bis m läfst sich füglich als eine Röhre von der Weite des Röhrenstocks ansehen, die ich mit α' bezeichne, wie ihren Durchmesser mit d' und ihre Länge mit λ'; der zusammengezogene Wasserquerschnitt bei o kann $= 0{,}81\ .\ \alpha'$ gesetzt werden.

α'' Die Weite der Röhre bei q.

d'' Ihr Durchmesser.

λ'' Ihre Länge.

Ich bringe dabei zwei rechtwinklichte Wendungen nach om und me in Rechnung.

M Die Ausflufsmenge für jede Sekunde.

Alles in Bezug auf Pariser Zolle.

§. 201.

Wenn, wie bisher, c die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhrenstrecke λ bezeichnet, und v die zugehörige Höhe, so ist $M = c \cdot \alpha = \alpha \cdot \sqrt{4gv} = \alpha \cdot \sqrt{720 \cdot v}$; aber $v = \dfrac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$, also

$$221.)\quad M = \alpha \cdot \sqrt{\frac{720 \cdot H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{A} = 1{,}5 + \left(\frac{\alpha}{0{,}81 \cdot \alpha'}\right)^2 - 1 + \left(\frac{\alpha}{0{,}81 \cdot \alpha''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$$

$$= 0{,}5 + 1{,}5\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + 1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$$

oder

$$222.)\quad \mathfrak{A} = 0{,}5 \cdot \frac{(\alpha')^2 + \alpha^2}{(\alpha')^2} + 1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2$$

$\mathfrak{B}$ wird nach 215 und §. 198 bestimmt, daſs also im zweiten Gliede $100 \cdot d'$ statt λ' gesetzt und dann mit $\dfrac{\lambda'}{100 . d'}$ multiplicirt wird; im dritten setzt man $100 \cdot d''$ statt λ'' und multiplicirt dann mit $\dfrac{\lambda''}{100 \cdot d''}$. Hiernach wird

$$\mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8 \cdot d}{31{,}2 \cdot d} + \frac{100 \cdot d' - 46{,}8 \cdot d'}{31{,}2 \cdot d'} \cdot \frac{\lambda'}{100 \cdot d'} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$$

$$+ \frac{100 \cdot d'' - 46{,}8 \cdot d''}{31{,}2 \cdot d''} \cdot \frac{\lambda''}{100 \cdot d''} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2$$

oder

$$223.)\quad \mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8 \cdot d}{31{,}2 \cdot d} + \frac{\lambda'}{59 \cdot d'} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \frac{\lambda''}{59 \cdot d''} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2$$

Wegen der Wendungen, bei welchen hier $\beta = 90°$ ist, hat man (§. 199)

$$224.)\quad \mathfrak{C} = \left(1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)^2 - 1\right) + \left(1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2\right)$$

wonach sich nun der Werth von M (No. 221.) berechnen läſst. Ich habe hier, im ersten Gliede von $\mathfrak{C}$, α^* statt α' geschrieben, um damit die Weite von B (*Fig.* 79) zu bezeichnen.

§. 202.

Es könnten auch mehrere Ausfluſsröhren von der Länge λ'' und der Weite α'' angebracht werden, was ein sehr gewöhnlicher Fall ist, da sich dann die Ausdrücke, in welchen α'' vorkommt, abändern. Werden z. B. zwei dergleichen Ausfluſsröhren angebracht, so darf man nur in Bezug auf den von der Geschwindigkeitsänderung abhängenden Widerstand $\dfrac{\alpha}{2\alpha''}$ statt $\dfrac{\alpha}{\alpha''}$ schreiben, und in Bezug auf die Längenänderung $2\lambda''$ statt λ''.

Hiernach erhält man für n solche Ausfluſsröhren

$$225.)\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A} = 0{,}5 \;.\; \frac{(\alpha')^2 + \alpha^2}{(\alpha')^2} + 1{,}5 \,.\, \left(\frac{\alpha}{n\,.\,\alpha''}\right)^2 \\ \mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8\,.\,d}{31{,}2\,.\,d} + \frac{\lambda'}{59\,.\,d'}\,.\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \frac{n\,.\,\lambda''}{59\,.\,d''}\,.\left(\frac{\alpha}{n\,.\,\alpha''}\right)^2 \\ \mathfrak{C} \text{ kann hier } = o \text{ gesetzt werden.}\end{array}\right.$$

wonach sich M aus α^* No. 221. giebt. Es werden hierbei vorgeschriebene Werthe aller Bestimmungsstücke (λ, λ', λ'', α, α', α'' und H) vorausgesetzt.

Um hiernach die so berechnete Ausflufsmenge mit gröfster Sicherheit zu erhalten, mufs man die Forderung voraussetzen, dafs die Ausfiufsmenge, welche diese Berechnung giebt, allemal etwas kleiner sey, als diejenige, welche abfliefsen würde, wenn der Röhrenstock bei $d\,e$ abgeschnitten würde.

Man berechne daher die Watsermenge, welche durch eine Röhrenleitung von der Weite α bei der Fallhöhe $H = mb$ in jeder Sekunde abfliefsen würde, wenn sie auch zwei rechtwinklichte Beugungen hätte; diese Ausflufsmenge sey $= \mathfrak{M}$, so mufs allemal $M < \mathfrak{M}$ bleiben.

Man kann aber mit aller Sicherheit den berechneten Werth von M erhalten, solang M nicht gröfser als $\mathfrak{M}$ gefunden wird, wofern man bei der wirklichen Anlage d um $\frac{1}{10}d$ und d'' um $\frac{1}{10}d''$ gröfser nimmt, als man bei den Berechnungen angenommen hat.

§. 203.

Es sey nun (*Fig.* 80) alles wie vorher (*Fig.* 79), nur die Ausflufsöffnung nicht zur Seite, sondern oben bei m angebracht, so dafs der Strahl sich lothrecht in mb zu erheben genöthigt ist, so hat man ein *Springwerk*, einen *Springbrunnen; bm* heifst die *Fallhöhe, nm* die *Strahlhöhe*, die *Sprunghöhe;* wir bezeichnen letztere mit h, alles übrige wie vorher, also bm mit H. Allemal ist $h < H$, und $H - h$ desto gröfser, je gröfser H ist.

§. 204.

Bei den Springwerken ist es die bisher noch nicht vorgekommene Frage, was für eine Strahlhöhe zu einer bestimmten Fallhöhe gehöre, oder wie h von H abhänge? Dieses läfst sich nicht aus der Theorie ableiten; wir müssen Beobachtungen zu Hülfe nehmen. Die Versuche, welche *Mariotte* schon vor mehr als 120 Jahren hierüber angestellt hat, sind zwar sehr beschränkt, doch müssen wir sie in Ermangelung späterer Beobachtungen, hier zum Grunde legen.

Bei ihm war H nie über 50 Pariser Fufse oder 600'', die Röhren $\alpha\,\beta$ lothrecht, und die Oeffnung bei m in einer dünnen Platte angebracht, auch der Durchmesser d'' der Sprungöffnung immer vielmal kleiner als der Durchmesser d der Fallröhre $\alpha\beta$; der Strahl

stieg also unter Umständen auf, die seine Höhe am meisten begünstigten, und die er unter andern Umständen nicht erreichen kann. In Bezug auf Pariser Fufse geben seine Versuche

$$226.)\quad h = v'' - \frac{h^2}{300}$$

wo v'' die Höhe ist, welche der Geschwindigkeit c'' zugehört, mit welcher die Wassertheilchen die Sprungöffnung oder das Sprungrohr verlassen. Unrichtig setzen andere Hydrauliker $h = H - \frac{h^2}{300}$.

§. 204.

Allgemein ist für die erste Strecke λ (nach No. 220.) $v = \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$.

Daher

$$227.)\quad v'' = \left(\frac{\alpha}{(1-k'') \,.\, \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$$

wo k'' aus der Tafel (§. 131) genommen wird.

Dabei hat man die Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wie No. 225. Hiernach wird nun

$$228.)\quad h = \left(\frac{\alpha}{(1-k'') \,.\, \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} - \frac{h^2}{300}$$

wo dann, weil sich h auf Pariser Fufse bezieht, auch H in solchen Fufsen ausgedrückt werden mufs. Die Division mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ giebt einen aliquoten Theil der Fallhöhe H, es mag nun H in Fufsen oder in Zollen ausgedrückt werden; es darf aber nie vergessen werden, dafs in Berechnung der Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, (in No. 217.) alle Gröfsen in Pariser Zollen ausgedrückt werden müssen, weil der Werth von φ (die gefundene Zahl 150) auf dieser Voraussetzung beruht.

Die vorstehende Gleichung giebt nun

$$229.)\quad h = -150 + \sqrt{\left(22500 + \left(\frac{\alpha}{(1-k'') \,.\, \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{300 \,.\, H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}\right)}$$

wo der Werth von k'' sich auf die Oeffnung α'' bezieht und aus der Tafel (§. 131) genommen wird.

Ex. Es sey $H = 120$ Pariser *Fufs*, und nun in *Zollen*

$\lambda = 12000$, $d = 5$, $d' = 8$, $d'' = 1$, also $\alpha = 19{,}625$ Quad. Z., $\alpha' = 50{,}24$ Q. Z., $\alpha'' = 0{,}785$ Q. Z., $\lambda' = 40$, und die Sprungöffnung in einer dünnen Platte angebracht; $1 - k$ für die Oeffnung $\alpha = 0{,}81$; $1 - k'$ für die Oeffnung α' (bei *o Fig.* 80) $= 0{,}81$; ist nun α'' die Oeffnung in der Platte, deren Gröfse $= \alpha'$ ist, so ist $\frac{\alpha}{W}$ §. 131 hier $= \frac{\alpha''}{\alpha'} = \frac{0{,}785}{50{,}24} = 0{,}0156$, also dort $k'' = 0{,}38$ und $1 - k'' = 0{,}62$, wo dann $\lambda'' = o$ nicht in Rechnung kommt. Jetzt hat man (No. 225.), $n = 1$ gesetzt (weil man nur *eine* Sprungöffnung hat).

$$\mathfrak{A} = 0{,}5 \, . \, \frac{50{,}24^2 + 19{,}625^2}{50{,}24^2} + 1{,}5 \, . \left(\frac{19{,}25}{0{,}785}\right)^2 = 902$$

$$\mathfrak{B} = \frac{12000 - 46{,}8 \, . \, 5}{31{,}2 \, . \, 5} + \frac{40}{59 \, . \, 8} \, . \left(\frac{19{,}625}{50{,}24}\right)^2 = 75{,}57$$

Demnach die Sprunghöhe bei 120 Fuſs Fallhöhe

$$h = -150 + \sqrt{\left(22500 + \left(\frac{19{,}625}{0{,}62 \, . \, 0{,}785}\right)^2 . \frac{300 \, . \, 120}{902 + 75{,}57}\right)}$$
$$= -150 + \sqrt{(22500 + 19065)} = 203{,}6 - 150 = 53{,}6'$$

Nach der gewöhnlichen Rechnung hätte man allgemein

$$h = -150 + \sqrt{(22500 + 300 \, . \, H)}$$

also hier $h = -150 + \sqrt{(22500 + 36000)} = 91{,}8'$

Aber nimmermehr würde der Strahl diese Höhe erreichen.

Würde statt der dünnen Platte ein kurzes Springrohr angebracht, so müſste unter dem Wurzelzeichen 0,81 statt 0,62 geschrieben werden, womit sich dann die Zahl 19065 in die 11168 verwandelt, und $h = -150 + \sqrt{(22500 + 11168)} = 33{,}5'$ wird. Es flieſst jetzt mehr Wasser als vorher ab, daſs also c in der Strecke λ gröſser wird, und der Widerstand gleichfalls etwas gröſser werden muſs. Darum wird jetzt die Strahlhöhe allemal um etwas kleiner als $\frac{2}{3}$ von der Höhe, welche der Strahl bei einer Sprungöffnung in einer dünnen Platte erreicht; $\frac{2}{3} \, . \, 53{,}6$ wäre $= 35{,}7'$. Es folgen nun noch zur allgemeinen Lehre von den Röhrenleitungen

VI. Hierher gehörige Formeln von Dubuat und Prony.

§. 205.

Dubuat setzt $H - \frac{c^2}{\gamma^2 . 4g} = H - \frac{c^2}{470}$ in Bezug auf Pariser Zolle, und nun $\frac{H - \frac{c^2}{470}}{\lambda} = \frac{1}{b}$, oder $\frac{\lambda}{H - \frac{c^2}{470}} = b$; $\frac{\alpha}{3{,}14 \, . \, d}$ (oder die Kreisfläche mit dem Umfange dividirt) $= r$ (daſs also bei ihm $r = \frac{1}{4} d$ ist); dann setzt er hypothetisch

$$c = \psi \sqrt{\frac{r}{b}} \left(= \psi \, . \sqrt{\frac{d \, . \left(H - \frac{c^2}{470}\right)}{4 \, . \, \lambda}} \right)$$

Hiermit wird $$\psi \left(= c \, . \sqrt{\frac{4\lambda}{d \, . \left(H - \frac{c^2}{470}\right)}} \right) = c \, . \sqrt{\frac{b}{r}}$$

oder $$\tfrac{1}{2} \psi = c \, . \sqrt{\frac{\lambda}{d \, . \left(H - \frac{c^2}{470}\right)}}$$

Nach ihm ist also

$$c = \tfrac{1}{2}\psi \cdot \sqrt{\frac{d.\left(H - \frac{c^2}{470}\right)}{\lambda}} \left(= \psi \cdot \sqrt{\frac{r}{b}}\right)$$

Er bringt dann noch mancherlei Künsteleien an, um die Resultate der Rechnung den Resultaten der Beobachtungen noch näher zu bringen, und kommt hiermit auf die Formel

$$c = \frac{\psi \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - logn.(\sqrt{b} + 1{,}6)}$$

Er fand nun durch die Bestimmung

$$\psi = \frac{c \cdot [\sqrt{b} - logn.(\sqrt{b} + 1{,}6)]}{(\sqrt{r} - 0{,}1)}$$

$\psi = 297$, was mit $\psi = 2\varphi = 300$ sehr gut zusammenstimmt. Er gieng noch weiter. Die Formel sollte noch bis zu Haarröhrchen ihre Anwendbarkeit behalten; er fügte daher zur nochmaligen Korrektion noch ein subtraktives Glied bei, und fand so die allgemein genügend seyn sollende Formel

$$230.)\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - logn.(\sqrt{b} + 1{,}6)} - 0{,}3 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)$$

Wir haben aber oben schon gesehen, daſs die höchst einfache Formel $c = 150 \cdot \sqrt{\frac{dH}{\lambda}}$ für die Ausübung überflüssig genau ist, zumal da wegen allmählig abgesetzter Unreinigkeiten doch immer d etwas gröſser bei der wirklichen Anlage genommen werden muſs, als man bei der Berechnung zum Grunde gelegt hat. Eine solche Zulage zu d bleibt aber auch bei dem reinsten Wasser darum nöthig, weil sich allmählig Luft aus dem Wasser entbindet, was die Bewegung verzögert. Endlich ist es aber auch unrichtig, eine Formel, die bald gröſsere bald kleinere Resultate als die Erfahrung giebt, dadurch verbessern zu wollen, daſs man noch ein bestimmtes Glied, wodurch das Resultat vergröſsert oder verkleinert wird, hinzufügt, ohne zu wissen, ob das Resultat ohne die Vergröſserung vielleicht schon zu groſs oder zu klein war. Daher kommt es dann auch, daſs die doppelt korrigirte Formel (No. 230) oft Resultate giebt, die sich weiter von der Wahrheit entfernen, als die erste $\left(c = \psi \cdot \sqrt{\frac{r}{b}}\right)$ und als die unsrige $\left(c = 150 \cdot \sqrt{\frac{dH}{\lambda}}\right)$. Und mit dem Allem hat *Dubuat* die Beantwortung hierher gehöriger Fragen noch ungemein erschwert. Seine Formel ist sogar transcendentisch, weil der Werth von b selbst schon c^2 enthält. Wir konnten aus allen diesen Gründen die Dubuatsche Formel hier nicht aufnehmen. Uebrigens findet man ihre Deduktion und ihren Gebrauch in meinem *Lehrbuch der Hydraulik VIII. Kap.* sehr umständlich erläutert.

§. 206.

Wie *Prony* die Bewegung des Wassers in offenen Kanälen betrachtet hat, weiſs man aus §. 161. Dieselbe Methode wendete er in der dort angezeigten Schrift auch auf die

Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen an. Man findet darin (S. 84 der Uebersetzung) die nachstehende hypothetische Formel

$$231.)\quad \tfrac{1}{4} g\, d j = \alpha U + \beta U^2$$

und nach unsern bisherigen Bezeichnungen

$$232.)\quad \tfrac{1}{2} g\, d\, .\ \frac{H}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

bringt man mit ihm alles auf Meter, wornach unser $g = 4{,}904397$ ist, so hat man

$$233.)\quad 2{,}452198\ .\ \frac{dH}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

wo α und β Koëfficienten sind, welche aus den angestellten Beobachtungen abgeleitet werden müssen.

Die Einführung der Höhe g thut nichts zur Sache, denn da α und β erst noch bestimmt werden müssen, so hätte er einfacher $\frac{dH}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$ setzen können, oder auch

$$\alpha c + \beta c^2 = \varphi^2\ .\ \frac{dH}{\lambda}$$

wo man statt φ^2 jede Zahl also auch 150^2 setzen kann, weil hiernach die Werthe von α und β bestimmt werden. Ebendarum kann man aber auch, indem man alles mit β dividirt $\frac{\alpha}{\beta} . c + c^2 = \frac{\varphi^2}{\beta} . \frac{dH}{\lambda}$ setzen, was dann, weil für $\frac{\varphi^2}{\beta}$ jede beliebige Zahl gesetzt, und der Koëfficient $\frac{\alpha}{\beta}$, den die Beobachtungen geben, schlechthin durch α ausgedrückt werden kann, mit der Gleichung

$$c^2 + \alpha\ .\ c = \varphi^2\ .\ \frac{dH}{\lambda}$$

ganz einerlei wäre. Man sieht also aus der Vergleichung mit No. 221, daſs *Prony* nur noch das Glied αc eingeschaltet hat. Dieser Zusatz ist auf keine Analogie mechanischer Lehren gegründet, sondern bloses Hülfsmittel der Analysis, um die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von d, H und λ weniger zu beschränken. Hiermit gelangte derselbe zu Resultaten, die den Beobachtungen allerdings noch etwas näher kommen, als die aus unserer Formel. Er findet für die Gleichung No. 233.

$$234.)\quad \alpha = 0{,}00017;\qquad \beta = 0{,}003416$$

Hiernach wird

$$235.)\quad c = -\ 0{,}0248829 + \sqrt{\left(0{,}000619159 + 717{,}857\ .\ \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

Ich theile aus der von ihm für die oben (§. 194) erwähnten 51 Beobachtungen berechneten Tafel hier nur die Resultate mit, welche sich auf die dort angeführten 5 Beobachtungen beziehen:

	beobachtet	berechnet	
No. 6	0,13010	0,13303	Alles in Bezug auf Meter.
» 12	0,33087	0,33590	
» 35	0,75999	0,73432	
» 43	1,06003	1,05924	
» 50	1,93011	2,07979	

Die stärkste Abweichung zeigt sich No. 50, wo sie aber doch nur $\frac{1}{14}$ der beobachteten Geschwindigkeit beträgt, da unsere Formel diese Abweichung zu $\frac{1}{10}$ angiebt. Dieser Unterschied der beiderseitigen Resultate (er beträgt $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ der beobachteten Geschwindigkeit) verschwindet für die Ausübung, wo man, auch ohne Rücksicht auf sich ansezzende Unreinigkeiten, zur Sicherheit d um $\frac{1}{10}d$ vergrößert (wo dann die Röhrenweite schon um $\frac{1}{5}$ vergrößert wird). Ich habe daher die hinlänglich genaue Bestimmung $c = 150 \,.\, \sqrt{\frac{dH}{\lambda}}$ wegen ihrer Einfachheit auch der Pronyschen vorgezogen.

Uebrigens hat *Prony* ganz übersehen, daſs λ nicht sehr klein werden darf, wenn die Anwendung von No. 235. gestattet seyn soll, und daſs man λ nicht kleiner als etwa $100 . d$ haben müsse, wenn die Abweichung von der Wahrheit unbedeutend bleiben soll.

In Bezug auf Pariser Fuſse erhält man

$$236.)\quad c = -\,0{,}0766 + \sqrt{\left(0{,}005868 + 2209 \,.\, \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

VII. Röhrenleitungen über Anhöhen.

§. 207.

Ich rede hier von Röhrenleitungen, die sich über das Niveau des Wasserspiegels in dem Behältnisse, aus welchem das Wasser abgeleitet werden soll, erheben, wie (*Fig.* 81), wo ich den Wasserspiegel in der horizontalen Afg bei A annehme, und das Wasser über $a\,b\,c\,d$ bis in e herab geleitet werden müſste. Die gröſste Höhe über der horizontalen Ag ist die lothrechte cf, und die Tiefe unter Ag, bis zu der das Wasser geleitet werden soll, ist die lothrechte ge.

Von Durchbrechung eines Stollens nach Ag oder anzubringenden Maschine ist hier nicht die Rede, sondern von einer ordentlichen Röhrenleitung, durch die das Wasser über die Anhöhe abflieſsen kann.

§. 208.

Hier kommt uns nun der Druck der Atmosphäre zu Statten. Bei dem niedrigsten Stande, den man am Barometer in der Gegend, wo die Röhrenleitung angelegt werden soll, beobachtet hat, sey die Quecksilberhöhe in Par. Zollen $= \mathfrak{H}$. Man thut wohl, wenn man $\mathfrak{H}$ noch um eine Linie kleiner nimmt, als sie Beobachtungen gegeben haben. Die Atmosphäre drückt nun auf den Wasserspiegel bei A als eine Wassersäule von der Höhe $14 . \mathfrak{H}$, und vermag daher das Wasser bis in c zu erheben, wenn die Höhe $cf < 14 . \mathfrak{H}$ ist, wofern der Gegendruck der Atmosphäre bei c beseitigt wird.

Diese Beseitigung bewirkt aber die Röhrenleitung selbst, wenn sie von c aus bis zu einer tief genug liegenden Stelle e fortgesetzt wird.

Die Röhrenleitung werde bis zu irgend einer Stelle d fortgesetzt, die in der Tiefe ck unter c liege, so wirkt die Atmosphäre bei d noch als eine Wassersäule von der Höhe $14 \,.\, \mathfrak{H} - ck$ von d nach c dem Abflusse des Wassers entgegen, so daſs die Atmosphäre bei A als eine Wassersäule von der Höhe $14 \,.\, \mathfrak{H}$ noch den Gegendruck einer Wassersäule von der Höhe $cf + 14 \,.\, \mathfrak{H} - ck$ zu überwinden hat. Es bleibt also

bei A noch eine bewegende Kraft übrig
$= 14 \,.\, \mathfrak{H} - (cf + 14 \,.\, \mathfrak{H} - ck) = ck - cf$
d. i. der Druck einer Wassersäule von der Höhe $ck - cf$,
welche von A nach c wirkt.

Ueberhaupt ist die durch die Atmosphäre gewonnene Kraft, welche zur Bewegung des in der Höhe cf entgegen stehenden Wassers längs der Röhrenleitung Acd verwendet wird, allemal $= ck$. Fällt k in f d. h. wird die Röhrenleitung bis in m fortgeführt, so ist die erlangte der Atmosphäre abgewonnene] Kraft eine Wassersäule von der Höhe cf. Wird sie bis in n fortgesetzt, so ist

237.) die der Atmosphäre abgewonnene Kraft = dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $co = cf + fo$.

Es wirkt aber die Atmosphäre überhaupt nur als eine Wassersäule von der Höhe $14 \,.\, \mathfrak{H}$, ihren *geringsten* Druck in Anschlag gebracht; mehr kann ihr also auch nicht abgewonnen werden, und es ist

238.) die von der Atmosphäre gewonnene Druckhöhe gegen die Einfluſsmündung der Röhrenleitung bei A wie hier $cf + fo$ höchstens $= 14 \,.\, \mathfrak{H}$.
Oder allgemein:
Wenn die Röhrenleitung bis zu einer Stelle d geführt wird, zu der die lothrechte Höhe ck gehört, so ist die hiermit gewonnene Druckhöhe die ck, so lange die ck nicht gröſser als $14 \,.\, \mathfrak{H}$ ist.

Soll Abfluſs möglich seyn, so muſs der Druck den Gegendruck übertreffen d. h. so muſs d unterhalb m fallen, weil das Wasser in der Höhe cf entgegen drückt.

Reicht die Röhrenleitung bis in n, so hat man die Druckhöhe co gewonnen, und die fo wird als Ueberwucht zur wirklichen Bewegung verwendet. Wenn aber auch die $co > 14 \,.\, \mathfrak{H}$ wäre, so bleibt doch

die Ueberwuchtshöhe allemal nur $= 14 \,.\, \mathfrak{H} - cf$.

Ist z. B. $\mathfrak{H} = 25''$, so hat man $14 \,.\, \mathfrak{H} = 350'' = 29$ Fuſs 2 Zoll. Wäre nun die Röhrenleitung bis in n herab geführt, und $co = 24'$, so hätte man zur wirklichen Bewegung, wenn die $cf = 20'$ wäre, noch die Ueberwuchtshöhe $fo = 24' - 20' = 4'$.

Wäre $co = 14 \,.\, \mathfrak{H} = 29'\ 2''$, so hätte man die gröſstmögliche Ueberwuchtshöhe, welche hier gewonnen werden könnte, nämlich $= 29'\ 2'' - 20' = 9'\ 2''$. Sie würde

nun nicht ferner vergröſsert, wenn auch n noch tiefer genommen und die Röhrenleitung bis in e herabgeführt würde.

In diesem Exempel könnte also das Wasser vermöge des athmosphärischen Drucks noch mit einer bedeutenden Ueberwucht über die Stelle c geleitet werden, welche 20′ hoch über dem Wasserspiegel bei A liegt.

§. 209.

Zur wirklichen Anwendung würde aber erfordert, daſs die Röhrenleitung bei c nach Belieben geöffnet und luftdicht verschlossen werden könnte. Werden nun beide Mündungen, bei A und bei e verspundet, und dann die ganze Röhrenleitung bei c mit Wasser gefüllt; nunmehr dieselbe bei c wieder verschlossen und die beiden Mündungen wieder geöffnet, so beginnt das Wasser im Behältnisse bei A seinen Abzug, zu dessen Fortdauer nichts weiter nöthig ist, als daſs beständig Wasser über der Einfluſsmündung bei A erhalten werde.

§. 210.

Zur Leitung des Wassers über eine Anhöhe $Aabc$ wird also erfordert 1) daſs die Röhrenleitung bis in eine Stelle n herab geleitet werde, für welche die zugehörige lothrechte co gröſser als die cf sey; 2) daſs die $cf < 14 \,.\, \mathfrak{H}$ seyn müsse.

Treten beide Bedingungen ein, so hat man

Ueberwuchtshöhe, bisher mit H bezeichnet, hier $= fo$

Ein Theil dieser Ueberwuchtshöhe wird aber allemal wie bisher zur Ueberwindung der Hindernisse verwendet, so daſs, ganz wie bisher, nur noch die Geschwindigkeitshöhe

$$v = \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$$

übrig bleibt. Diese Geschwindigkeitshöhe kann aber höchstens $= 14 \,.\, \mathfrak{H} - cf - 2$ werden; also höchstens

$$\frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}} = 14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - z$$

wenn wir die Höhe cf mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen, und unter z die Widerstandshöhe verstehen, welche von A bis c in Rechnung kommt. Die Höhe $H = fo$ bezieht sich auf die Röhrenleitung $Aabcdmn$, die in n ihren Ausgang hat. Wird aber die Röhrenleitung bis in e verlängert, so hat man $H = ge$; weil aber höchstens

$$\frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}} = 14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - z \text{ werden kann,}$$

so kann die Vergröſserung von H auch nur bis zu einer bestimmten Grenze die Abfluſsmenge vergröſsern, bis nämlich

$$H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \cdot (14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - z) \text{ wird.}$$

Bezeichnen wir die Länge *Aabc* mit λ, den Röhrendurchmesser mit d, so ist (nach No. 217.)

$$z = \left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C} \,.\, v\right)$$

Es kann also höchstens

$$H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \,.\, \left(14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - \left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v\right)$$

in Rechnung kommen. Setzen wir die Länge $cdmne = \lambda'$, so hat man

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d}$$

also höchstens

$$H = \left(1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . \left(14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - \left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v\right)$$

und höchstens

$$\frac{H}{1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}} = 14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - \left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v$$

oder höchstens

$$\frac{H}{1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}} - 14 \,.\, \mathfrak{H} + \mathfrak{h} = -\left(1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v$$

Demnach höchstens

239.)
$$v = \frac{14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - \frac{H}{1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}}}{1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}}$$

Es bleibt übrigens nach den obigen Lehren allemal $v = \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}$ oder hier $= \frac{H}{1{,}5 + \frac{\lambda + \lambda' - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}}$, solange dieser Werth von v den in No. 239. nicht übertrifft, oder auch solange v nicht gröſser als $\frac{14 \,.\, \mathfrak{H} - \mathfrak{h} - v}{1{,}5 + \frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}}$ wird.

Dabei bezieht sich wie bisher alles auf Pariser Zolle.

§. 211.

Eine solche Röhrenleitung, welche das Wasser bis über das Niveau des Wasserspiegels bei *A* (*Fig.* 81) erhebt, heiſst auch ein *Heber*, seine Länge mag wie man will beschaffen seyn; er könnte z. B. auch nur 12 = 15 = 20 Zolle lang seyn. Man kann ihn zu den

Wasserhebungsmaschinen zählen; wegen des theoretischen Zusammenhangs hielt ich es für natürlicher, ihn hier beizuordnen.

Seine Wirkung läſst sich bedeutend vergröſsern, wenn man das Wasser in einen auf einem hohen Gebäude, wie bei *B* (*Fig.* 81) angebrachten Kasten erhebt, von da es dann durch einen solchen Heber nach α, β, γ bis über δ nach ε und *C* herab geleitet werden könnte.

In der speciellen Maschinenlehre werden wir sehen, wie sich ein solcher Heber mit einer Maschine sehr zweckmäſsig verbinden lasse.

VIII. Festigkeit der Röhren.

§. 212.

Die Beantwortung der Frage, wie dick man die Röhrenwände machen müsse, um gegen das Bersten hinlänglich gesichert zu seyn, ist dem praktischen Ingenieur von gröſster Wichtigkeit.

Sie setzt ein aufgenommenes Profil der ganzen Röhrenleitung voraus, oder nur ihrer centrischen Linie, wobei man sich nach (*Fig.* 82) auf folgende Weise verhalten kann.

a sey der Anfang dieser centrischen Linie am Behältnisse *A*. Wir wollen annehmen, die Länge der ganzen Röhrenleitung sey auf dem Felde mit 9 Pfählen abgesteckt und diese Pfähle mit No. 1, No. 2 bis No. 9 bezeichnet, womit also 9 Strecken abgeschnitten wären, deren Längen ich durch δ', δ'', δ''' etc. ausdrücken will.

Die abgesteckte Linie wird nun zugleich nivellirt, womit man die verschiedenen Tiefen der Stellen findet, in welchen die Pfähle eingeschlagen worden sind. Man kennt also die Tiefe des ersten Pfahls unter *a*, die Tiefe des zweiten unter dem ersten, die des dritten unter dem zweiten u. s. f. Diese Tiefen unter einander von Pfahl zu Pfahl wollen wir mit τ', τ''......τ^{IX} bezeichnen.

Man ziehe nun aus *a* die horizontale az, dann dieser parallel in den verschiedenen Tiefen τ', $\tau' + \tau''$, $\tau' + \tau'' + \tau'''$ u. s. f., die bc, de, fg etc. und beschreibe nunmehr aus *a* mit dem Halbmesser δ' den Bogen $m'\,n'$, der die bc in 1 schneidet; aus 1 mit dem Halbmesser δ'' den Bogen $m''\,n''$, der die de in 2 schneidet; aus 2 mit dem Halbmesser δ''' den Bogen $m'''\,n'''$, der die fg in 3 schneidet u. s. f., so sind 1, 2, 3 u. s. f. die Stellen der nach einander folgenden Pfähle. Die gröſste Tiefe ist hier die VII 7, über der horizontalen $x\,7\,y$.

Nunmehr lassen sich die Pressungen bestimmen, welche die Röhren in jeder Tiefe vom Wasser leiden.

Man ziehe durch 9 die horizontale $9\,p\,o$, welche die VII 7 in *p* schneidet, so ist der Druck des Wassers in 7

fürs Erste = dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $p\,7$.

Hierzu kommt nun aber noch

fürs Zweite der Druck den das in Bewegung gesetzte und längs der Röhrenleitung abfliefsende Wasser in 7 zu überwinden hat. Dieser ist in der Stelle 7 = dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $\left(\frac{\lambda - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v$, wo aber λ nur die Länge 7 8 9 bezeichnet.

Fürs Dritte der Druck der Atmosphäre gegen die Ausflufsmündung bei 9, die dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $14 \,.\, \mathfrak{H}$ (§. 208) gleich ist.

Ebenso leidet die Stelle q den Druck dreier Wassersäulen zusammen von der Höhe

$$(p\,7 - s\,7) + \left(\frac{\text{Länge } q\,r\,7\,8\,9 - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v + 14 \,.\, \mathfrak{H}.$$

Die Stelle r den Druck dreier Wassersäulen von der summirten Höhe

$$(p\,7 - t\,7) + \left(\frac{\text{Länge } r\,7\,8\,9 - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v + 14 \,.\, \mathfrak{H}.$$ Allgemein:

240.) Wenn wir die Tiefe $p\,7$ mit ζ, die Höhe irgend einer andern Stelle z. B. q über 7 mit ζ' bezeichnen, so leidet die innere Wandfläche an dieser Stelle den Druck einer Wassersäule von der summirten Höhe

$$\zeta - \zeta' + \left(\frac{\text{Länge von der Stelle bis zu } 9 - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v + 14 \,.\, \mathfrak{H}. \; ^{*)}$$

Dagegen drückt die Atmosphäre auch auf die äufsere Fläche der Röhren als eine Wassersäule von der Höhe $14 \,.\, \mathfrak{H}$. Ist daher $14 \,.\, \mathfrak{H}$ gröfser als die summirte Höhe (No. 240.), so kann die Röhre, wenn sie aus dünnem Blech besteht, zusammengedrückt werden. Bei einem mir vorgekommenen Falle der Art mufste ich daher die blecherne Röhre innerhalb mit eisernen Ringen füttern lassen.

§. 213.

Bezeichnen wir also die Druckhöhe, welcher die Festigkeit der Röhrenwände widerstehen mufs, mit k, so wird nur noch

$$241.) \quad K = \zeta - \zeta' + \left(\frac{\text{Länge von der Druckstelle bis zu } 9 - 46{,}8 \,.\, d}{31{,}2 \,.\, d} + \mathfrak{C}\right) . v$$

Ist nun δ' der Durchmesser einer hinlänglich starken Röhrenleitung, K' die Höhe des Wasserspiegels in A über der tiefsten Stelle 7, und nun, wenn dieselbe bei 9 zugespundet ist, so dafs die ganze Höhe VII 7 zu unterst drückt, Δ' die Wanddicke, welche den Druck bei 7 mit Sicherheit auszuhalten vermag, so läfst sich daraus auch die sichere

*) Es giebt hiernach eine gewisse Stelle, wo der Druck ein Maximum ist, wo also die Röhrenwand am dicksten seyn mufs.

Wanddicke Δ für eine Röhrenleitung vom Durchmesser d so angeben, dafs sie eine Druckhöhe K auszuhalten vermag, bei welcher das Wasser mit der zu v gehörigen Geschwindigkeit abfliefst.

Hat man nämlich bei der Dicke Δ' die Druckhöhe K', so wird

$$\Delta = \frac{K \cdot d}{K' \cdot d'} \cdot \Delta'$$

Wird salziges Wasser durchgeleitet, dessen specifisches Gewicht $= \mu$ wäre (das des reinen Wassers $= 1$ gesetzt), so hätte man allgemeiner

$$242.)\quad \Delta = \frac{\mu \cdot K \cdot d}{K' \cdot d'} \cdot \Delta'$$

§. 214.

Eigene Erfahrungen gaben mir

242*.) 1. *Für gegossene eiserne Röhren.*

$K' = 240$ Fufs, $d' = 10$ Zoll, $\Delta' = 12$ Linien. Daher $\Delta = \frac{\mu \cdot K \cdot d}{200}$ Linien.

243.) 2. *Für büchene Röhren.*

$K' = 240$ Fufs, $d' = 14$ Zoll, $\Delta' = 30$ Linien. Daher $\Delta = \frac{\mu \cdot K \cdot d}{112}$ Linien.

244.) 3. *Für fichtene und förlene Röhren.*

$K' = 40$ Fufs, $d' = 6$ Zoll, $\Delta' = 60$ Linien. Daher $\Delta = \frac{\mu \cdot K \cdot d}{4}$ Linien.

Ich bemerke hierbei

1.) Dafs die büchenen Röhren mit fast 3 Zoll breiten und beinahe $\frac{1}{4}$ Zoll dicken eisernen Reifen belegt waren, die nur 8 Zoll weit von einander ablagen.

2.) Dafs die eisernen Reife an den fichtenen Röhren viel schwächer, in Breite und Dicke waren, und etwa 8 Fufs weit von einander abstanden.

3.) Gewifs hatten hier aber die Röhren eine bei weitem gröfsere Festigkeit, als nöthig war. Die büchenen wurden schon durch die Reife allein in ihrem Bestande erhalten; denn eine von ihnen war vorher schon von oben bis unten beinahe ganz durchgerissen, also blos durch die scharf und gewaltsam angetriebenen Reife zusammengehalten.

4.) Die Wanddicke gegossener eiserner Röhren nehme man wegen der häufigen Unvollkommenheit des Gusses nie unter 3 Linien, wenn auch die Berechnung weniger giebt.

Uebrigens bezieht sich allemal K auf Fuſse; es muſs also der nach (No. 251.) in Zollen gefundene Werth erst noch mit 12 dividirt werden; d bezieht sich auf Zolle und Δ auf Linien.

IX. Technische Bemerkungen über die Röhrenleitungen.

§. 215.

In den vorstehenden VIII Absätzen war nur von den mannichfaltigen Verhältnissen zwischen den bei Röhrenleitungen vorkommenden Abmessungen, Kräften, Widerständen und Geschwindigkeiten die Rede. Zu den wirklichen Anlagen gehören technische Kenntnisse, worüber ich aber nach der mir vorgezeichneten Ordnung erst weiter unten in der speciellen Maschinenlehre die nöthigen Bemerkungen mittheilen werde (s. das XXIX. Kap.)

XIV. Kapitel.

VOM NIVELLIREN ODER WASSERWAEGEN.

§. 216.

Nivelliren oder *Wasserwägen* heifst untersuchen, wie tief eine Stelle *A* unseres Erdkörpers unter einer andern Stelle *B* liege, oder, mit andern Worten, wieviel die Stelle *A* dem Mittelpunkte der Erde näher liege als die *B*. Wir haben im Vorhergehenden schon gesehen, wie unentbehrlich diese Untersuchung bei Wasserleitungen, sowohl in offenen Kanälen als in Röhrenleitungen ist.

Zu den Schriften, welche hierüber Unterricht ertheilen, gehören

Abhandlungen der kön. schwed. Akad. d. W. für 1744.

Picard, Abhandlung vom Wasserwägen. Berlin 1749.

Roth, Beschreibung einer neuen Bergwage. Leipzig 1758.

Lambert, Anmerkung über die Branderschen Mikrometer. Augsburg 1769.

Derselbe, Beiträge zum Wasserwägen. Berlin 1770.

Müller, Beschreibung eines neuen vorzüglich gemeinnützigen und bequemen Werkzeugs zum Nivelliren. Göttingen 1792.

Mayer, Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, im 3ten Thle. (3te Ausg,)

Bugge, Gründliche und vollständige theoretisch-praktische Anleitung zum Feldmessen, aus dem Dänischen übersetzt von *Tobiesen*. Altona 1798.

Hug, Tabellen zum Nivelliren mit der Hängewage. Halle 1798.

Mönnich, Lehrbuch der Mathematik 1. Th. Berlin 1809.

Die hierin befindliche Abhandlung vom Nievelliren ist auch besonders abgedruckt, unter dem Titel: kurze Theorie und Praxis des Nivellirens.

Hogrewe, praktische Anweisung zum Nivelliren. Hannover 1800.

Gilly, praktische Anleitung zur Anwendung des Nivellirens in den bei der Landeskultur vorkommenden gewöhnlichen Fällen. Berlin 1801.

Meinert, Anweisung zum Nivelliren und Profiliren. Halle 1801.

Traité complet sur la Théorie et la Pratique du Nivellement, par *Mr. Fabre*, Ingenieur en Chef du Corps imperial des Ponts et Chaussées.

Das zuletzt genannte Werk ist das neueste und ausführlichste; es enthält 368 Seiten in 4. 6 Nivellementstafeln und 21 Kupfertafeln. Uebertriebene Weitschweifigkeit hat die Seitenzahl so sehr vergröſsert. Ich werde mich hier ohne Nachtheil der Deutlichkeit kurz fassen. In meiner *Anleitung zum Straſsen- und Brückenbau* findet man gleichfalls ausführlichern Unterricht.

§. 217.

Man unterscheidet *wahre* Horizontalflächen, *wahre* Horizontallinien, von *scheinbaren* Horizontalflächen, *scheinbaren* Horizontallinien. Jedes Stück einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde ist, oder auf der die Richtung der Schwere senkrecht ist, heiſst eine wahre Horizontalfläche; jede in derselben gezogene Linie, wie sie übrigens gekrümmt seyn mag, eine wahre Horizontallinie.

Jede *Ebene*, die eine wahre Horizontalfläche *berührt*, heiſst eine scheinbare Horizontalfläche; jede in einer solchen Ebene gezogene gerade oder krumme Linie eine scheinbare Horizontallinie.

§. 218.

Es sey z. B. $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\varkappa\mu\nu$ (*Fig.* 83) ein Durchschnitt durch Erhöhungen und Vertiefungen auf unserer Erdoberfläche, *c* der Mittelpunkt der Erde, *b* eine auf der hökkerichten Erdfläche willkührlich bezeichnete Stelle, und nun $\alpha\, m\, n\, o\, p\, b\, q\, r\, s$ ein mit dem Halbmesser *cb* beschriebener Kreisbogen; so ist $\alpha\, b\, s$ eine von den unzähligen wahren Horizontallinien, welche zur Stelle *b* gehören. Zieht man die *bd* auf die *c b* senkrecht, so ist *b d* eine der unzähligen scheinbaren Horizontallinien, welche der Stelle *b* zugehören.

Diese *bd* entfernt sich nach *d* hin in allen folgenden Punkten immer mehr vom Mittelpunkte der Erde; sie *steigt* also nach *d* hin. *v'* könnte der Rücken eines an dieser Stelle mehrere tausend Fuſse hohen Gebirges seyn, über das sich die nach *f* verlängerte *bd* in bedeutender Höhe *fv'* erhebt.

Begreiflich kann also Wasser, dessen Oberfläche in *b* stände, nicht nach *b d* abflieſsen, wohl aber nach einer Stelle, welche unter der horizontalen *b r s* liegt. Der Ausdruck *horizontal*, ohne das Beiwort *scheinbar*, bezieht sich hier allemal auf das *wahre* Horizontale.

Soll das Wasser in einem offenen Kanale von *b* bis *e* geführt werden, so muſs die Bodenfläche dieses Kanals überall unterhalb der horizontalen *b r s* liegen.

§. 219.

Die Abweichung der scheinbaren Horizontallinie von der wahren beruht auf einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung.

Es sey B (*Fig.* 84) eine auf der Erdoberfläche angenommene Stelle; $Bmopq$ eine mit dem Halbmesser BK beschriebene Kreislinie; Bd auf KB senkrecht, und dKF durch der Erde Mittelpunkt gezogen, also m lothrecht unter d; beträgt nun BKm nicht über $\frac{1}{5}$ Grad, so ist sehr genau

$$dm = \frac{Bd^q}{2 \cdot BK} \quad (☾$$

Zieht man nämlich die Sehne Bm und fällt das Perpendikel Kv, so ist $KBm + mBd = 90^\circ$, aber auch $KBm + KBF = 90^\circ$, also $mBd = KBF$, oder $BFd = mBd$.

Weil nun der Winkel d beiden Dreiecken dBF und dBm gemein ist, so hat man $dF : dB = dB : dm$ und

$$dm = \frac{dB^q}{dF} = \frac{dB^q}{mF + dm}$$

Nun geben die trigonometrischen Tafeln $Sec.\ \frac{1}{5}^\circ$ oder $Sec.\ 12' = 1{,}0000061$, also $dm = 0{,}0000061 \cdot BK$; demnach aus (☾)

$$dm = \frac{dB^q}{2 \cdot BK + 0{,}0000061 \cdot BK} = \frac{dB^q}{2{,}0000061 \cdot BK}$$

Man fehlt also um weniger als $\frac{1}{300000}$ des wahren Werthes von dm, wenn man schlechthin

245.) $dm = \frac{dB^q}{2 \cdot BK}$ | wo $BK = 19630764$ Pariser Fufs gesetzt werden kann.

setzt.

In der Ausübung ist allemal BKm, als Winkel einer einzigen Station beim Nivelliren genommen, kleiner als $\frac{1}{15}^\circ$ oder Bm kleiner als eine geographische Meile, da dann (in No. 245.) um weniger als $\frac{1}{1000000}\ dm$ gefehlt wird.

§. 220.

Ist nun n eine Stelle auf der Erdfläche lothrecht unter d, so läfst sich, wenn man die Höhe dn weifs, auch die mn finden, um welche n tiefer liegt als B. Diese Tiefe (mn) ist das *Gefälle* von B bis n.

In n habe man einen lothrecht stehenden Gegenstand nt, an dem man von B aus (wobei auch ein Fernrohr zu Hülfe genommen werden kann) nach scheinbar horizontaler Richtung die Stelle d bemerkt. Begiebt man sich nun in n und mifst die Höhe nd, so findet man

246.) Das Gefälle $mn = dn - dm = dn - \frac{dB^q}{2 \cdot BK}$

Ex. Es sey $Bd = 22000'$, so hätte man, wenn $dn = 25'$ gefunden wird

$$mn = 25 - \frac{22000^2}{39261528} = 25 - 12,3 = 12,7'.$$

§. 221.

Wäre $\alpha\theta$ (*Fig.* 85) ein aus α mit dem Erdhalbmesser beschriebener Bogen, und ab eine 30′ lange scheinbare Horizontallinie; dann aus b eine gleiche bc, aus c die gleiche cd u. s. f. 1000 solche scheinbare Horizontallinien, so wäre die Abweichung der einzelnen 30′ langen scheinbaren Horizontallinien von den durch ihre Anfangspunkte laufenden wahren $= \frac{30^2}{39261528}$ Fuſse, also die Abweichung der letzten von der untersten Horizontallinie $\alpha\theta$ (z. B. die $g\mu$) $= \frac{10000 \cdot 30^2}{39261528} = 0,023' = 0,276''$, daſs also eine aus so kurzen scheinbaren Horizontallinien auch auf sehr bedeutende Längen zusammengesetzte doch am Ende nur eine unbedeutende Abweichung geben kann.

Auf den hier vorgetragenen Sätzen beruhen die verschiedenen Nivellirmethoden; nämlich

1.) die mit der *Setzwage* auf der *Setzlatte.*

2.) Die mit dem *Hängebogen.*

3.) Die mit dem *Gradbogen.*

4.) Die *Visirmethode.*

Auf ganz andern Gründen aber beruht

5.) die durch das *Barometer.*

§. 222.

I. Die *Setzwage* (*Fig.* 86) ein von dem häufigen Gebrauche, welchen Maurer und Zimmerleute davon machen, sehr bekanntes Werkzeug, das aber von diesen Handwerkern sehr fehlerhaft gebraucht wird, giebt bei gehöriger Einrichtung sehr genaue Resultate.

rs ist eine 4 bis 4½ Zoll breite Leiste von Fichten- oder Tannenholz, die in ein eben so breites Brettstück mn unter einem rechten Winkel fest eingelassen ist. Es wird höchst trockenes Holz vorausgesetzt. Die Länge mn kann 5 bis 6 Fuſs betragen, die Höhe rs wenigstens 4½ Fuſs. Die Genauigkeit der Resultate ist bei weitem wichtiger als die Bequemlichkeit im Gebrauche. Zu gröſserer Befestigung dienen die Büge p, q. Die Grundfläche cd muſs ganz eben abgehobelt seyn.

Nahe unter s wird ein feines Häckcken angebracht, und von solchem herab eine feine Linie bis in e gezogen, welche auf cd genau senkrecht ist. Es ist auch genug, nur das untere auf das Brett mn fallende Endstück dieser Linie zu ziehen.

Am Häckchen bei s wird ein dünner Faden, der unten bei o mit einer kleinen Ku-

gel versehen ist, aufgehängt, und, damit der Faden frei anschlagen könne, bei *o* im Brett eine angemessene Vertiefung angebracht.

Man kann auch von *s* bis *c* herab eine Rinne einhauen lassen, in solcher die bemerkte Linie, die *Normallinie* ziehen und dann die Rinne mit Glas bedecken lassen, um auf solche Weise den Faden mit dem Gewicht, das *Senkel*, gegen den Wind zu schützen.

Zu dieser Setzwage gehört noch eine *Setzlatte ab* (*Fig.* 87), die auf ihrer oberen und unteren Fläche wohl abgehobelt seyn mufs; sie kann 18 bis 20 Pariser Fufs lang, 5 Zoll breit und ¾ bis 1 Zoll dick seyn, Sie dient, wie man sieht, zum Aufsetzen der Setzwage.

Zur genauen Verzeichnung der Normallinie, worauf hier alles ankommt, dient folgendes einfache Verfahren:

Bevor man noch eine Linie auf der Setzwage gezogen hat, schlägt man ein paar Pfähle *m*, *n* etwa 18′ weit von einander ein, und treibt den einen von ihnen so lange nach, bis der Senkelfaden der aufgesetzten Wage beiläufig in der Mitte der Leiste *so* anschlägt, da man dann die Anschlagslinie unten mit einem Punkt möglichst genau bemerkt. Dann dreht man die Setzwage herum, so dafs der Beobachter auf die andere Seite der Setzlatte treten mufs, und bemerkt aufs Neue die Anschlagslinie mit einem Punkt. Eine Linie von oben herab genau in der Mitte zwischen beiden Punkten durchgezogen ist die richtige Normallinie.

Werden nun ein paar Pfähle, wie *m*, *n* *Fig.* 87, so eingetrieben, dafs nach Auflegung der Setzlatte der Senkelfaden an der aufgesetzten Setzwage genau an der Normallinie anschlägt, so liegt die Grundfläche der Setzlatte horizontal.

Der Senkelfaden mufs sehr fein und die obere Fläche der Setzlatte *pq* der unteren *rv* genau parallel seyn.

Man kann bei guter Zurichtung dieses Werkzeugs auf die Länge von tausend Fufsen bis auf einen Fehler von 4 Linien selbst in dem Falle sicher seyn, wenn der Fehler immer auf einerlei Seite fallen sollte; da aber mögliche Fehler oft auf entgegengesetzte Seiten fallen, also viele sich untereinander aufheben, so ist klar, dafs dieses Werkzeug mit Sorgfalt gebraucht zu einem sehr genauen Resultate führen müsse.

§. 223.

Soll nun z. B. (*Fig.* 88) von *a* bis *k* abgewogen (nivellirt werden, so schlägt man von *a* bis *k* etwa von 18 zu 18 Fufsen, wenn die Setzlatte wenigstens 19′ lang ist, Pfähle ein, nur dafs solche einsweilen fest stehen. Von Nivellirdocken werde ich nachher reden.

Jetzt setzt man auf die Pfähle *a* und *b* die Setzlatte mit der Setzwage, und treibt den *b* allmählig tiefer, bis der Senkelfaden in die Normallinie einschlägt. Dann setzt man das Werkzeug auf die Pfähle *b* und *c*, und verfährt wie vorher. Steigt der Boden so, dafs die angefangene scheinbare Horizontallinie $\alpha\beta$ über *c* hinaus nicht mehr fortgesetzt

werden kann, so schlägt man neben c einen neuen Pfahl γ ein, setzt dann das Werkzeug auf γ und d, dann auf die d und e, und verfährt wie vorher. Fällt der Boden von d herab so stark, daſs man von e aus nicht mehr in derselben scheinbaren Horizontallinie fortfahren kann, so schlägt man neben e einen neuen Pfahl ε ein, ebenso z. B. bei h einen neuen Pfahl ζ u. s. f. bis man in k kommt,

Hierbei werden die einzelnen Pfahlhöhen am Anfange und bei jeder Aenderung genau gemessen, wie hier die Höhe von a bis an die Setzlatte $\alpha\beta$, die Höhe von m bis n, die Vertiefung po, die Erhöhung von r bis s u. s. f.

§. 224.

Jede Strecke zwischen zwei Pfählen heiſst eine *Station*; es können oft viele Stationen in eine einzige Horizontallinie fallen. Man kann dabei die ordentliche Entfernung z. B. von 18′ zur Regel machen; oft aber muſs man in einzelnen Strecken davon abweichen. Man nivellirt, soweit es die Umstände gestatten, geradezu nach k hin, um mit dem Nivellement zugleich die Länge der ganzen Linie wenigstens beiläufig zu erhalten. Es versteht sich, daſs während dem Abwägen ein Nivellementsverzeichniſs geführt werden muſs. Zweckmäſsig giebt man diesem 5 Kolonnen mit den verschiedenen Ueberschriften, unter welchen man die Zugehörigen Zahlen einträgt. Z. B.

Nummer der Strecken.	Anzahl der Stationen.	Länge der Strecken.	Steigen der Strecken.	Fallen der Strecken.
1.	5	90′	18″	—
2.	2	36′	16″	—
3.	4	72′	—	17″
4.	3	54′	—	3″
Summe	14	252′	34″	20″

Die Differenz alles Steigens und Fallens zeigt an, um wieviel die letzte Stelle höher oder tiefer liegt als die erste. Es versteht sich, daſs beim letzten Pfahle allemal noch ein Fallen eingeschrieben werden muſs, nämlich die Tiefe der Erdfläche (bei k) unter der Setzlatte.

§. 225.

Statt der Pfähle kann man sich auch tragbarer Stützen bedienen, die ich *Nivellirdokken* nenne. Es wird nämlich in ein dreiecktes starkes Dihlenstück (*Fig.* 89) ein etwa 4½ Fuſs hohes und 5″ breites Dihlenstück mn befestigt (*Fig.* 90), welches einen 4′ hohen Schlitz hat, der so breit ist, daſs sich die Setzlatte ungezwängt einschieben läſst. An diese Docke wird nun ein Backen xy angelegt, der sich auf und niederschieben und an jeder Stelle festschrauben läſst.

Zwei solche Docken vertreten die Stelle zweier Pfähle, machen daher alle Pfähle entbehrlich und sind bei weitem bequemer. Die Setzlatte wird mit jedem Ende durch den Schlitz einer solchen Docke oberhalb dem Backen durchgesteckt und auf den Backen aufgelegt. An jeder Docke kann eine messingene Schiene mit einer Skale angebracht werden, die nach Zollen und Linien abgetheilt ist.

§. 226.

II. Der *Hängebogen*. Er besteht aus einem Linial mit einem Bogen, beide aus einem Stück von Messingblech, wie *pvq* (*Fig.* 91), und ist zum Aufhängen an einer straff angespannten Schnur mit zwei Ohren *m, n* versehen. In der Mitte des Bogens *v* wird eine Linie, die Normallinie gezogen, an welche der Senkelfaden bei horizontaler Lage *pq* anschlägt; dieser ist an einem kleinen Köpfchen bei *c* aufgehängt. Des Bogens Halbmesser soll nicht unter 9″ betragen.

An beiden Enden der Schnur *AB* (*Fig.* 92) werden etwa 5′ lange Stäbe zu ¾ Zoll dick durchgesteckt, die ich unten mit einer etwa 5″ großen Scheibe, im Durchmesser, von Eisenblech versehe, um das Tiefersinken der Stäbe zu verhindern. Die Schnur mag 25 bis 30 Fuſs lang seyn.

Soll nun von *A* nach *B* hin (*Fig.* 93) nivellirt werden, so wird die Schnur mit den durchgesteckten Stäben *ab, cd* nach *AB* straff angezogen, und in ihrer Mitte, die bei *α* durch einen Knopf bemerkbar gemacht wird, der Hängebogen aufgehängt. Der vorangehende Gehülfe am Stabe *cd* rückt die Schnur nach dem Zurufe des Beobachters am Bogen auf oder nieder; der Beobachter läſst so lange verrücken, bis der Senkelfaden an die Normallinie anschlägt. Hält nun der Gehülfe bei *A* die Schnur z. B. 32″ hoch über der Scheibe bei *b*, und liegt in der erhaltenen horitontalen Lage der Schnur das andere Ende 17″ hoch über der Scheibe, so steigt der Boden von *b* bis *d* 32 — 17 = 15″. Man wird zugeben müssen, daſs der mögliche Fehler, auch beim sorgfältigsten Gebrauche dieses Werkzeugs, auf eine Länge von 100′ schon 2 Linien betragen kann. Doch kann man bei einer etwas bedeutenden Anzahl von Stationen immer die Hälfte der Fehler, als aufgehoben ansehen, wie es nämlich der Fall ist, wenn wir zur Sicherheit annehmen, daſs ¾ aller Fehler auf die eine und nur ¼ auf die entgegengesetzte Seite fallen. Man wird also auf eine Länge von 100 Fuſsen immer auf einen Fehler von 1‴ rechnen, und bei einer beabsichtigten Wasserleitung auf die Möglichkeit dieses Fehlers Rücksicht nehmen.

§. 227.

III. Der *Gradbogen* (*Fig.* 94) unterscheidet sich vom Hängebogen dadurch, daſs auf ihm, wie auf einem Transporteur, die 180 Grade bezeichnet sind.

Die mit den Stäben angespannte Schnur wird an gleich hohen Stäben gleich tief, wie hier in *a* und *b*, herabgeschoben, und der Bogen in der Mitte *c* aufgehängt. Man nimmt

an, dafs das herabsinkende Mittelstück der Schnur de der geraden ab parallel bleibe. Wenn nun cv auf de senkrecht ist, also bei v 90° steht, und das Senkel in cw lotkrecht herabhängt, so ist Winkel abf (die bf scheinbar horizontal angenommen) = Winkel vcw. Die Anzahl Grade von v bis w geben also die Gröfse des Winkels abf an. Zieht man die nk der bf gleichlaufend, so ist $mk = af$; aber $af = ab \times Sin.\, abf = ab \times Sin.\, vcw$ also das Gefälle von m bis n oder $mk = ab \times Sin.\, vcw$.

Für ab wird die Länge der Schnur genommen. Dieses Werkzeug giebt mit dem vorigen ungefähr gleiche Genauigkeit, wenn übrigens die Grade mit Genauigkeit bezeichnet sind; aber sein Gebrauch geht schneller von Statten, weil man die Schnur nicht zu verrücken braucht.

§. 228.

IV. *Die Visirmethode* ist unter allen die bequemste und schnellste. Soll z. B. durch Visiren gefunden werden, wie tief die Stelle n (*Fig.* 84) unter der B liege, die mehrere tausend Fufse von der n entfernt seyn könnte; und wäre nt (das hierzu nicht passende Verhältnifs der Zeichnung kann hier der Deutlichkeit des Vortrags nicht im Wege stehen) ein lothrecht stehender Stab, an welchem man von B aus etwa durch ein scheinbar horizontal gerichtetes Fernrohr in der geraden Bd die Stelle d bemerkte, so wäre nichts weiter überig, als die Höhe dn zu messen, und nun hätte man $mn = dn - \frac{dB^2}{39261528}$ in Bezug auf Pariser Fufse. (No.246).

Wäre die Axe des Fernrohres z. B. 4 Fufs über der Erdfläche bei B erhaben, so müfste man von dem gefundenen Gefälle noch 4' abziehen.

§. 229.

Aber in der Anwendung tritt noch ein Umstand ein, der von Wichtigkeit werden kann. Wäre z. B. $n\delta$ (*Fig.* 95) ein Gegenstand, nach dem wir von a aus das Fernrohr in der Linie $a\varepsilon$ richten, so sehen wir, wenn a in etwas bedeutender Entfernung genommen wird, nicht die Stelle ε, sondern eine tiefer liedende φ. Weil nämlich die Luft in der schon merklich höheren Gegend $\varphi\varepsilon$ minder dicht als in der Gegend a ist, so durchlauft ein von φ ausfahrender Strahl, wie die Dioptrik lehrt, eine krumme Linie $\varphi\varkappa a$, so dafs er bei a nach der Richtung der Tangente εa, die in der verlängerten Fernrohraxe liegt, ins Auge fällt, wir also durch das nach $a\varepsilon$ gerichtete Fernrohr die Stelle φ sehen müssen. Diese Erscheinung ist Erfolg von der allgemeinen Eigenschaft der Lichtstrahlen, dafs sie beim Eintritt aus einem dünneren in ein dichteres Mittel gebrochen werden, was was dann hier auf eine stetige Weise erfolgt, so dafs die Bahn eine krumme Linie wird.

Es kommt also darauf an, diese *Abweichung wegen der Refraktion* zu bestimmen. In Bezug auf diese schwierige Untersuchung, die nicht hierher gehört, bemerke ich nur folgendes:

I. ac sey der Halbmesser der Erde $= r$; cb ein anderer Halbmesser derselben, welcher verlängert durch d durchgeht; am die scheinbar horizontal gerichtete Axe des Fernrohres, welche verlängert die cd in e schneidet, so fällt dem Beobachter nicht die Stelle e, sondern eine tiefer liegende f ins Auge, indem ein von f ausgehender Strahl eine krumme Linie durchlauft, an welcher die gerade ae eine Berührungslinie ist.

Lamberts Untersuchungen über diesen Gegenstand belehren uns, daſs af als Stück eines Kreisbogens ag angesehen werden kann, dessen Halbmesser aK, den wir mit R bezeichnen, $=$ 7 bis 8 mal ac sey. Weil nun *Bouguer* in Bezug auf eigene Beobachtungen $R = 9r$ setzt, so nehmen wir hier $R = 8r$ an.

Es ist aber $be = r \,.\, \sqrt{(1 + tang.\; acb^2)} - r$; $fe = R \,.\, \sqrt{(1 + tang.\; ake^2)} - R = 8r \,.\, \sqrt{(1 + tang.\; \frac{1}{8} acb^2)} - 8r$, und weil $tang.\; acb^2$ hier allemal als ein sehr kleiner Bruch angesehen werden kann, so ist sehr genau $\sqrt{(1 + (tg.\; acb)^2)} = 1 + \frac{(tg.\; acb^2)}{2}$; $\sqrt{(1 + (tg.\; \frac{1}{8} acb)^2)} = 1 + \frac{\frac{1}{64} \,.\, (tg.\; acb)^2}{2}$. Also $be = \frac{(tg.\; acb)^2}{2} \,.\, r$; $fe = \frac{\frac{1}{64} \,.\, (tg.\; acb)^2}{2} \,.\, 8r = \frac{\frac{1}{8}\, (tang.\; acb)^2}{2} \,.\, r$. Demnach

$$246.^{*)}\quad \begin{cases} fe = \frac{1}{8}\, be, \text{ und } bf = \frac{7}{8}\, be. \\ \text{wo dann } be = \dfrac{ae^2}{2 \,.\, ac} = \dfrac{ab^2}{39261528} \end{cases}$$

II. Um die Abweichung wegen der Refraktion allgemein zu bestimmen d. h. auch in Fällen, wo die Fernrohraxe nicht scheinbar horizontal gerichtet wird, muſs man den Refraktionswinkel beibehalten.

Es sey jetzt va, $v\beta$ (*Fig.* 95) der Erdhalbmesser; die Fernrohraxe ao sey nach der Stelle ε gerichtet, die in der verlängerten $v\beta$ liegt; $a\alpha\varphi$ sey ein mit $\mu a = R = 8r$ beschriebener Bogen, so ist φ die Stelle, welche durch das Fernrohr gesehen wird. Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Sehne $a\varphi$ mit der geraden $a\varepsilon$ macht, mit α, so ist α der Abweichungswinkel wegen der Refraktion.

$\varphi\lambda$ sey eine Tangente an φ bis an die $a\varepsilon$ gezogen, so ist $\lambda a\varphi = a\mu\lambda = \frac{1}{2} a\mu\varphi = \frac{1}{16} \,.\, av\beta$. Ist der Bogen $a\beta$ in Toisen $= \tau$, so ist $\frac{1}{16}\, av\beta = 0{,}00394 \,.\, \tau$ in Bezug auf Sekunden, oder wenn τ Pariser Fuſse bezeichnet, $\frac{1}{16}\, av\beta = 0{,}000656 \,.\, \tau$ Sekunden. Soviel muſs also vom Erhöhungswinkel eines in der Entfernung τ abvisirten Punktes über dem wahren Horizont oder vom Winkel $\beta a\varepsilon$ abgezogen werden, um den wahren $\beta a\varphi$ zu erhalten.

Ex. Ueber $a\beta = 18000$ Par. Fuſse hat man mittelst des Fernrohrs $a\alpha$, welches nach ε gerichtet ist, den Erhöhungswinkel über dem scheinbaren Horizont $= 10°$ gefunden, wie hoch liegt die durch das Fernrohr wirklich bemerkte Stelle φ über β?

ay sey die scheinbare Horizontallinie, so zeigt das nach y gerichtete Fernrohr nicht y, sondern eine tiefer liegende Stelle z. Es ist aber $y\beta = \frac{a\beta^2}{39261528} = \frac{324000000}{39261528} = 8{,}3$

Par. Fuſse. Also $z\beta = \frac{7}{8} \cdot 8{,}3 = 7{,}26$ Par. Fuſse und $Sin.\ z\alpha\beta = \frac{7{,}26}{18000} = 0{,}0004033$; demnach $z\alpha\beta = 1'\ 23'' = 83''$.

Indem man nun das Fernrohr aus der horizontalen $\alpha\gamma$ so hoch erhebt, daſs man φ erblickt, erhebt man es um den Winkel $\varepsilon\alpha\gamma$, dieser ist nach der Aufgabe $= 10^\circ$; aber $\varepsilon\alpha\varphi = 0{,}000656 \cdot 18000$ sehr nahe $= 12$ Sekunden, folglich $\varphi\alpha\gamma = 10^\circ - 12$ Sekunden $= 9^\circ\ 59'\ 48''$, $\gamma\alpha\beta = \frac{8}{7} \cdot 83'' = 95''$, also $\varphi\alpha\beta = 9^\circ\ 59'\ 48'' + 95'' = 10^\circ\ 1'\ 23''$, und nun $\varphi\beta = 18000 \cdot tang.\ 10^\circ\ 1'\ 23'' = 18000 \cdot 0{,}17672 = 3181$ Par. Fuſse.

§. 230.

Der Gebrauch dieses Werkzeugs erfordert eine *Visirtafel*, wie *Fig.* 96.

Man kann eine solche Tafel 6 ≈ 8 ≈ 10 ≈ 15 ≈ 18 Fuſs hoch machen lassen, wie es die Beschaffenheit der Gegend, in welcher nivellirt werden soll, erfordert. Auf dieser Tafel werden Fuſse und Zolle bemerkt, wie es die Zeichnung angiebt.

Da die Beschaffenheit des Bodens, über welchem man nivellirt, für das Resultat, welches das Gefälle vom ersten bis zum letzten Punkte bestimmt, ganz gleichgiltig ist, so kann man am Ende einer jeden Station einen kleinen Pfahl, wie hier bei *b*, *c*, *d* einschlagen, um auf solchen die Visirtafel aufzustellen, nach der man die Axe des Fernrohrs scheinbar horizontal richtet, z. B. von α nach β. Die Höhe des Stativs von *a* bis α ist allemal, am Anfange der Nivellirlinie das erste Steigen, welches im Nivellementsverzeichnisse eingetragen wird. Die an der Tafel bemerkte Zahlen geben die durch die Visirlinie $\alpha\beta$ abgeschnittene Höhe. Die Differenz $a\alpha - b\beta$ giebt das Steigen für die erste Station von *a* bis *b*.

Dann wird das Stativ in *b* gesetzt und die Höhe des Fernrohres über den Pfahl *b* gemessen z. B. die Höhe $b\gamma$, und man visirt nach $\gamma\delta$; die Differenz $c\delta - b\gamma$ giebt das Fallen von *b* bis *c*; u. s. w.

Diese Arbeit wird sehr erleichtert, wenn man von einer etwa 1½ zölligen Dihle einen dreiekten Boden *abc* (*Fig.* 98) verfertigen läſst, der in der Nähe der Ecken mit 3 Vertiefungen, die mit Blech beschlagen sind, und in der Mitte mit einer Oeffnung versehen ist, durch die der Pfahlkopf am Anfange einer jeden Station, wo der Boden niedergelegt und das Statif aufgestellt werden soll, versehen ist.

Indem nun die Spitzen der 3 Füſse allemal in die 3 Vertiefungen eingesetzt werden, bleibt die Höhe der Fernrohraxe über dem Boden bei allen Stationen immer dieselbe, und man darf nur jedesmal die Höhe des Pfahlkopfs über dem Boden von der Höhe des Fernrohres abziehen, um die Höhe des letzteren über dem Pfahle zu erhalten.

Führt man zwei solche Böden mit sich, so daſs auch die Visirtafel jedesmal auf einem solchen Boden aufgestellt wird, so bedarf man keiner Pfähle, und die Arbeit geht noch schneller von Statten.

Bezeichnen wir die Höhe der Fernrohraxe über dem Boden mit H, die Höhe eines Pfahlkopfs über dem Boden mit h, und die an der Visirtafel bemerkte Höhe der Visirlinie über dem Pfahlkopf mit $\mathfrak{H}$, so ist mit Rücksicht auf die Abweichung wegen der Refraktion auf die Stationslänge λ in Par. Fufsen.

247.) Das Fallen einer Station $= \mathfrak{H} - (H - h) - \frac{7 \,.\, \lambda^2}{8 \,.\, 39261528}$

Man thut wohl, wenn man die einzelnen Stationslängen nicht über 300′ nimmt, wo nicht besondere Umstände eine gröfsere Länge erheischen.

Verneintes Fallen, was der Ausdruck No. 247 gleichfalls giebt, bezeichnet das *Steigen*, und wird als solches notirt.

Es ist nicht nöthig die Korrektion wegen der Refraktion bei jeder Station in Abzug zu bringen. Hätte man z. B. 24 Stationen von der Länge λ, 5 von der Länge λ', 3 von der Länge λ'', und 2 von der Länge λ''', so berechnet man zuerst das ganze Gefälle, ohne Bezug auf die Korrektion nach No. 247, mit Weglassnng des Korrektionsgliedes; dann berechnet man noch den Werth von $\frac{7 \,.\, [24 \,.\, \lambda^2 + 5 (\lambda')^2 + 3 (\lambda'')^2 + 2 (\lambda''')^2]}{8 \,.\, 39261528}$, und zieht solches von dem schon gefundenen Gefälle ab; kommt etwas Verneintes heraus, so hat man die Höhe des Steigens von der ersten bis zur letzten Stelle.

§. 231.

Des Fernrohrs Axe kann durch sehr feine Seidenfäden oder durch Kreuze von Spinnenfäden, oder auch durch eingeätzte Kreuze bestimmt werden. Aber die horizonztale Richtung dieser Axe ist schwieriger als man gewöhnlich glaubt, indem man sich bei dem Empfange des Werkzeugs aus des Künstlers Hand gewöhnlich auf des Künstlers Geschicklichkeit und Pünktlichkeit verläfst.

Man erhält die horizontale Lage durch die genaue Verbindung des Fernrohres mit einer *Libelle* d. h. mit einer Glasröhre (*Fig.* 99), welche mit gefärbtem Weingeist so gefüllt ist, dafs nur eine kleine Luftblase wie *a b* oder *m n* darin zurückbleibt. Die Glasröhre wird ausgeschliffen; genaue cylindrische Form ist nicht nothwendig; ihre Länge *v w* mag 9 bis 12 rheinl. Zolle betragen; ihr Durchmesser ½ Zoll, die Länge der Luftblase 2 bis 4 Zolle. Bei der Zurichtung der Libelle legt man die Röhre so, dafs die Luftblase beiläufig die mittlere Stelle der Röhre einnimmt z. B. die Länge *mn beim Gefrierpunkt*, wo der Weingeist sich in einen engeren Raum zusammenzieht, also die Zurückgebliebene Luft sich in einen gröfseren Raum ausdehnt; und die Länge *ab* bei 40° Réaumur. Man bemerkt die Stellen *m*, *n* und die *a*, *b*, und die Mitte *c*. Beim Gebrauche fällt nun der Anfang der Luftblase allemal zwischen *m* und *a*, und das Ende zwischen *b* und *n*, ihre Mitte in *c*. In dieser Lage liegt sie scheinbar horizontal; wäre dieses nicht, so müfste die Luftblase

auf der höher liegenden Seite aufwärts steigen, sich also entweder nach v oder nach w bewegen.

Die Verbindung des Fernrohrs mit der Libelle muſs nur so getroffen seyn, daſs mit der horizontalen Lage der Libelle auch allemal die Axe des Fernrohres ihre horizontale Lage erhält. Die Libelle muſs sich zugleich mit dem Fernrohr auf dem Stativ ungehindert im Kreise herumdrehen lassen, und das Werkzeug ist nur dann brauchbar, wann bei dieser Umdrehung die Luftblase unverrückt stehen bleibt.

Man wendet sich deſshalb an Künstler, wie in *Stuttgart, Darmstadt, Gotha, Hannover, München, Berlin* u. a. O. Das meinige habe ich von Stuttgart für 15 Louisd'ors erhalten.

Anmerk. In Bezug auf Wasserleitungen wird man bei der Visirmethode keine Station über 1000 Fuſs lang nehmen, da es sehr schnell von Statten geht, wenn auch nur von 300 zu 300 Fuſs visirt wird. Dann kann auch die Korrektion wegen der Refraktion ganz unterbleiben. Kann das Werkzeug samt dem Rohre so herumgedreht werden, daſs die Lage der Fernrohraxe gegen eine Horizontalfläche dadurch nicht verändert d. h. nur von der einen Seite auf die andere gebracht wird, so fällt auch die Korrektion wegen der Kugelgestalt der Erde weg. Ja, wenn auch das Werkzeug in diesem Falle unrichtig seyn, nämlich eine etwas geneigte oder steigende Lage der Fernrohraxe als horizontal angeben sollte, so bleibt das Instrument völlig brauchbar, wenn man es jedesmal in die Mitte zwischen zwei entfernte Visirtafeln stellt, und bei einerlei Stellung des Fernrohres gegen einander über liegende Punkte abvisirt, die dann allemal in einerlei wahren Horizontallinie liegen.

§. 232.

Bei bedeutenden Erhöhungen, wo der eine Punkt schon mehrere hundert oder gar mehrere tausend Fuſse über dem andern erhaben liegt, kann mit Vortheil d. h. mit Gewinn an Zeit und Arbeit die V. *Methode mit dem Barometer* angewendet werden.

Die Barometerhöhe ist die Höhe der höchsten Stelle des Quecksilbers in der Glasröhre über der höchsten Stelle desselben im Gefäſschen am unteren umgebogenen Theile der Röhre, und zwar hier in Pariser linien ausgedrückt. Die Berechnung ist sehr einfach und geschieht mit Anwendung der *gemeinen* d. h. der *briggischen* Logarithmen. Soll z. B. die Höhe des Berges bei B (*Fig.* 100) über dem Thale bei A gefunden werden, so sind zwei Beobachter nöthig, Jeder mit einem guten Barometer. Sie verabreden unter einander Tag und Stunde der Beobachtung z. B. auf den 25. Juli Morgens 7 Uhr. Beide Beobachter müssen also schon vor 7 Uhr an jenem Tage an Ort und Stelle seyn, der Eine in A, der Andere in B. Verschiedenheit der Uhren kann hierbei nicht berücksichtigt werden; sie sollen nur dienen, daſs die Beobachtungen *beiläufig* gleichzeitig werden.

Findet nun zu dieser Stunde der Beobachter in A die Barometerhöhe $= p$ Linien, der in $B = q$ Linien, so ist beinahe

248.) *lothrechte Höhe* $Bb = (log.\, p - log.\, q) \cdot 10000$ Toisen.
Jede Toise zu 6 Pariser Fuſse. (s. §. 238.)

Man kann aber hierbei etwa um $\frac{1}{30}$ der ganzen Höhe fehlen. *De Luc* suchte diese Bestimmung der Wahrheit dadurch näher zu bringen, daſs er zugleich auf die Temperatur an den verschiedenen Stellen Rücksicht nahm. Er setzte in dieser Rücksicht

$$249.) \quad \text{Höhe } Bb = 10000\ (l.p - l.q)\ .\ \left(1 + \frac{32{,}5 - (k + k')}{2\ .\ 215}\right)$$

wo k den Wärmegrad, nach Réaumur, in der unteren Station zur Zeit der Beobachtung bezeichnet.

Trembley, dessen Formel nach *Prony's* Urtheile genauer ist, setzt

$$250.) \quad Bb = 10000\ .\ (l.\ p - l.\ q)\ .\ \left(1 + \frac{23 - (k + k')}{2\ .\ 192}\right).$$

Aber dergleichen auch noch späterhin vorgeschlagene Korrektionen haben doch noch zu keiner sehr scharfen Bestimmung geführt. Die neuesten hierher gehörigen Schriften sind die von *Oltmann*, *v. Lindenau*, *Benzenberg* und *Biot*. Ueber diese 4 Schriften siehe Hallische A. L. Z. 1812 No. 9.

§. 233.

Zur Erleichterung hierher gehöriger Berechnungen dient nachstehende

T A F E L zur Korrektion beim Nivelliren.

Entfernung des abgesehenen Orts in Toisen.	Höhe der scheinbaren Horizontallinie über der wahren in Pariser Fuſsen.		Entfernung des abgesehenen Orts in Toisen.	Höhe der scheinbaren Horizontallinie über der wahren in Pariser Fuſsen.	
	Mit Rücksicht auf die Refraktion.	Ohne Rücksicht auf die Refraktion.		Mit Rücksicht auf die Refraktion.	Ohne Rücksicht auf die Refraktion.
50	0,0020	0,0023	480	0,1810	0,2112
60	0,0030	0,0035	500	0,1964	0,2292
70	0,0040	0,0046	520	0,2128	0,2483
80	0,0050	0,0058	540	0,2306	0,2674
90	0,0064	0,0075	550	0,2376	0,2772
100	0,0081	0,0092	560	0,2465	0,2876
120	0,0114	0,0133	580	0,2644	0,3084
140	0,0154	0,0179	600	0,2827	0,3299
160	0,0205	0,0237	650	0,3318	0,3871
180	0,0253	0,0295	700	0,3849	0,4490
200	0,0317	0,0370	750	0,4420	0,5156
220	0,0382	0,0445	800	0,5030	0,5868
240	0,0451	0,0527	850	0,5675	0,6620
250	0,0496	0,0579	900	0,6364	0,7425
260	0,0536	0,0625	950	0,6726	0,7847
280	0,0620	0,0723	1000	0,7857	0,9167
300	0,0709	0,0827	1500	1,7678	2,0625
320	0,0803	0,0937	2000	3,1431	3,6667
340	0,0908	0,1059	2500	4,9107	5,7292
350	0,0967	0,1128	3000	7,0714	8,2500
360	0,1012	0,1180	4000	12,5714	14,6667
380	0,1136	0,1325	4500	15,9107	18,5625
400	0,1260	0,1470	5000	19,6431	22,9157
420	0,1403	0,1620	6000	28,2857	33,0000
440	0,1523	0,1777			
450	0,1607	0,1875			
460	0,1667	0,1944			

Die Zahlen der dritten Kolonne, welche die nöthige Korrektion wegen der Rundung der Erde angeben, lassen sich leicht auch für zwischenfallende Entfernungen einschalten, weil sie sich wie die Quadrate der Entfernungen verhalten.

Man ersieht aus dieser Tafel, dafs auf einer Visirlinie von 300 Pariser Fufsen (50 Toisen) die Korrektion ganz unterbleiben kann. Erst auf die Länge von 1920 Pariser Fufs (320 Toisen) beträgt der Fehler bei unterlassener Korrektion nur 1 Zoll. In der Ausübung mufs der jedesmalige Zweck eines solchen Nivellements entscheiden, ob ein solcher Fehler ausser Acht gelassen werden kann.

Ist die Schnur beim Nivelliren mit einem Bogen 30′ lang, was dabei viel ist, so findet man, weil 30′ = 5 Toisen ist, und die Abweichung wegen der Rundung der Erde auf 50 Toisen nur 0,0023 beträgt, die Abweichung auf die Schnurlänge $= \frac{5^2}{50^2} \cdot 0{,}0023'$ $= 0{,}000023'$, was auf 1000 solche Stationen erst 0,023′ oder 0,276 Zolle ausmacht. Daher bei Nivellements mit einem Bogen oder auch mit einer Setzwage gar keine Korrektion nöthig ist.

XV. Kapitel.

WIRKUNGEN DES WASSERSTOSSES.

§. 234.

Stofs ist die momentane Wirkung, welche ein Körper *blos als bewegte Materie* auf einen andern in dem Augenblick ausübt, da er mit dem andern in Berührung kommt. Die Richtung der Bewegung ist in Bezug auf die Gröfse der Wirkung dabei ganz gleichgültig. Es kommt blos auf Menge der Theilchen, die gleichzeitig nach einerlei Richtung auf einen Körper wirken, und auf die Geschwindigkeit an, mit der sie sich nach einerlei Richtung bewegen. Auch ist es gleichgültig, auf welche Weise der Körper eine bestimmte Geschwindigkeit für den Augenblick des Stofses erlangt hat, ob durch die Wirkung der Schwere oder wie man sonst will. Die Schwere hat diesemnach nicht den mindesten Einflufs auf die Wirkung des Stofses; sie kann in einzelnen Fällen blos zur Bestimmung der *Geschwindigkeit* in Rechnung kommen.

Sehr viel aber beruht hierbei auf der Art, wie die einzelnen Theile der in Bewegung gesetzten Masse unter einander zusammenhängen.

Besteht die Masse *A* (*Fig.* 101) aus einem einzigen Gufs von Eisen, so wirkt sie in ihrem freien Falle mit voller Kraft d. h. so auf den Pfahl *B*, als ob alle Theilchen gleichzeitig den Pfahl träfen. Hätte der Körper *C* ebensoviel Masse (also dasselbe Gewicht) wie der *A* und fiele von derselben Höhe frei herab auf den Pfahl *D*, wäre aber z. B. durch Zwischenlagen von Schwammstücken, wie bei *m* und *n*, in mehrere Theile abgesondert, so würde er mit bedeutend geringerer Kraft auf den Pfahl *D* wirken. Es würde nämlich bei der ersten Berührung des Pfahls *D* nur der untere Theil *x* mit seiner ganzen Masse wirken; der Theil *u* würde in diesem Augenblick seine Kraft nur verwenden, um die Schwammstücke in *n* dichter zusammen zu pressen oder auch seitwärts zu treiben, und dann erst auf den Pfahl zu wirken anfangen, wann die mit der Zusam-

menpressung zunehmende Federkraft der Schwammstücke dem Widerstande des Pfahls gleich geworden wäre. Noch später wirkt der Theil w, welcher dann erst wieder eine auf den Pfahl sich fortpflanzende Wirkung ausüben kann, wann er die hiezu erforderliche Zusammenpressung der Masse m bewirkt hat. Die Wirkung der ganzen Masse C erfolgt also hier in nach einander folgenden Zeitabschnitten zertheilt, so daſs die einzelnen Stöſse weit geringer ausfallen, und in dieser Vereinzelnung wenig wirken. Aus demselben Grunde würde die Masse A, bei 20 Zentnern Gewicht und 30 Fuſs Fallhöhe nur eine geringe Wirkung auf den Pfahl B ausüben, wenn sie z. B. aus weichem Thon oder aus einem mit Erbsen zum Theile ausgefüllten Sacke bestände.

§. 235.

Dergleichen Umstände müssen nun bei bewegtem Wasser vorzügiich eintreten. Eigentlich geht der Begriff vom Stoſs dabei ganz verloren, denn es treten dabei nur Wirkungen einzelner in unendlich kleinen Zwischenzeiten nach einander folgender Eindrücke ein, die eben darum nicht mehr als *Stoſs* gelten können, sondern als *Druck* betrachtet werden müssen. Dieser Druck, den ich nach dem einmal hergebrachten Sprachgebrauche *Stoſs* nennen will, wird nach den verschiedenen Umständen, auf verschiedene Weise modificirt. Wir unterscheiden hier drei Fälle oder dreierlei Wirkungsarten; das Wasser wirkt nämlich

1.) entweder als ein *isolirter Strahl*, indem er vor Erreichung der entgegengesetzten Stoſsfläche *MN* (*Fig.* 102) ringsum blos von der Luft begrenzt wird.
2.) Oder als *begrenztes* Wasser zwischen Wänden, zwischen welchen die Stoſsfläche so angebracht ist, daſs das Wasser wenig oder nur gezwängt zur Seite ausweichen kann, wie in einem Schuſsgerinne (*Fig.* 103).
3.) Oder als *unbegrenztes* Wasser, wenn es in einem Bette gegen eine Fläche geleitet wird, die vielmal kleiner als der Querschnitt des fortströmenden Wassers ist, wie *Fig.* 104.

Unter *Richtung* des Wassers oder seiner Bewegung werde ich, wo nichts besonders erinnert wird, hier allemal diejenige Richtung verstehen, nach der es sich fortbewegen würde, wenn ihm die Stoſsfläche *NM* nicht im Wege stände. Die Wirkung nach der auf die Stoſsfläche senkrechten Richtung werde ich auch den *Normalstoſs* nennen; die Wirkung auf die Fläche, nach der Richtung des Wassers den *Parallesstoss*; die Wrikung nach einer Richtung, die auf die Richtung des Wasses senkrecht ist, den *Seitenstoſs*. Der Stoſs ist ein *senkrechter* oder ein *schiefer*, nachdem die Richtung des Wassers auf die Stoſsebene senkrecht oder schief ist. Der Stoſs auf eine schon in Bewegung gesetzte Fläche heiſst auch ein *relativer* Stoſs, da dann der Stoſs auf eine in Ruhe befindliche Masse der *absolute* Stoſs genennt werden kann. Liegen beim Stoſse fester Körper die Schwerpunkte beider Körper in der Richtung der Bewegung, so heiſst der Stoſs ein *Zentralstoſs*.

I. Senkrechter Stoss des isolirten Strahls.

§. 236.

Der Querschnitt des aus der Oeffnung α (*Fig.* 102) hervorströmenden Wassers sey $= w$; der Strahl treffe die lothrechte Stofsfläche $\delta\varepsilon$ in mn; die Geschwindigkeit der Wassertheilchen im Querschnitte w sey $= C$; die Stofsfläche bewege sich mit der Geschwindigkeit c nach $\alpha\beta$, und der Wasserquerschnitt bei mn sey $= W$, so ist $C : c = W : w$, indem wir das Sinken der Wassertheilchen wegen der Schwere hier bei Seite setzen.

Der Strahl würde seine Bewegung mit der Geschwindigkeit C nach $\alpha\beta$ fortsetzen, wenn ihm nicht die Stofsfläche mit irgend einer Kraft entgegendrückte, wie solches z. B. bei den Schaufeln eines Wasserrades geschieht.

Die Geschwindigkeit der Wassertheilchen wird von α gegen β hin allmählig vermindert, so dafs bis in mn die Geschwindigkeit C in die c verwandelt wird. Die verlorne Geschwindigkeit ist bis in $mn = C - c$. Dieser verlorne Theil ist auf *Druck* verwendet worden, welcher bei gleichförmiger Bewegung dem Widerstande oder Gegendruck der Stofsfläche gleich seyn mufs.

Die Zeit, in der sich die Wassertheilchen von α bis in mn bewegen, sey $= t$ Sekunden, die Gröfse des Widerstandes, welchen die Stofsfläche entgegensetzt, $= p$; so rührt die Verminderung der Geschwindigkeit von α bis in $\delta\varepsilon$ von dem Gegendruck p her; dieser ist also als eine verzögernde Kraft anzusehen, welche in die Wassertheilchen nach der Richtung $\beta\alpha$ wirkt. Die Masse dieser Wassertheilchen ist, wenn die in einer Sekunde hervorströmende Wassemenge mit M bezeichnet wird, $= t \,.\, M$. Es verhält sich also die Summe von Eindrücken, welche die verzögernde oder die zum Druck angewendete Kraft in sämmtliche Wassertheilchen zwischen α und $\delta\varepsilon$ macht, zur Summe von Eindrücken, welche die Schwere zu gleicher Zeit in dieselben Wassertheilchen macht, wie p zu $t \,.\, M$. Wird nämlich p in Pfunden ausgedruckt, so ist, M gleichfalls in Pfunden ausgedrückt, $t \,.\, M$ das Gewicht jener Wassermasse oder die Summe von Eindrücken der Schwere.

Eine Kraft, unserer Schwere gleich, theilt jedem materiellen Theilchen in der Zeit t eine Geschwindigkeit $= t \,.\, 2g$ mit, die Kraft p aber verwandelt in der Zeit t der Geschwindigkeit C in die c, bewirkt also nach der Richtung $\beta\alpha$ die Geschwindigkeit $C - c$. Da sich nun bei einerlei Masse und einerlei Zeit, die Kräfte wie die von ihnen entstehenden Geschwindigkeiten verhalten, so hat man

$$p : t \,.\, M = (C - c) : t \,.\, 2g$$

und

$$251.)\quad p = \frac{C - c}{2g} \,.\, M$$

Also auch $$252.)\quad c = C - \frac{2pg}{M}$$

Je kleiner c oder die Geschwindigkeit ist, mit der die Stoſsfläche ausweicht, desto gröſser ist der Wasserdruck (Wasserstoſs). Für eine ruhig stehende Fläche, welche auszuweichen verhindert wird, ist $c = o$, also $p = \frac{C}{2g} \cdot M$.

§. 237.

Die theoretische Formel (No. 251) wird durch ihre Deutung höchst wichtig, da ihre etwaige Abweichung von der Wahrheit in der Ausübung bedeutende Irrungen zur Folge haben könnte. Sie verdient daher eine nähere Prüfung.

Sie gründet sich auf die angenommene Richtung der Bewegung nach $\alpha\beta$, so daſs die Richtung aller Wassertheilchen der $\alpha\beta$ parallel sey, und daſs in dieser Richtung die Geschwindigkeit C bis in mn, wo sie nur noch $= c$ sey, abnehme (*Fig.* 102).

Ist nun c nicht viel kleiner als C, so kann diese Voraussetzung immer noch gelten. Es sey α eine kreisförmige Oeffnung und der Durchmesser von $w = 4$ Zoll, $c = 0{,}8 \cdot C$, so ist des Strahls Querschnitt in $\delta\varepsilon = \frac{1}{0{,}8} \cdot w = \frac{0{,}785 \cdot 4^2}{0{,}8}$, und der zugehörige Durchmesser $mn = \left(\sqrt{\frac{4^2}{0{,}8}}\right) = \sqrt{\frac{160}{8}} = 4{,}47''$, daher der Halbmesser, welcher bei $\alpha = 2''$ ist, in $\delta\varepsilon = 2{,}23''$, so daſs der Strahl in mn rings um seine Axe herum nur um $0{,}23''$ vom Parallelismus abweicht, was unbedeutend ist, wenn mn z. B. nur um $6''$ von α entfernt wäre.

Wäre aber MN (*Fig.* 102) eine ruhig stehende Fläche, welche dem Wasser auszuweichen verhindert wird, so treten andere Erscheinungen ein. Die Wassertheilchen werden jetzt sehr bedeutend vom Parallelismus mit $\alpha\beta$ abgelenkt, so daſs sie zu äuſserst ihre Bewegung nach mos, nos fortsetzen und eine sehr konkave Fläche bilden müssen, und hier beinahe der Stoſsfläche parallel abflieſsen. Mit etwas merklicher Krümmung der Bahn ist nun auch Centrifugalkraft verbunden, die nach innen, z. B. nach op wirkt, woraus Pressung gegen die Stoſsfläche entsteht. Begreiflich treten von Augenblick zu Augenblick neue Wassertheilchen an die Stoſsfläche, die, mit irgend einer Geschwindigkeit diese ruhig stehende Fläche erreichend, auf solche mit Stoſs wirken oder diejenige Wirkung hervorbringen, welche sich die Hydrauliker gewöhnlich unter der Wirkung des Wasserstoſses denken.

Aber bei weitem nicht *alle* Wassertheilchen erreichen wircklich die Stoſsfläche. Eine bedeutende Anzahl flieſst in der Nähe von mos, nos ab, ohne die Stoſsfläche zu berühren, drückt aber dennoch vermöge der Centrifugalkraft auf dieselbe.

Nennen wir die mit dem Anstoſsen der Wassertheilchen an die Stoſsfläche verbundene

Wirkung den *hydraulischen* Druck, die ohne Berührung der Stoſsfläche erfolgende Wirkung den *hydrostatischen*, so ist der gesammte Druck aus dem hydrostatischen und hydraulischen zusammengesetzt. Ich legte diesen Satz schon meinem *Lehrbuch der Hydraulik* zum Grunde, und setzte dort (§. 207) hypothetisch

1.) den hydrostatischen Druck $= (H - h) \cdot w$

$$= \left(\frac{C^2}{4g} - \frac{c^2}{4g}\right) \cdot w$$

2.) den hydraulischen Druck $= \frac{(C - c)^2}{4g} \cdot w$

3.) gesammten Druck $= \frac{C^2 - c^2 + C^2 - 2Cc + c^2}{4g} \cdot w = \frac{C \cdot (C - c)}{2g} \cdot w$

Es ist aber $C \cdot w = M$, also auch gesammter Druck $= \frac{C - c}{2g} \cdot M$, wie No. 251, ohne damals an die Deduktion (§. 236) zu denken.

Auch ist er 252.*) $= 2 \cdot (H - \sqrt{Hh})$

§. 238.

Ich stellte damals (schon 1793) 79 Versuche zur Prüfung an, die man in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* S. 191—193 findet. Die Vorrichtung sieht man (*Fig.* 105).

BA war ein 60 Fuſs langes, etwa 4′ breites und 1′ tiefes Gerinne, *Fig.* 105 das mit einem Mühlgraben zusammenhieng und auf festen Böcken oder Jochwänden über eine Vertiefung geleitet war, so daſs ich den Zufluſs ins Gerinne nach Willkühr mindern konnte.

In *C* wurde eine Röhre eingepaſst, deren Durchmesser etwas über 11″ betrug. Seitwärts bei *α* wurde eine 11″ lange und 4½″ weite Röhre von verzinntem Eisenblech angebracht, vor deren äuſsere Mündung *v* ich eine sehr dünne Platte gleichfalls von verzinntem Eisenblech vorschrauben konnte, welche in der Mitte durchlocht war.

An einem Wälzchen *c*, das mittelst zweier dünnen Zäpfchen in Lagern ruhte, waren zwei Hebelarme *cd* und *cs*, an letzterem ein Gewicht *q* und an ersterem eine Wagschale *k* angebracht. Ein dritter lothrechter Arm *cf* wurde durch das Gewicht *q* an den festen Stein *f* angedrückt; dieser dritte Arm bestand aus zwei lothrechten Leistchen, zwischen welchen sich die Stoſsfläche gleichfalls in die lothrechte Lage bringen lieſs. Die Stoſsfläche ergab sich durch ein 8 Zoll breites und 12 Zoll hohes Brettchen.

Gleich anfänglich wurde durch zugelegtes Gewicht bei *k* alles ins Gleichgewicht gebracht, dann alles mit Wasser gefüllt und die Beobachtung begann. Wenn die Wasserhöhe über der Mitte von $v = H$ war, und der Querschnitt des hervorströmenden Wasserstrahls $= w$, so sollte nach der Formel der Druck an der Stoſsfläche $= 2 \cdot Hw$ seyn. Ich berechnete daher das Gewicht einer Wassersäule vom kubischen Inhalt $2 \cdot Hw$, wo

ich H beiläufig annahm, legte soviel Gewichtchen auf die Wagschaale; hemmte dann den Zufluſs bei B, und (weil ich H nicht bis zum Wasserspiegel gerechnet hatte) lieſs den Wasserspiegel während dem Ausströmen des Wassers bei v allmählig tiefer sinken, bis endlich die Stoſsfläche oder der Arm cm den Stein bei f zu verlassen begann. In diesem Augenblick wurde H genau gemessen. Ich lernte dabei gleich beim ersten Versuche das Gewicht genauer kennen, welches in die Wagschaale gelegt werden müſste, damit bis zu jenem Erfolge der Wasserspiegel nur einige Zolle tief sinken durfte. Der Pariser Kubikfuſs Wasser war von mir = 67,3 Nürnberger ℔ gefunden und hiernach mit gehöriger Rücksicht auf die Ungleichheit der Hebellängen die Berechnung vorgenommen worden.

Ich theile aus dortiger Tafel nur nachstehende Resultate mit:

Nummer der Versuche.	Wasserhöhen in Pariser Zollen H.	Durchmesser der Oeffnung in Par. Zollen.	Querschnitt des zusammengezogenen Strahls w in Quad. Zollen	Gewicht der einf. Wassersäule $H.w$ Nach der mittlern Höhe in Nürnberger ℔.	Beobachtete Gröſse des Drucks gegen die Stoſsfläche in Nürnb. ℔.	Verhältniſs des Gewichts der einfachen Wassersäule zum Beobachteten Druck, im Mittel genommen.
1 bis 7	25″ 3‴ bis 26″ 1,5‴	0,2583	0,0524	0,0324	0,0673	1 : 2,077
8 — 45	37″ 6‴ bis 43″ 10‴	2	1,9468	3,0628	6,2830	1 : 2,051
46 — 79	34″ 10‴ bis 43″ 10‴	2	1,9468	2,9788	6,3503	1 : 2,131

Der Abstand der Stoſsfläche von der Oeffnung war

bei den Versuchen No. 1 bis 7........ = 1,5 Zoll.

No. 8 — 45........ = 3 —

No. 46 — 79........ = 8 —

Man sieht, daſs die so nahe stehenden Stoſsflächen das Abflieſsen des Wassers nicht merklich verhindert oder die Ausfluſsmenge nicht merklich vermindert haben, was aber bei fernerer Annäherung sich anders verhält.

Bei der Berechnung jener Tafel wurde aber die Zuzammenziehung zu groſs angenommen, so daſs $w = 0,62 \cdot \alpha$ gesetzt wurde, weil ich keine Rücksicht auf die Verhältniſszahl $\frac{\alpha}{W}$ (§. 131) genommen hatte. Es ist daher noch eine Korrektion nöthig.

Bei den Versuchen No. 1 — 7 war, weil die vorgeschrobene dünne Platte 4,5 Zolle zum Durchmesser hatte, $\frac{\alpha}{W} = 0,0033$; nehmen wir nun (§. 131) $k = 0,378$, so wird $1 - k = 0,622$ und $w = 0,622 \cdot \alpha$. Diese Korrektion wäre zu unbedeutend. Ueberhaupt waren aber diese Versuche unter einander selbst nicht so übereinstimmend als die übrigen; sie waren auch zu kleinlich; auch sehr kleine Fehler, die dabei begangen werden konnten, wohin auch die Anrechnung wegen der Reibung gehört, konnten für den geringen Druck schon merklich werden, und ich hielt sie darum nicht für entscheidend, und schritt deſshalb zu den

Versuchen mit einer zweizölligen Ausflufsöffnung, die dann gleichfalls den Druck gröfser als das doppelte Gewicht der einfachen Wassersäule $H \,.\, w$ gaben. Bei diesen war aber $\frac{\alpha}{W} = 0{,}197$; wir können daher (§. 131) $k = 0{,}33$ und nun $w = (1 - 0{,}33) \,.\, \alpha = 0{,}67 \,.\, \alpha$ statt $0{,}62 \,.\, \alpha$ setzen. Multipliciren wir die beiden Verhältnifszahlen 2,051 und 2,131 mit $\frac{62}{67}$, so erhalten wir

statt 1 : 2,051 und 1 : 2,131 jetzt 1 : 1,883 und 1 : 1,972.

So kleine Abweichungen von der Theorie sind immer zu erwarten, da mancherlei Reduktionen nicht scharf genug sind, die Wassertheilchen unter sich einige Störung verursachen, und der Werth von k nicht genau angegeben werden kann.

In dieser Hinsicht kann man die Theorie für $c = o$ als völlig bestätigt ansehen. Um so mehr aber mufs die Formel No. 251 ihre Richtigkeit behalten, wenn c nicht $= o$ ist, weil dann die Wassertheilchen immer weniger von ihrer ersten Richtung abgelenkt werden.

§. 239.

Auf die mittleren von der Richtung der Axe $\alpha\beta$ (*Fig.* 102) wenig abweichenden Strahlfäden hat der *hydrostatische* Druck wenig Einflufs. *Dubuat* stellte hierüber unter Vorrichtungen, wie *Fig.* 106 und 107, Versuche an.

Die Platte mn (*Fig.* 106) hatte 16 Linien im Durchmesser, das Röhrchen da 4 Linien; hiermit war eine Glasröhre abc zu $1\frac{1}{2}$ Linie im Durchmesser verbunden. Bei p war eine kurze Röhre mit einer durchlochten Platte angebracht; der Durchmesser dieser Ausflufsöffnung betrug 2 Zoll oder 24 Linien. Die Oeffnung der Platte mn hatte einige Linien im Durchmesser. Die Kufe A, welche $2\frac{1}{2}$ Fufs im Durchmesser hatte, wurde 1′ 10″ 9‴ hoch über p mit Wasser angefüllt erhalten, und nun fand *Dubuat* die Höhe, zu der sich das Wasser in der Glasröhre über den Mittelpunkt der Einflufsmündung oder über eine durch p gezogene Horizontallinie erhob, = 1′ 10″ 11‴, also nur um 2‴ höher als in der Kufe, was nur $\frac{1}{131} \,.\, H$ ausmacht, wo also der hydrostatische Druck nur noch einen kaum merkbaren Einflufs auf die mittlern Wasserfäden hatte. Hierauf gründet sich der Gebrauch der Pitotschen Röhre (§. 184).

Der Versuch bei der Vorrichtung (*Fig.* 107) ist noch merkwürdiger, weil er uns zugleich über das Ausfliefsen des Wassers durch kurze Ansatzröhren nähere Belehrung giebt.

Der Durchmesser eines cylindrischen Gefäfses A betrug 3 Zoll, es war 8″ hoch mit Wasser angefüllt; am Boden war ein Ansatzröhrchen zu $\frac{1}{3}$″ oder 4‴ weit angebracht; unter dem Ansatzröhrchen, in einem Abstande von 3‴, lag die Einflufsmündung einer Glasröhre mno. Die Höhe o, zu der das Wasser in dieser Röhre hinaufstieg, war vom Niveau des Wasserspiegels im Gefäfse A nicht merkbar verschieden.

Hier war der hydrostatische Druck, weil man um die Mündung m keine Platte zum Auffangen des Strahls angebracht hatte, an sich schon sehr unbedeutend, und sein Einfluſs auf den Druck gegen die Mündung m um so mehr unmerkbar.

Aber die Geschwindigkeitshöhe des bei m ankommenden Wassers konnte doch nur wenige Linien über $\frac{2}{3}$ von 8″ oder über $5\frac{1}{3}$″ betragen, und hiernach hätte das Wasser, wenn auch eine Platte rings um m herum angebracht gewesen wäre, doch im Ganzen nur einen Druck $= \frac{2}{3} \cdot 2\,H \cdot w$ bewirken können; wenn nun die Hälfte der ganzen Wirkung dem hydrostatischen Druck, der hier als an sich schon beinahe ganz beseitigt in Bezug auf die mittleren Strahlfäden ganz ausser Acht gelassen werden kann, zukommt, so bleibt für den Druck auf m nur noch die Höhe $\frac{2}{3}$ H übrig. Und doch erreichte das Wasser die Höhe o im Niveau von O. Dieser Erfolg läſst sich sehr natürlich daraus erklären, daſs der beim Einflieſsen des Wassers in das Ansatzröhrchen bei a zusammengezogene Strahl in demselben wieder um die Hälfte seines Querschnitts vergröſsert wird, womit dann Geschwindigkeitsverminderung verbunden ist. Aber die hierbei eintretende Ablenkung der Wassertheilchen betrifft diejenigen Theilchen, welche dem Umfange des Ansatzröhrchens näher als der Röhrenaxe liegen, bei weitem am meisten, und hat wenig Einfluſs auf die in der Nähe der Axe; da nun der Durchmesser bei a 4 Linien und die Oeffnung m nur $1\frac{1}{2}$ Linien betrug, so konnten nur solche Theilchen bei m eintreten, von welchen selbst die äuſsersten der Axe des Ansatzröhrchens näher lagen als seinem Umfange, daher dann die Geschwindigkeit, mit der sie in m ankamen, ohne merkliche Abweichung der ganzen Wasserhöhe zugehören muſste, weil der ganze Weg von a bis m nur beiläufig $\frac{1}{2}$ Zoll betrug.

Bei einer gröſseren Länge dieses Wegs, der schon einige Fuſse betrüge, wie bei Röhrenbrunnen, leidet diese Erscheinung eine bedeutende Aenderung. Dann die mittleren schneller bewegten Theilchen werden durch die anhängenden langsammeren allmählig verzögert, so wie die äuſseren langsameren durch die mittleren schnelleren allmählig beschleunigt werden, so daſs sie bald alle gleiche Geschwindigkeit annehmen, wenn der Weg nicht zu kurz ist.

Darum fand dann auch *Dubuat* ganz dasselbe bei einem Versuche, bei welchem die Axe des kurzen Ansatzröhrchens eine *horizontale* Lage hatte.

§. 240.

Aus den Dubuatschen Versuchen ersieht man,

daſs bei der Wasserhöhe H und dem Querschnitte W eines hervorströmenden Strahls durch eine dünne Platte oder durch eine kurze Ansatzröhre der mittlere Theil dieses Strahls, dessen Axe nämlich die Axe des ganzen Strahls und dessen Querschnitt $= w$ ist, in senkrechter Richtung gegen eine Stoſsfläche geleitet, auf diese, wenn sie ruhig bleibt, einen Druck $= H \cdot w$ ausübt, d. i. der

so grofs ist als das Gewicht einer Wassersäule $H . w$, wofern w nicht gröfser als $\frac{(1,5)^2}{4^2} . W$ oder nicht gröfser als $\frac{1}{7} W$ ist.

Wie weit dieser Satz seine Richtigkeit behält, ob auch noch für $w = \frac{1}{6} W$ oder $= \frac{1}{5} W$ u. s. f. hat zwar Dubuat nicht besonders untersucht, doch ist nicht zu zweifeln, dafs der Druck bis zu $w = W$ immer $= H . w$ bleiben werde, so lang die Wasserhöhe H zugleich die Geschwindigkeitshöhe bleibt, wie bei Strahlen aus Oeffnungen in dünnen Platten. Dagegen wird der Druck $= H . w$ immer sehr beschränkt bleiben und vielleicht nicht über $w = \frac{1}{7} W$ beibehalten werden können, wenn, wie beim Ausflusse durch kurze Ansatzröhren, die Geschwindigkeitshöhen von der Axe des Strahls gegen den Umfang allmählig abnehmen.

Der übrige über die Stofsfläche verbreitete Theil des Strahls bildet eine mit der Stofsebene konvergirende Fläche und wirkt bei diesem Konvergiren gleichfalls noch drückend auf die Ebene.

Bei meinen Versuchen war zwar bei der zweizölligen Oeffnung (§. 238), wozu ein Strahl von $(\sqrt{0,62}) . 2$ oder von sehr nahe 1,6″ im Durchmesser gehört, die Stofsfläche 8″ breit, also die Breite 5 mal so grofs als der natürliche Durchmesser des Strahls, dafs also das Wasser in seiner Verbreitung auf dieser Fläche einen Kreis bilden konnte, der 25 mal so grofs als der natürliche Querschnitt des Strahls war. Aber jene Konvergenz (nach *o s Fig.* 102) nähert sich dem Parallelismus mit der Stofsfläche, dafs sie mit keinem merklichen Druck mehr verbunden seyn kann, wenn der Durchmesser *s s*, 3 mal so grofs als der Durchmesser bei α oder der Querschnitt bei *s s* 9 mal so grofs als der natürliche Querschnitt bei α geworden ist.

Man wird also immer ohne merkbaren Verlust die vollständige Wirkung auf die ruhig stehende Fläche erhalten, wenn man solche 9 mal so grofs als den natürlichen Querschnitt des Strahls macht.

Für Stofsflächen, die nach der Richtung des Strahls mit der Geschwindigkeit c ausweichen und dann einen Druck $= \frac{C - c}{2g} . M$ (§. 236) oder auch $= \frac{C . (C - c)}{2g} . w$ leiden (§. 237), verhält er sich, was die erforderliche Gröfse der Stofsfläche betrifft, anders. Wenn nämlich w der natürliche Querschnitt des Strahls ist, und w' die Gröfse seines Querschnitts an der Stofsfläche, die mit der Geschwindigkeit c ausweicht, so hat man

$$1.)\ M = C . w;\quad 2.)\ M = c . w';\quad \text{also } 3.)\ C . w = c . w' \text{ und } 4.)\ w' = \frac{C}{c} . w.$$

Wäre nun z. B. C doppelt so grofs als c, so hätte man an der Stofsfläche nur $w' = 2w$, und eine Stofsfläche, deren Durchmesser um die Hälfte gröfser wäre als der Durchmesser vom natürlichen Querschnitt des Strahls, würde noch nicht einmal vollständig vom anstossenden Querschnitte bedeckt. S. §. 247^b.

II. Schiefer Stoss des isolirten Strahls.

§. 241.

Die Axe des isolirten Strahls $\alpha\beta$ (*Fig.* 108) gehe verlängert nach $\alpha\zeta$ senkrecht durch ac; denkt man sich ac als lothrechte Linie in einer Stofsfläche, welche vom horizontalen Strahl getroffen würde, und bezeichnet die Gröfse des Stofses auf dieser Fläche mit p, so ist p aus dem Vorhergehenden bekannt. Ist nun ab gleichfalls horizontal, und zieht man die bc, so kann man, indem die bc und $\alpha\beta$ in einer einzigen lothrechten Ebene angenommen werden, bc als Linie in einer Ebene ansehen, gegen die der Strahl unter dem schiefen Winkel $b\beta\alpha$ anstöfst, womit man also einen schiefen Stofs erhält, von dessen Gröfse jetzt die Rede ist. Wir unterscheiden dabei den *Normalstofs*, den *Seitenstofs* und den *Parallelstofs* (§. 235).

Man verlängere die $\alpha\beta$ willkührlich bis in δ, ziehe die $\delta\eta$ senkrecht auf $\beta\delta$, die $\delta\gamma$ senkrecht auf bc, und die $\gamma\varepsilon$ senkrecht auf die $\delta\eta$.

Wird nun die $\beta\delta$ für p genommen, so ist $\gamma\delta$ die Gröfse des Normalstofses, den wir mit N bezeichnen. Man hat also $p : N = \beta\delta : \delta\gamma$, und, indem wir den schiefen Winkel $\alpha\beta b = \mu$ setzen.

$$253.)\quad N = \frac{\delta\gamma}{\beta\delta} \cdot p = p \; Sin.\; \mu$$

Verzeichnet man das Rektangel $\gamma\delta\theta\beta$, so ist $\beta\theta$ mit $\gamma\delta$ einerlei, so dafs auch $\beta\theta$ den Normalstofs ausdrückt; beide Wirkungen $\beta\theta$ ung $\beta\gamma$ erzeugen die $\beta\delta = p$; aber die $\beta\gamma$ wirkt nicht mehr auf die schiefe Ebene bc; blofs die Wirkung $\gamma\delta$ bleibt in Bezug auf Stofs übrig.

Man verzeichne nun das Rektangel $\delta\varepsilon\gamma\nu$, so zerfällt die Kraft $\gamma\delta$ in die Seitenkräfte $\gamma\varepsilon$ und $\gamma\nu$, wo die $\gamma\varepsilon$ den Parallelstofs ausdrückt; bezeichnen wir also diesen mit P, so wird

$$254.)\quad P = \delta\gamma \;.\; Cos\; \delta\gamma\varepsilon = \delta\gamma \;.\; Sin\; \alpha\beta b = N \;.\; Sin\; \mu = p \;.\; Sin\; \mu^2$$

Die $\gamma\nu$ ist die Gröfse des Seitenstofses; bezeichnen wir also diesen mit S, so hat man

$$255.)\quad S = \delta\gamma \;.\; Sin\; \delta\gamma\varepsilon = N \;.\; Cos\; \mu = p \;.\; Sin\; \mu \;.\; Cos\; \mu$$

Auch in Bezug auf den schiefen Stofs habe ich mit der oben (§. 238) beschriebenen Vorrichtung 66 Versuche angestellt, die ich in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* S. 206 — 208 mitgetheilt habe.

Der Weg von der Mitte der zweizölligen Oeffnung bis zur Mitte der Stofsfläche (die Länge $\alpha\beta$ *Fig.* 108) war durchaus = 8 Pariser Zoll. Die Wasserhöhen waren verschieden, die kleinste = 33″, die gröfste 45″ 10‴. Die Versuche wurden unter 6 verschiedenen Neigungswinkeln (μ) angestellt. Das Gewicht der einfachen Wassersäule wurde nach

der Wasserhöhe über dem Mittelpunkte der Oeffnung unter der Voraussetzung berechnet, daſs der Querschnitt des hervorspringenden Wasserstrahls 0,62 von der Oeffnungsfläche betrage. Hiernach ergaben sich die nachstehenden Resultate:

Nummer der Versuche.	Gröſse des Anstoſswinkels.	Mittleres Produkt aus dem Quadrat vom Sinus des Anstoſswinkels in das Gewicht der einfachen Wassersäule.	Beobachteter Wasserstoſs, in Nürnb. Pfunden. Im Mittel genommen.	Verhältniſs des Gewichts der einfachen Wassersäule zur Gröſse des Wasserstoſses; im Mittel.
1 bis 8	70° 16′	2,747	5,729	1 : 2,085
9 — 19	60° 16′	2,226	4,658	1 : 2,097
20 — 25	50° 46′	1,780	3,517	1 : 1,976
26 — 31	39° 46′	1,245	2,623	1 : 2,120
32 — 53	33° 16′	0,923	1,949	1 : 2,111
54 — 66	26° 16′	0,593	1,222	1 : 2,058

Aber wegen (§. 131) müssen, wie beim senkrechten Stoſse, die letzten Verhältniſszahlen noch mit $\frac{0,62}{0,67}$ multiplicirt werden, wodurch dann die letzte Kolonne so abgeändert wird:

Für 70° 16′.......1 : 1,930
» 60° 16′.......1 : 1,940
» 50° 46′.. 1 : 1,829
» 39° 46′.......1 : 1,962
» 33° 16′.......1 : 1,954
» 26° 16′.......1 : 1,904

Im *Lehrbuch der Hydraulik* S. 208 muſs 33° 16′ statt 30° 16′ stehen.

Man ersieht hieraus, daſs die Formel No. 254 wenigstens für Winkel von 26° bis zu 90° ganz so passend ist d. h. der Erfahrung so genau entspricht, als die blos auf den *senkrechten* Stoſs beschränkte (No. 251). Die einzelnen hier angegebenen Verhältniſszahlen konnten schon darum nicht ganz genau zusammenstimmen, weil ich die (durch Reduktionen noch in Minuten angegebenen) Winkel nicht scharf bestimmen konnte, so daſs die Angaben von der wirklichen Gröſse etwa $\frac{1}{4}$° verschieden seyn können. Allemal kann daher ohne groſsen Fehler

$$256.)\quad p = \frac{C - c}{2g} \,.\, M \,.\, Sin.\ \mu^2$$

angenommen und die Abweichungen theils kleinen Fehlern bei der Beobachtung selbst, theils bei den dabei noch vorzunehmenden Reduktionen zugeschrieben werden. Weil aber aus gleichem Grunde auch in der Ausübung Abweichungen unvermeidlich bleiben, so wird man zur Sicherheit bei praktischen Berechnungen immer

$$257.)\quad p = 0,9 \,.\, \frac{C - c}{2g} \,.\, M \,.\, Sin.\ \mu^2$$

setzen dürfen, wobei dann noch vorausgesetzt wird, daſs die Stoſsfläche groſs genug sey,

um den ausgebreiteten Theil des isolirten Strahls wenigstens in so weit aufnehmen zu können, als er noch Bezug auf merkbaren Druck hat, worüber man die obige nähere Bestimmung nachsehen kann.

III. Stoss des begrenzten Wassers.

(oben §. 235 no. 2, *Fig.* 103.)

§. 242.

Ist dem im Gerinne (*Fig.* 103) von α herabstürzenden Wasser bei M eine Stofsfläche entgegengesetzt, so dafs das Wasser theils unter der Fläche, theils zu beiden Seiten durch gelassene Oeffnungen sich durchzwängen mufs, indem die Geschwindigkeit der Fläche kleiner als die des Wassers ist, so haben wir den Fall, von welchem hier die Rede ist.

Die Stofsfläche wird hier unten, und zu beiden Seiten von Spielräumen begrenzt, durch welche ein Theil des herabstürzenden Wassers unbenutzt abfliefst, den wir mit m bezeichnen wollen; die übrige in jeder Sekunde abfliefsende Wassermenge, welche $= M - m$ ist, folgt der mit der Geschwindigkeit c ausweichenden Stofsfläche. Die Höhe MN, zu der das Wasser an der Stofsfläche hinaufsteigt, sey $= \beta$, ihre Länge zwischen den beiden Seitenwänden des Kanals $= \lambda$, so ist der Wasserquerschnitt an der Schaufelfläche $= \beta\lambda$, also

$$M - m = c \,.\, \beta\lambda;\ \beta\lambda = \frac{M - m}{c};$$

Bei hinlänglich grofser Stofsfläche ist der theorethische Werth des Stofses $p = \frac{C - c}{2g} \,.\, (M - m)\ Sin.\ \mu^2$, wobei aber der Strahl durch die Freiheit, sich nach allen Seiten frei verbreiten zu können, wie um einen Kreis herum, die Hälfte der ganzen Wirkung gewinnt, so dafs ohne solche Verbreitung der Stofs nur $= \frac{C - c}{4g} \,.\, (M - m) \,.\, Sin.\ \mu^2$ wäre. Inzwischen ist leicht einzusehen, dafs auch hier die Wirkungen des isolirten Strahls eintreten müssen. Hat das Wasser z. B. in mn seine gröfste Geschwindigkeit, also seinen kleinsten Querschnitt, so dafs es von mn aus verzögert und durch die Stofsfläche nach moN in immer gröfseren Querschnitten und mit abnehmender Geschwindigkeit seine Bewegung gegen die Stofsfläche, wo sein Querschnitt die Höhe MN erreicht, fortzusetzen genöthigt wird, so dafs aus der in mn Statt habenden Geschwindigkeit C am Ende bei MN die c wird, so gehört zu dieser Geschwindigkeitsänderung (nach §. 236) allemal eine Kraftanwendung $p = \frac{C - c}{2g} \,.\, (M - m)$, wenn der Strahl eine senkrechte Richtung hat, oder allgemein eine Kraftanwendung $p = \frac{C - c}{2g} \,.\, (M - m) \,.\, Sin.\ \mu^2$ nach No. 256, wonach die Gestalt der Anschwellung

$m o N$ bestimmt wird. Dabei ist dann allemal $MN = \frac{C}{c} \cdot mn$; ist z. B. $c = \frac{1}{2} C$, so wird $MN = \frac{2c}{c} \cdot mn = 2 \cdot mn$.

§. 243.

Aber in der Ausübung zeigen sich hier einige Schwierigkeiten, nämlich

1.) können wir weder die Stelle von mn, noch die Geschwindigkeit in mn oder den Werth von C bestimmt angeben.

2.) Wird ein Theil der Kraft verwendet, den Widerstand zu überwinden, welchen Wasser überhaupt bei seiner Bewegung in Kanälen leidet.

3.) Läſst man die Stoſsfläche nach und nach, durch Vergröſserung des Widerstandes, langsamer ausweichen, so fängt endlich das Wasser an, vor MN zurückzustürzen; es entstehen unordentliche Strömungen und der Stoſs wird hiermit sehr geschwächt. Der Ausdruck $p = \frac{C - c}{2g} \cdot (M - m) \cdot Sin. \mu^2$ wird daher desto unrichtiger, je kleiner c wird; diesen Erfolg hat man schon zu erwarten, sobald $\frac{C}{c} > \frac{5}{2}$ wird.

4.) Auch ist für den Werth von m nur eine *beiläufige* Bestimmung möglich.

Diese Umstände erschweren die hierher gehörigen Bestimmungen ungemein. Der wichtigste Gebrauch, den man vom Wasserstoſse in engen Kanälen macht, ist der bei *unterschlächtigen Wasserrädern*, wo ich auf diesen Gegenstand zurückkommen werde.

IV. Senkrechter Stoss des unbegrenzten Wassers.

(§. 235 no. 3, *Fig.* 104.)

§. 244.

Wenn einem Strahle, dessen natürlicher Querschnitt w ist, eine Stoſsfläche gleichfalls $= w$, senkrecht entgegen gesetzt wird, so daſs die Axe des Strahls durch den Mittelpunkt der Stoſsfläche durchgeht, so ist, bei ruhigem Stande der letzteren die Gröſse des Stoſses

$$p = \frac{C}{4g} \cdot M = \frac{C}{4g} \cdot C \cdot w = \frac{C^2}{4g} \cdot w = H \cdot w$$

wenn H die zu C gehörige Fallhöhe bezeichnet.

Hiervon wurde nun eine sehr unrichtige Anwendung gemacht. Man nahm auf das Verhältniſs zwischen dem Querschnitte des zum Stoſse verwendeten Wassers und der Gröſse der Stoſsfläche gar keine Rücksicht, und setzte daher den mit Vergröſserung dieser Fläche entstehenden hydrostatischen Druck, der mit der Krümmung des Strahls verbunden ist, ganz bei Seite.

Weicht die Stofsfläche mit der Geschwindigkeit c nach der Richtung des Stofses aus, sagte man, so wirkt das Wasser nur noch mit der relativen Geschwindigkeit $C - c$; es ist so gut, als strömte das Wasser gegen eine ruhig stehende Fläche mit der Geschwindigkeit $C - c$; der Stofs ist also jetzt $p = \frac{(C - c)^2}{4g} \cdot w$.

So sollte sich dann auch die Sache im unbegrenzten Wasser (*Fig.* 104) verhalten, wo man dann $w = W$ setzte, also bei ruhigstehender Fläche $p = \frac{C^2}{4g} \cdot W$, und bei einer ausweichenden Fläche $p = \frac{(C - c)^2}{4g} \cdot W$ nahm, was aber beides unrichtig ist.

Man sieht (*Fig.* 109) zwei Stofsflächen W no. I. und W no. II. Es fällt gleich ins Auge, dafs hier niemals $w = W$ oder $\frac{w}{W} = 1$ gesetzt werden kann; ob wir aber $\frac{w}{W}$ wie no. I., oder wie no. II. oder nach welch anderen Verhältnissen zu nehmen haben, ist uns unbekannt. Je gröfser C ist, desto kleiner wird bei einerlei W der Querschnitt w, und der Stofs kann sich dann der einfachen Wassersäule $\frac{C^2}{4g} \cdot W$ sehr nähern; da hingegen bei einer geringen Geschwindigkeit der Stofs der doppelten Wassersäule $\frac{C^2}{2g} \cdot W$ nahe kommen kann, indem dann auch $\frac{w}{W}$ der Einheit viel näher kommmt. Hier mufs uns die Erfahrung zu Hülfe kommen, und ich habe mit Zuziehung der uns von *Woltmann* mitgetheilten Beobachtungen gefunden, dafs wir mit hinlänglicher Genauigkeit

$$258.)\quad p = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2 + 5}\right) \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot W,$$

setzen können, wo C sich allemal auf Fufse bezieht und W die untergetauchte Fläche bezeichnet.

Woltmann mafs die Geschwindigkeit des Wassers in der Elbe mit seinem Strommesser; diese ändert sich alle sechs Stunden von 1 bis 7 Fufs. Der Hamburger Fufs, den er gebrauchte, verhält sich zum Pariser wie 127 zu 144; der Hamburger Kubikfufs zum Pariser Kubikfufs wie 2048 zu 2986. Seine Beobachtungen und meine Berechnungen geben nachstehendes Täfelchen:

Geschwindigkeit in einer Sekunde in Fufsen oder Werthe von C in Fufsen (Hamb.)	Druck auf 1 Quadratfufs nach der gewöhnlichen Rechnung oder Werthe von $\frac{C^2}{4g} \cdot W$ in Pfunden, für $W = 1$ Q. F.	Druck auf 1 Quadratfufs nach der vorstehenden Formel, oder Werthe von $\left(1+\frac{3{,}8}{(C-1)^2+5}\right) \cdot \frac{C^2}{4g}$	Druck auf 1 Quadratfufs nach der Beobachtung, in Pfunden.
1,75	2,19	3,68	3,8
2,25	3,62	5,66	5,1
3,25	7,56	10,35	10,2
3,75	10,06	13,07	12,3
5,25	19,73	22,88	23,1
6,25	27,96	31,03	31,4
6,50	30,25	32,67	33,5
7,00	35,07	38,23	38,2

Hierbei habe ich nur die regulärsten Beobachtungen von *Woltmann* beibehalten. Eine hierher gehörige Tafel findet man oben §. 186.

Dubuat bewegte eine Tafel in Wasser, das für sich ruhig stand mit einer Geschwindigkeit $C = 3'$, und fand den *Widerstand*, der bei einer dünnen Tafel vom *Stoſs* nicht viel verschieden seyn wird, $= 1{,}433 \,.\, \frac{C^2}{4g} \,.\, W$; meine Formel giebt

$$\left(1 + \frac{3{,}8}{(3-1)^2+5}\right) . \frac{C^2}{4g} \,.\, W = 1{,}422 \,.\, \frac{C^2}{4g} \,.\, W.$$

§. 245.

Im vorigen Paragraph war $c = o$, man kann also nicht daraus abnehmen, wie die Formel aussehen müsse, wenn die Stoſsfläche mit der Geschwindigkeit c ausweicht. Es mag nämlich 1.) $(C-c)^2$, oder 2.) $C^2 - c^2$ oder 3.) $C \,.\, (C - c)$ statt C^2 gesetzt werden, so erhält, für $c = o$, die Gleichung für p allemal die Form No. 258. Da aber auch im jetzigen Falle solche Wirkungen eintreten müssen, wie §. 237, so sind wir wohl berechtigt, hier

$$259.) \quad p = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2+5}\right) . \frac{C \,.\, (C-c)}{4g} \,.\, W \text{ anzunehmen.}$$

V. Schiefer Stoss und Widerstand des unbegrenzten Wassers.

§. 246.

Der Druck oder Stoſs, welchen das nach den parallelen ab, cd (*Fig.* 110[a]) strömende Wasser senkrecht auf die Wasserfläche bd ausüben würde, wenn es bei a, c die Geschwindigkeit C hätte, ist (nach No. 268) bei ruhigem Stande der Fläche

$$p = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2+5}\right) . \frac{C^2}{4g} \,.\, W$$

Nun denke man sich ein prismatisches Vordertheil bed, so daſs $be = de$ wäre, also be und de gleiche Flächen bedeuten (eigentlich horizontale Linien in diesen Flächen), so wirkt das Wasser auf solche mit *schiefem* Stoſse, von dessen Wirkung nach ab und cd hier die Rede ist. Den Winkel $abe = cde$ bezeichnen wir mit μ. Das Wasser zwischen ab und ne kann jetzt nicht mehr senkrecht auf bm wirken, weil es von der schiefen be aufgefangen wird. Bezeichnen wir die Gröſse dieses schiefen Stoſses mit $\mathfrak{p}$, so ist nothwendig $\mathfrak{p} < p$. Auf eine in der That unbegreifliche Weise hielten sich nun die gröſsten Mathematikverständigen berechtigt

$$\mathfrak{p} = p \,.\, Sin.\mu^2$$

zu setzen, im Wahne, analogisch zu verfahren.

Man denke sich nach ab und cd zwei parallele feste Wände, zwischen welchen das

Wasser gegen die $b\,d$ (mit Weglassung des Vordertheils $b\,c\,d$) unmittelbar hinströmt, so daſs es unterhalb der Stoſsfläche $b\,d$ Abfluſs behält, so übt es gegen die Fläche einen gewissen senkrechten Druck p aus, und ganz denselben Druck muſs es nun auch zwischen den parallelen festen Wänden ausüben, wenn das Vordertheil $b\,c\,d$ vorgesetzt wird; er wird wie vorher $= p$.

Nun hat man zwar in $a\,b$ und $c\,d$ keine feste Wände, doch aber stehende Wassersäulen, welche durch ihren Gegendruck die festen Wände zum Theil ersetzen; es ist daher

$$\mathfrak{p} \text{ zwar } < p \text{ aber doch offenbar } > p \,.\, Sin.\, \mu^2$$

Ein Theil von $\mathfrak{p}$ muſs p selbst, und ein anderer Theil $p \,.\, Sin.\, \mu^2$ als einen Faktor enthalten; der aliquote Teil, welcher von p und von $p \,.\, Sin.\, \mu^2$ genommen werden muſs, kann nicht durch eine unveränderliche Zahl ausgedrückt werden, da er ohne allen Zweifel von $Sin.\, \mu$ selbst abhängig seyn muſs. Diese einfache Betrachtung leitete mich im *Lehrbuch der Hydraulik* (S. 218) auf den höchst einfachen Ausdruck *für den Widerstand* der Fläche

$$260.)\quad \mathfrak{p} = \frac{(1 - Sin.\, \mu) \,.\, p + (1 + Sin.\, \mu) \,.\, p \,.\, Sin.\, \mu^2}{2}$$

Unter *Widerstand* wird die Kraft verstanden, welche nöthig ist, eine Stoſsfläche mit der Geschwindigkeit C in übrigens ruhig stehendem Wasser fortzubewegen. Dieser Widerstand ist allemal etwas kleiner als der Stoſs des mit derselben Geschwindigkeit C gegen dieselbe ruhig stehende Fläche. Indessen kann man die Formel No. 260 sowohl für den *Stoſs* als für den *Widerstand* gelten lassen, wenn man für ersteren den Werth nach der Formel am Anfange dieses Paragraphs nimmt; für den letzteren aber

$$261.)\quad p = \left(1 + \frac{2}{(C-1)^2 + 5}\right) \cdot \frac{C^2}{4g} \,.\, W$$

wo W der senkrechte Querschnitt (hier also nicht $b\,c$ sondern $b\,m$) ist.

§. 247ᵃ.

Bossut hat in seinem *Lehrbegriffe der Hydrodynamik* (II. Bd. S. 410) für die Werthe von μ von 6 zu 6 Graden durch den ganzen Quadrant Versuche angestellt, um $\mathfrak{p}$ *für den Widerstand* aus der Erfahrung zu bestimmen. Ich theile hier seine Angaben mit Beifügung der Zahlen mit, welche ich nach No. 261 und No. 260 berechnet habe.

Werthe von μ in Graden.	Relative Werthe des Widerstandes nach der gem. Theorie, oder von $\frac{C^2}{4g} \cdot W \cdot Sin. \mu^2$	Relative Werthe des Widerstandes nach meiner Berechnung.	Relative Werthe des Widerstandes nach der Erfahrung.
90	10000	10000	10000
84	9890	9891	9893
78	9568	9573	9578
72	9045	9068	9084
66	8346	8417	8446
60	7500	7667	7710
54	6545	6880	6925
48	5523	6098	6148
42	4478	5392	5433
36	3455	4804	4800
30	2500	4375	4404
24	1654	4130	4240
18	955	4080	4142
12	432	4221	4063
6	109	4538	3999

Die Formel (No. 260) giebt nach der Methode des Gröſsten und Kleinsten ein Minimum für $\mu = 19^\circ\ 28'$, daher dann auch der Widerstand für $\mu = 12^\circ$ und für $\mu = 6^\circ$ wieder zunimmt, was wohl gegen die Natur der Sache ist, so daſs die Formel noch einer Korrektion bedarf, die erst bei kleineren Winkeln merkbar wird. Ich fand (*Lehrbuch der Hydraulik* S. 219) die nachstehende Formel sehr genügend:

262.) $$\mathfrak{p} = \frac{(1-Sin.\mu).p+(1+Sin.\mu).p.Sin.\mu^2}{2} + \frac{p.(1-5.Sin.\mu^2)}{32.(1+Sin.\mu)} \cdot log br. \frac{10000.Sin.\mu^2+1}{10001}$$

Man findet hiernach

z. B. für $\mu = 60^\circ$, $\mathfrak{p} = 7714$; die Erfahrung gab 7710.

für $\mu = 6^\circ$, $\mathfrak{p} = 4015$; die Erfahrung gab 3999.

Man muſs bei solchen Vergleichungen nie vergessen, daſs selbst die Angaben nach der Erfahrung nie als genau gelten können.

Bossut hatte sich schon früher (a. a. O. S. 410 — 414) bemüht, eine auf alle Winkel passende Formel zu finden, und brachte die nachstehende zum Vorschein

$$\mathfrak{p} = 10000 \cdot Sin.\ \mu^2 + 3{,}153 \cdot \left(\frac{90 - \mu}{6}\right)^{3\frac{1}{4}}$$

$p = 10000$ angenommen. Diese Bemühung ist ihm aber gänzlich miſslungen. Die Formel giebt z. B. für $\mu = 12^\circ$

$\mathfrak{p} = 5198$; die Erfahrung gab aber nur $\mathfrak{p} = 4063$.

Ich muſs noch auf einen Umstand in Bezug auf No. 262 aufmerksam machen. Da diese Formel das Verhältniſs zwischen $\mathfrak{p}$ und p von 90° bis zu 6° über alle Erwartung genau ausdrückt, so hat sie die Vermuthung für sich, daſs sie auch noch für viel kleinere Winkel passende Resultate geben und vielleicht bis zu $\mu = o$ der Erfahrung nahe genug

bleiben werde; sie giebt aber, für $\mu = o$, $\mathfrak{p} = 0{,}375 \,.\, p$ oder $= 3750$, wenn man $p = 10000$ setzt. Wäre man also durch Zuschärfung des Vordertheils einmal bis zu $'\mu = 6^{o}$ gekommen, wo noch $\mathfrak{p} = 0{,}4 \,.\, p$ oder hier $= 4000$ wäre (was ich wohl statt 3999 setzen darf) so würde durch Vorsetzung noch schärferer Vordertheile der Widerstand nicht mehr bedeutend vermindert werden können. In wiefern dieses durch die Erfahrung bestätigt oder berichtigt werden möchte, mufs ich hier dahin gestellt seyn lassen.

Auch scheint mir die Untersuchung, in wiefern das Volumen eines Körpers, der im Wasser bewegt wird, Einflufs auf die Gröfse des Widerstandes hat, für jetzt noch zu verwickelt und noch nicht hinlänglich von Erfahrungen unterstützt. Ueberdas erfordern Untersuchungen der Art Anwendungen der höheren Analysis, deren Kenntnifs ich hier nicht voraussetzen darf.

Ich nenne daher hier nur noch einige hierher gehörige Schriften

Prony, neue Architektura Hydraulika.

Nouvelles expériences sur la résistence des fluides par M. M. *d'Alembert*, le Marquis *de Condorcet* et l'Abbé *Bossut*, Paris 1777.

Examen maritime théoretique et pratique ou Traité de Mécanique, appliqué à la construction et à la manoeuvre des vaissaux. Par Don *George Juan*. Traduit de l'Espagnol avec des additions par M. Levêque, Nantes 1783.

Abhandlung der königl. Schwed Akad. d. Wiss. 1795, 2tes Quartal.

Gerstner, Theorie des Wasserstosses in Schufsgerinnen, mit Rücksicht auf Erfahrung und Anwendung. Abhandlung der königl. Böhm. Gesellschaft d. W. 2ter Band. Prag 1795.

Clemens, Darstellung und Beschreibung der Versuche des Viceadmirals von *Chapmann* in Karlskrona zu Bestimmung des Widerstandes flüfsiger unbegrenzter Massen, Berlin 1797.

Eytelwein, Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. 2te Auflage Leipzig 1823.

§. 247[b].

Erst späterhin erhielt ich Herrn *Christian's* Traité de Mécanique Industrielle (Paris 1822), wo man im ersten Bande S. 262 u. ff. mehrere interessante Nachrichten findet, die ich hier nicht ganz übergehen darf.

Der Ritter *Joseph Morosi* hat nämlich unter veränderten Umständen neuere Versuche über die Wirkung des isolirten Strahls angestellt, und hierüber im Institute zu Mailand eine Abhandlung vorgelesen, deren Inhalt Herr Christian nach der *Bibliothéque universelle* a. a. O. mittheilt.

Die Vorrichtung war nach der Beschreibung dieselbe, deren ich mich bediente (*Fig.* 106). Ein hinlänglich weites Behältnifs, wie *A* (*Tab. XXV, Fig.* 110$^{\alpha}$) hatte an der einen

Seitenwand eine viereckte Oeffnung zu 4 Zoll ins Gevierte, so daſs hier vw die Höhe dieser Oeffnung bezeichnet. An dieser Oeffnung war eine kurze Ansatzröhre angebracht, in pyramidischer Form, so daſs die Ausfluſsöffnung α noch 1 Zoll ins Gevirte betrug. Das flache Brett mn, das er *Scheibe* (disque) nennt, war lothrecht der Oeffnung gegenüber gestellt (nämlich am lothrechten Arme des Winkelhebels (*Fig.* 105) befestigt). Von der Gröſse dieser Scheibe wird nichts gesagt; aber ihr Durchmesser war ohne Zweifel nicht gröſser als die Diagonale der Oeffnung, weil sonst die Resultate der Beobachtungen mit allen so vielfach angestellten Beobachtungen im Widerspruche stehen würden.

So stellte er mehrere Versuche an, wovon Christian 3 mittheilt:

Beim Versuche no. 1. war $a\alpha = 6'$; die Gröſse des Stoſses 5 ℔

no. 2. — $a\alpha = 8'$; — — — — 7 »

no. 3. — $a\alpha = 10'$; — — — — 9 »

Herr *Morosi* hatte nicht wohl gethan, eine pyramidenförmige Röhre zu wählen, ohne besondere Versuche über Zusammenziehung des Strahls, welche bei der schiefen Richtung ($v\alpha$, $w\alpha$) ausserhalb der Röhre nothwendig Statt haben muſste, anzustellen: Wir wollen daher den kleinsten Querschnitt des Strahls hier zuerst durch $\frac{a + 0{,}81 \,.\, \alpha}{2}$ oder 0,905 ausdrücken. Bezeichnen wir die Höhe $a\alpha$ mit h, so war $h \,.\, w = h \,.\, 0{,}905$ Kub. Zoll (h in Zollen verstanden.) $= h \,.\, \frac{0{,}905}{144}$ Kub. Fuſs (h in Fuſsen genommen). Setzen wir $h = 10'$, so wird

$$h \,.\, w = \frac{9{,}05}{144} = 0{,}0628 \text{ Kub. Fuſs.}$$

Alles in Bezug auf Mail. Maaſs und Gewicht.

Der Mailändische Fuſs verhält sich zum Pariser wie 11 zu 9; also der Mailändische Kub. Fuſs zum Pariser wie 1,83 zu 1.

Das Mailändische Pfund ist zum Pariser wie 1 zu 1,495. Demnach wiegt der Mailändische Kubikfuſs Wasser 1,83 . 1,495 . 70 = 192 Mail. ℔; und man hat nunmehr

$$h \,.\, w = 0{,}0628 \,.\, 192 = 12{,}06 \text{ ℔ (Mail.)}$$

welches das Gewicht der einfachen Wassersäule ist.

Hiernach waren die zu $h = 10'$ gehörigen 9 ℔ sehr genau $\frac{3}{4}$ der einfachen Wassersäule.

Da dieses allen Erfahrungen widerspricht, so wollen wir $w = 1$ Quadratzoll beibehalten, hingegen die Geschwindigkeitshöhe nur $= 0{,}66 \,.\, h = 6{,}6$ Fuſs annehmen, so wird jetzt $h \,.\, w = \frac{6{,}6}{144} = 0{,}0458$ Kubikfuſs $= 0{,}0458 \,.\, 192$ ℔ $= 8{,}79$ ℔, was der Angabe von 9 ℔ nahe genug kommt.

Auf die Zusammenstimmung dieser Beobachtung mit dem Resultate der Rechnung kommt es uns aber hier nicht an; es ist eine andere merkwürdige Erscheinung, auf welche Herr *Morosi* aufmerksam macht.

Er wiederholte nämlich ganz unter denselben Umständen die Versuche, nur mit dem

einzigen Unterschiede, daſs er die Stoſsfläche ringsum mit Leisten umgab, welche etwa 6 Linien dick waren. Jetzt fand er

für $a\alpha = 6'$ die Gröſse des Stoſses $= 11$ ℔

» $a\alpha = 8'$ — — — — $= 15$ »

» $a\alpha = 10'$ — — — — $= 20$ »

also etwas mehr als das doppelte.

Es war dieses keine zufällige Entdeckung. *Morosi* hatte bei den vorigen Versuchen bemerkt, daſs das Wasser nach dem Stoſse auf die Fläche mit groſser Geschwindigkeit sich ringsum die Fläche herum nach allen Seiten verspritzte; was ohne Fortdauer des Drucks auf diese Wassertheilchen nicht hätte geschehen können. Er vermuthete daher, daſs noch ein bedeutender Theil der Wirkung gewonnen werden würde, wenn man der plötzlichen Ausweichung der Wassertheilchen zur Seite eine Hinderniſs entgegen setzte, und fand durch den Erfolg diese Vermuthung aufs Vollkommenste bestätigt. »Pouvant à peine croire à la realité du fait, sagt Herr Christian (S. 265), il répéta plusieurs fois l'expérience, et toujours avec le même resultat.«

Genauer betrachtet kann diese Erscheinung nicht befremden. Sie liegt schon in dem Ausdrucke für die vollständige Wirkung beim Stoſse $p = \frac{C - c}{2g} . M$. Wenn w der Querschnitt ist, durch welchen die Wassermenge M mit der Geschwindigkeit C durchflieſst, so ist $M = C . w$, also $p = \frac{C - c}{2g} . C . w = \frac{C^2 - Cc}{2g} . w$, und wenn, wie bei vorstehenden Versuchen, $c = o$ ist, so wird $p = \frac{C^2}{2g} . w = 2 . \frac{C^2}{4g} . w$.

Hierzu wird aber erfordert, daſs alle Wirkung, deren das Wasser fähig ist, vollständig auf die Stoſsfläche verwendet werde, was dann auf verschiedene Weise geschehen kann: 1.) dadurch, daſs die Schaufelfläche groſs genug gemacht wird, um den über sie verbreiteten Strahl soweit aufzufangen, als er noch vermöge seiner äuſsern Krümmung merkbar auf die Fläche wirken kann; 2.) dadurch, daſs man die nicht hinlänglich groſse Stoſsfläche mit einer Umfassung von Leisten versieht, welche die Wassertheilchen nach vollendetem Stoſse plötzlich zur Seite auszuweichen und die Stoſsfläche zu verlassen verhindert.

XVI. Kapitel.

AËROMETRISCHE ODER PNEUMATISCHE UNTERSUCHUNGEN.

§. 247[c].

In der *Hydrostatik* und *Hydraulik* ist von tropfbar flüssigen Materien die Rede; in der *Aërometrie* oder *Pneumatik* wird von *luftförmigen* Stoffen gehandelt, insofern dabei Erscheinungen eintreten, die von mechanischen Kräften abhängen. Hierher gehören alle elastisch-flüssige Stoffe, deren Theilchen nur durch äuſseren Druck in einem bestimmten Raume erhalten werden, und die daher einen gröſseren Raum einnehmen oder sich in einen gröſseren Raum verbreiten, sobald der auf sie wirkende äussere Druck geringer wird. In Bezug auf diese Eigenschaft sind uns vorzüglich, nach dem Zwecke dieser Schrift, 3 Stoffe wichtig:

1.) Die athmosphärische Luft.
2.) Der (noch hypothetische) Wärmestoff.
3.) Die Dämpfe von erwärmtem Wasser.

Wir werden hiervon das Wichtigste d. h. nur diejenigen Lehren in der Kürze vortragen, deren Kenntniſs sich von jedem Ingenieur fordern läſst.

§. 247[d].

Daſs unsere atmosphärische Luft wie jeder andere Körper ein Streben hat, gegen den Mittelpunkt der Erde zu sinken, oder daſs sie *schwer* ist, darf ich hier als eine längst bekannte Thatsache aus der Physik voraussetzen. *Prony* setzt bei 28″ Barameterhöhe und 10° *Réaumur*.

Das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft = 0,0012375.
Die des Wassers = 1 gesetzt.

Also das Wasser 808 mal so schwer als die athmosphärische Luft unter vorbestimmten Umständen.

Herr *Christian* setzt 780 statt 808 (*Mécanique Industrielle* T. II. p. 4.)

§. 247[e].

Denkt man sich die athmosphärische Luft durch nahe über einander genommene wahre Horizontalflächen in Schichten getheilt, so drückt jede höhere Schichte vermöge der Schwere auf die nächst niedrige. Die unterste Schichte auf der Erdfläche leidet den Druck aller über ihr liegenden z. B. den Druck von 9999 Schichten; die zweite über der Erdfläche den Druck von 9998 Schichten, die 1000ste den Druck von 9000 Schichten, die 9000ste nur noch den Druck von 1000 über ihr liegenden Schichten u. s. f.

Angestellte Versuche haben gezeigt, daſs der Raum, den eine bestimmte Luftmasse einnimmt, in demselben Verhältnisse kleiner wird, in welchem der auf sie wirkende Druck zunimmt. Bei doppeltem Druck nimmt sie nur die Hälfte, beim dreifachen nur den dritten Theil ihres anfänglichen Raums ein; sie erlangt also bei doppeltem Druck die doppelte Dichtigkeit (unveränderte Temperatur vorausgesetzt), bei dreifachem Druck dreifache Dichtigkeit, also auch doppeltes, dreifaches specifisches Gewicht. Und da die Expansivkraft mit dem Druck im Gleichgewicht seyn muſs, so nimmt solche in gleichem Verhältnisse zu. *Hales* hat diese Erscheinung mittelst hohler Kugeln, die er im Meere versenkte, noch bis zum 32fachen atmosphärischen Druck bestätigt gefunden.

Demnach hat auch die atmosphäriche Luft in den tiefen oder der Erde näher liegenden Schichten eine gröſsere Dichtigkeit, gröſseres specifisches Gewicht und gröſserere Expansivkraft als in der höher liegenden.

§. 247[f].

Diese Betrachtung führt uns auf die Beschaffenheit und den Gebrauch des Barometers.

Das *Barometer*, durch seinen allgemeinen Gebrauch als sogenanntes *Wetterglas* sehr bekannt, ist eine etwa auf die Länge von 31 bis 32 Pariser Zolle herablaufende Glasröhre $\alpha\beta$ (*Fig.* 110[b]) die zu unterst nach $\beta\gamma\delta$ umgebogen in ein kleines birnförmiges oder auch cylindrisches Gefäſschen $\delta\varepsilon$ sich endet, und mit Quecksilber hinlänglich angefüllt ist. Die Höhe $\gamma\varepsilon$ beträgt $1\frac{1}{2}$ bis 2 Par. Zolle. Der Durchmesser der Röhre soll wegen der mit gröſserer Weite verbundenen gröſseren Bewegbarkeit des Quecksilbers nicht *unter* 2 Par. Linien betragen; *De Luc* verlangt $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien, was allerdings besser ist. Wird die gedachte Glasröhre mit Quecksilber in etwas schiefer Lage ganz angefüllt und dann lothrecht aufgestellt, so fällt das Quecksilber bis auf eine gewisse Stelle unterhalb α zurück, und der Raum zwischen α und der höchsten Stelle der Quecksilbersäule ist nun vollkom-

men Luftleer, er heifst von *Torricelli* (einem Schüler des *Galiläus*), der diesen Versuch zuerst anstellte, die torricellische Leere.

Unter der *Barometerhöhe* versteht man die Höhe des Quecksilbers in der Röhre über der Oberfläche des Quecksilbers im Gefäfschen z. B. die xy, wenn das Quecksilber oben bei v und unten bei μ steht. Durch mehrjährige Beobachtungen bei sehr anhaltend windstiller trockener Witterung, und bei Regen und Stürmen auch starken Gewittern, lernt man die Grenzen v und w kennen, in welchen sich die höchste Stelle des abwechselnd steigenden und sinkenden Quecksilbers zu erhalten pflegt, da man dann durch etwas höher und etwas tiefer gezogene Linien, wie cd, mn, die Grenzen noch sicherer bezeichnet. Stellt man eine Reihe von Jahren tägliche Beobachtungen an, summirt alle tägliche Barometerhöhen und dividirt dann die Summe aller beobachteten Barometerhöhen durch die Zahl der Beobachtungen, so erhält man die *mittlere* Barometerhöhe für die Gegend der Beobachtung in einem bestimmten Niveau. Für die Meeresfläche wird die mittlere Barometerhöhe zu 28″ Pariser Zoll angenommen.

Erreicht das Quecksilber beim niedrigsten Stande die Stelle μ im Gefäfschen, und zieht man nun etwas höher die op, so erhebt sich in diesem Gefäfschen das Quecksilber nie über die op.

Der Höhenwechsel vw kann mehrere Zolle betragen. Damit aber der Wechsel im untern Gefäfschen immer unbedeutend bleibe, so macht man den Durchmesser des Gefäfschens 4 = 5 = 6 mal so grofs als den der Röhre, da dann zum Wechsel von 1 Zoll in der Röhre nur ein Wechsel von $\frac{1}{16}$ = $\frac{1}{25}$ = $\frac{1}{36}$ Zoll im Gefäfschen gehört.

Aus dem Vorhergehenden sieht man, dafs die atmosphärische Luft überall ein Streben hat, nach allen Seiten hin sich zu verbreiten, und dafs sie nur durch äufseren Druck in einem bestimmten Raume erhalten wird. Die Luft im Gefäfschen über μ bis ε hat von oben herab den Druck der ganzen Atmosphäre auszuhalten, von unten aufwärts den Druck einer Quecksilbersäule von der Höhe xy; und da beide Pressungen im Zustande des Gleichgewichts gleich grofs seyn müssen, so ist die Barometerhöhe das Maafs des atmosphärischen Drucks, und zugleich das Maafs der Expansivkraft der atmosphärischen Luft.

Wird das Barometer in eine tiefere Stelle gebracht, so mufs die Quecksilbersäule steigen, in einer höheren mufs sie fallen.

§. 247[g].

Soll aus den verschiedenen Barometerhöhen in verschiedenen Luftschichten z. B. auf einem Berge und in einem Thale, auf die Höhe der einen Stelle über der andern geschlossen werden können, so müssen die Beobachtungen entweder unter einerlei Umständen angestellt worden seyn, oder man mufs für beide Stellen die mittlere Barometerhöhe in Rechnung bringen. Zu letzterem fehlt es uns meistens an hinlänglichen Beobachtungen. Inzwischen wird eine dieser Bedingungen bei der nachstehenden Untersuchung vorausgesetzt.

Zuerst wollen wir sehen, wie sich die Höhe einer Stelle über der Meeresfläche bestimmen läſst, und dabei annehmen, die Barometerhöhe sey im Niveau der Meeresfläche $= H$ Linien, und an einer Stelle in bedeutend höherem Niveau $= q$ Linien.

1.) Wir denken uns nun die Atmosphäre von der Meeresfläche aufwärts durch wahre Horizontalflächen in Schichten zu 1 Toise oder 864 Linien hoch abgetheilt, und nehmen an, was ohne merklichen Fehler angenommen werden kann, daſs in jeder solchen Schicht die Luft gleich dicht sey.

2.) Ist nun das specifische Gewicht des Quecksilbers m mal so groſs als das der Luft im Niveau der Meeresfläche, so ist den bisherigen Lehren zufolge die Höhe, um welche die Quecksilberhöhe oder Barometerhöhe von Schichte zu Schichte abnimmt

an der obern Grenze der ersten Schichte $= \frac{864}{m}$, wofür ich α setzen will.

der zweiten » $= \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) . \alpha$ oder $= \beta$.

der dritten » $= \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{H}\right) . \alpha = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) . \beta = \gamma$

der vierten » $= \left(1 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{H}\right) . \alpha = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) . \gamma = \delta$

u. s. f.

Hier ist $\beta = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) . \alpha$; $\gamma = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^2 . \alpha$; $\delta = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^3 . \alpha$ u. s. f.

3.) Steigt man also durch n Luftschichten, so ist die Abnahme der Barometerhöhe in allen n Luftschichten zusammengenommen,

$$= \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) . \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^2 . \alpha + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^3 . \alpha \ldots\ldots + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^{n-1} . \alpha$$

$$= \left(1 + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^3 \ldots\ldots + \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^{n-1}\right) . \alpha$$

Bezeichnen wir dieses gesammte Fallen des Barometers mit f, so giebt uns die gemeine Algebra

$$f = H . \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n\right)$$

Daher $1 - \frac{f}{H} = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)^n$; $\log. \left(1 - \frac{f}{H}\right) = n . \log. \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)$;

und $$n = \frac{\log. \left(1 - \frac{f}{H}\right)}{\log. \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right)}$$

4.) Es ist aber $f = H - q$, also $1 - \frac{f}{H} = \frac{q}{H}$, also

$$n = \frac{log.H - log.q}{log.H - log.(H-\alpha)} = \frac{log.H - log.q}{log.H - log.\left(H - \frac{864}{m}\right)}$$

Setzt man nun nach vorigem §. in Pariser Linien $H = 336$, so wird

$$n = \frac{log.336 - log.q}{log.336 - log.\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

Es kommt nun noch auf den Werth von m an. Setzt man das specifische Gewicht des Quecksilbers $= 13{,}568$, so ist $m = 13{,}568 \,.\, 808 = 10963$; nimmt man mit einigen Physikern 13,99 statt 13,568, so wird $m = 11303$ für die Barometerhöhe von 336 Linien bei 10° Réaumur.

5.) Findet man in einer unterhalb der oberen Stelle, wo die Barometerhöhe $= q$ war, liegenden Stelle die Barometerhöhe $= p$ Pariser Linien, so hat man für diese

$$n = \frac{log.336 - log.p}{log.336 - log.\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

Daher die Höhe der oberen Station, wo man q hatte, über der unteren, wo man p hat, $=$

$$\frac{log.336 - log.q}{log.336 - log.\left(336 - \frac{864}{m}\right)} - \frac{log.336 - log.p}{log.336 - log.\left(336 - \frac{864}{m}\right)} = \frac{log.p - log.q}{log.336 - log.\left(336 - \frac{864}{m}\right)}$$

$$= \frac{log.p - log.q}{log.\left(\frac{1}{1 - \frac{864}{336 \,.\, m}}\right)} \text{ (C}$$

Da dann diese Bestimmung nicht mehr von der mittleren Barometerhöhe im Niveau der Meeresfläche abhängt. Setzen wir $m = 11200$, so finde ich den briggischen Logarithmen im Nenner $= 0{,}00010005$, daher in Toisen

Höhe beider Stationen über einander $= 10000 \,.\, (log.p - log.q)$ s. oben No. 248.

Bei dieser Bestimmung müssen aber p und q, beide zugleich, entweder gleichzeitig beobachtete oder mittlere Barometerhöhen seyn. Wollte man z. B. q als Barometerhöhe auf einem Berge jetzt beobachten und für p die mittlere Barometerhöhe im Niveau der Meeresfläche nehmen, die $= 336$ ist, so wäre die Anwendung dieser Berechnung unstatthaft.

Misst man z. B. q zu einer Zeit, wo die Barometerhöhe p im Niveau der Meeresfläche nicht 336, sondern 340 Linien wäre, so wäre $10000 \,.\, log.340 = 25314{,}789$; aber

10000 . *log*. 336 = 25263,393, man fände also die Höhe über der Meeresfläche um 51,306 Toisen oder 308,376 Par. Fuſs zu klein.

Korrektionen sind zwar in No. 249 und No. 250 angegeben worden, es beziehen sich aber dieselben blos auf Aenderungen wegen der Temperatur. Scharfe Resultate giebt das Barometer nie.

Hierher gehörige Schriften sind schon (§. 232) angezeigt worden. Ich nenne hier noch

De Luc, Untersuchungen über die Atmosphäre und die zu Abmessung ihrer Veränderungen dienlichen Werkzeuge. Aus dem Französischen von *Gehler*. 2 Bde. Leipzig 1776.

Kästner, Abhandlung vom Höhenmessen mit dem Barometer, in seinen Anmerkungen über die Markscheidekunst. Göttingen 1775.

Hennert, Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri. Traj. ad Rhen. 1786.

Damen, de montium altitudine mensuranda. Hag. 1783.

Gehler, Phys. Wörterbuch (jetzt die neue Ausgabe).

Prony, neue Architektura hydraulika.

Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik III. Th.

XVII. Kapitel.

FORTSETZUNG PNEUMATISCHER UNTERSUCHUNGEN, INSBESONDERE VOM WAERMESTOFFE.

§. 247f.

Wir betrachten hier die *Wärme* als Wirkung eines eigenen elastisch-flüssigen Stoffes, die sich blos durch das Streben nach Ausdehnung kennbar macht, indem die Theilchen dieses Stoffes nicht nur sich selbst, sondern auch die Theilchen anderer Materien, zwischen welchen sie ihren Aufenthalt haben und zwischen die sie eindringen, von einander zu entfernen streben. *Tauchen* wir einen Finger in siedendes Wasser, so übt der aus dem Wasser schnell in den Finger einströmende Wärmestoff dieselbe Wirkung aus, und erregt dadurch ein schmerzliches Gefühl. Jeder Körper hat nur ein momentanes Volumen, das sich ändert, sobald sich der ihm zukommende Wärmegrad ändert. Die Korrektion der Höhemessungen durch das Barometer beruht auf bestimmten Wärmegraden; die specifischen Gewichte der mannichfaltigen Materien beziehen sich auf bestimmte Wärmegrade; auf ihnen beruht die ganze Wirkung der Dampfmaschinen. Es ist also von Wichtigkeit, bestimmte Wärmegrade angeben zu können. Zu jeder Aenderung des Volumens einer bestimmten Materie gehört eine bestimmte Aenderung der Wärme; wir können daher aus der Aenderung des Volumens auf die Aenderung der Wärme schliefsen. Hierzu sind flüssige Materien, wie Luft, Wasser, Weingeist, Leinöhl, Quecksilber vorzüglich geschickt, und bei sehr hohen Wärmegraden Thon, auch Metalle. Ein zu diesem Zwecke eingerichtetes Werkzeug heifst ein *Thermometer*. Hier ist die Kenntnifs der gebräuchlichsten Thermometer hinlänglich, die aus einer zuerst mit einem sehr heifsen Fluidum ganz angefüllten und zugeschmolzenen gläsernen Röhre, wie *Fig.* 110e bestehen.

War die Röhre anfänglich bis in *o* mit einem sehr heifsen Fluidum angefüllt, und in diesem Zustande bei *o* durch Schmelzung verschlossen, so war das Fluidum in diesem

Zustande sehr ausgedehnt, so daſs es sich bei der Abkühlung bis zu einer uns angenehmen Temperatur sehr zusammenzieht und z. B. bis in *m* herabsinkt, da dann der Raum *mo*; wie die torricellische Leere, vollkommen luftleer ist. Da der Durchmesser der Kugel *A* vielmal gröſser als der Durchmesser der Röhre ist, so bewirkt jede sehr kleine Ausdehnung des Fluidums in der Kugel ein merkliches Steigen in der Röhre, wie umgekehrt eine sehr geringe Zusammenziehung des Fluidums in der Kugel ein merkliches Fallen zur Folge hat. Mit Uebergehung einiger älteren Thermometer wollen wir hier gleich das *Fahrenheitsche* betrachten.

§. 247^g.

Fahrenheit, ein Danziger Künstler, bediente sich zur Füllung zuerst gefärbten Weingeistes, nachher, etwa seit 1714 oder 1715 des Quecksilbers. Die Stelle, bis zu der das Quecksilber in einer Mischung von Wasser, Eis und Salmiak stand, bezeichnete er mit 0 (*Null*), bemerkte die Stelle, bis zu der das Quecksilber in siedendem Wasser stieg, mit 212, und theilte diese Entfernung zwischen seinen beiden Fundamentalpunkten in 212 gleiche Theile oder *Grade*. Im schmelzenden Schnee steigt das Quecksilber 32° über *Null*. Dieser Punkt heiſst der *natürliche Gefrierpunkt*, wie jener bei 212°, der *Siedepunkt*. Beide Punkte heiſsen *Fundamentalpunkte*; ihr Abstand von einander der *Fundamentalabstand*, der hier in 180 gleiche Theile eingetheilt ist. Dieses Fahrenheitsche Thermometer blieb lange Zeit das üblichste.

§. 247^h.

Réaumur änderte gegen 1730 das Fahrenheitsche Thermometer ab, und bediente sich dabei wieder des Weingeistes. Den natürlichen Gefrierpunkt bezeichnete er mit 0; den Siedepunkt, den nämlich der Weingeist im siedenden Wasser erreichte, mit 80, und theilte den Fundamentalabstand in 80 gleiche Theile, weil er gefunden hatte, daſs sich der Weingeist von der Gefrierkälte bis zum Siedepunkt im Verhältnisse 1000 : 1080 ausdehne.

Das ursprüngliche Réaumursche Thermometer ist also ein Weingeistthermometer.

Die Quecksilberthermometer verdienen den Weingeistthermometern vorgezogen zu werden, weil dabei die Ausdehnungen des Quecksilbers den wirklichen Wärmeänderungen proportional bleiben. Wird nämlich die Temperatur von 100 Theilen (dem Gewichte nach) Wasser $= m$ Grade über Null, und die von andern 100 Theilen $= n$ Grade gefunden, so müſsten beide Massen vermischt, bei jenem Satze, eine Mischung von $\frac{100 \,.\, m + 100 \,.\, n}{200}$ oder von $\frac{m + n}{2}$ Graden geben, was auch bei Quecksilberthermometern mit der Genauigkeit, welche die Beobachtung selbst gestattet, wirklich so befunden wird, nicht aber bei Weingeistthermometern.

Man hat daher auch das Réaumursche Weingeistthermometer bald wieder abgeändert

mit Beibehaltung der Réaumurschen Skale solches mit Quecksilber gefüllt, und ihm wegen dieser Skale den Namen des *Réaumurschen* Thermometers gelassen. Es wird nun allemal ein solches Quecksilberthermometer verstanden, wenn das Réaumursche ohne weiteren Beisatz genannt wird.

§. 247[i].

Das Thermometer von *de l'Isle* ist gleichfalls ein Quecksilberthermometer; er machte es 1733 bekannt. Weil die auf Weingeist eingerichtete Skale nicht auf das Quecksilber paſste, welches sich von der Siedhitze bis zur Gefrierkälte um $\frac{150}{10000}$ zusammenzieht, und er die Grade dieser Zusammenziehung andeuten wollte, so bezeichnete er den Siedepunkt mit 0 und den Frost- oder Gefrierpunkt mit 150.

Celsius, dessen Thermometer auch das *Schwedische* heiſst und welches wiederum ein Quecksilberthermometer ist, theilte, wie es auch jetzt in Frankreich geschieht, den Fundamentalstand in 100 gleiche Theile, bezeichnete also den Gefrierpunkt mit 0 und den Siedepunkt mit 100.

Das in Teutschland meist übliche ist das Réaumursche Quecksilberthermometer; doch wird auch der Gebrauch des hunderttheiligen oder des Quecksilberthermometers mit 100 theiliger Skale immer mehr verbreitet.

§. 247[k].

Inzwischen ist in Bezug auf den Siedepunkt noch eine Bemerkung übrig. Die Stelle des Siedepunktes ist nämlich so veränderlich als die Barometerhöhe, nur diese Veränderlichkeit nicht so bedeutend. Das Wasser kommt desto später und bei einem desto höheren Wärmegrade zum Sieden, je gröſser der Druck ist, der auf seine Oberfläche wirkt. Siedendes Wasser hat also in freier Luft eine desto höhere Temperatur, je stärker die Atmosphäre darauf drückt, oder je gröſser die Barometerhöhe ist. Der Siedepunkt soll sich aber allemal auf eine bestimmte Barometerhöhe beziehen. Deputirte der kön. Societät zu *London* bestimmten diese Normalhöhe des Barometers zu 332,16 Par. Linien

Wird nun ein Thermometer zu einer Zeit oder in einer Gegend verfertigt, wo der Abstand des Siedepunkts vom Gefrierpunkt λ Par. Linien beträgt, und die Barometerhöhe in Par. Linien $= B$ ist, so soll man den Fundamentalabstand $= \left(1 + \frac{B - 332{,}16}{1280}\right) . \lambda$ nehmen, was dann gröſser oder kleiner als λ werden kann.

§. 247[l].

Nach den hier angegebenen Einrichtungen des Fahrenheitschen, des Réaumurschen (mit Quecksilber gefüllten), des Delisleschen und des Celsiusschen Thermometers lassen sich leicht die Grade eines jeden auf die eines jeden andern reduciren. Z. B.

n Fahrenheitsche Grade.............................. $= \frac{4}{9} \cdot (n-32)$ Réaumur.
n Delislesche » $= 80 - \frac{8}{15} \cdot n$ »
n Celsiussche » (schwedische, jetzige
französische)............... $= 0{,}8 \cdot n$ »

Hiernach 45° Fahrenheit $= \frac{4}{9} \cdot (45 - 32) = 5{,}77°$ Réaumur
45° De l'Isle $= 80 - \frac{8}{15} \cdot 45 = 56°$ »
45° Celsius $= 0{,}8 \cdot 45 = 36°$ »

§. 247m.

In dem neubearbeiteten Gehlerschen *physikalischen Wörterbuche* findet man unter dem Artikel *Ausdehnung* hinlängliche Belehrung über die Bemühungen der Physiker, die verhältnifsmäfsige Ausdehnung des Wassers bei verschiedenen Wärmegraden zu bestimmen. Nach einer dort (1. Bd. S. 616) angegebenen Formel hat ein hiesiger Liebhaber der Mathematik, Hr. *F. L. Hoffmeister*, nachstehende Tafel berechnet, wo *t* die Grade des hunderttheiligen Quecksilberthermometers und *V* das verhältnifsmäfsige Volumen des Wassers, welches, für $t = 4{,}4°$, $= 1$ angenommen wird, bezeichnet.

Werthe von *t*.	Werthe von *V*.	Werthe von *t*.	Werthe von *V*.	Werthe von *t*.	Werthe von *V*.	Werthe von *t*.	Werthe von *V*.
1	1,00005419	26	1,00281005	51	1,01232619	76	1,02732233
2	1,00002833	27	1,00306913	52	1,01282948	77	1,02801780
3	1,00001075	28	1,00333903	53	1,01334143	78	1,02871985
4	1,00000151	29	1,00361960	54	1,01386202	79	1,02942840
5	1,00000227	30	1,00391077	55	1,01439109	80	1,03014343
6	1,00001613	31	1,00421245	56	1,01492863	81	1,03086478
7	1,00004250	32	1,00452457	57	1,01547449	82	1,03159244
8	1,00008129	33	1,00484704	58	1,01602865	83	1,03232623
9	1,00013243	34	1,00517977	59	1,01659096	84	1,03306620
10	1,00019583	35	1,00552268	60	1,01716140	85	1,03381211
11	1,00027141	36	1,00587570	61	1,01773984	86	1,03456405
12	1,00035909	37	1,00623876	62	1,01832624	87	1,03532176
13	1,00045878	38	1,00661169	63	1,01892043	88	1,03608532
14	1,00057040	39	1,00699449	64	1,01952250	89	1,03685451
15	1,00069386	40	1,00738707	65	1,02013217	90	1,03762928
16	1,00082908	41	1,00778933	66	1,02074948	91	1,03840968
17	1,00097599	42	1,00820119	67	1,02137428	92	1,03919550
18	1,00113450	43	1,00862256	68	1,02200657	93	1,03998660
19	1,00130451	44	1,00905338	69	1,02264615	94	1,04078305
20	1,00148596	45	1,00949353	70	1,02329306	95	1,04158462
21	1,00167875	46	1.00994297	71	1,02394715	96	1,04239136
22	1,00188281	47	1,01040154	72	1,02460834	97	1,04320308
23	1,00209804	58	1,01086929	73	1,02527652	98	1,04401978
24	1,00232438	49	1,01134601	74	1,02595162	99	1,94484131
25	1,00256173	50	1,01183168	75	1,02663360	100	1,04566765

Ich habe die Zahlen so hergesetzt, wie sie die Rechnung gegeben hat. Daſs aber die Werthe von V nicht in solcher Genauigkeit bestimmt werden können, als sie hier zur Schau ausgestellt sind, versteht sich wohl von selbst. Z. B. für $t = 60°$ wird man mit $V = 1{,}017$ zufrieden seyn können.

Würde ein Gefäſs von 33 Kubikfuſs mit Wasser von 4,4° angefüllt, dann dicht verschlossen und nun das Wasser bis zu 80° erwärmt, so müſste sich das Wasser um etwa 1 Kubikfuſs ausdehnen. Wäre *A Fig.* 110[d] ein solcher Kessel; *B C* ein damit zusammenhängender Cylinder mit einem beweglichen Kolben bei *B*, und der Cylinder $\frac{1}{3}$ Quadratfuſs oder 48 Quadratzoll weit, so müſste das anfänglich 4,4° warme Wasser, bei der Erwärmung bis zu 80° um 3′ steigen, die Ausdehnung des Kessels selbst bei Seite gesetzt.

§. 247[n].

Das Wasser erfordert bei jeder Temperatur eine unermeſsliche Kraft, um in einen nur merkbar kleineren Raum zusammengepreſst zu werden; und eine Kraft, mit der man das bis in *m* stehende 80° warme Wasser bis in *B* herab (um $\frac{1}{34}$ seines Volumens) zusammen zu drängen versuchen wollte, würde eher den Kessel zerreissen. Man muſs also auch die Expansivkraft des mit dem Wasser verbundenen Wärmestoffs, dessen Zutritt zum Wasser durch keinen äusseren Druck und durch keinen Zusammenhang der Theile (bekanntlich selbst beim Eisen nicht) verhindert werden kann, als unermeſslich groſs annehmen, so daſs auf solche Weise ungeheure Lasten erhoben werden könnten. Zu näheren Bestimmungen fehlt es noch an nöthigen Erfahrungen *).

§. 247[o].

Dämpfe, die aus siedendem Wasser aufsteigen, entwickeln sich mit einer Kraft, die den Druck, welchem der Wasserspiegel ausgesetzt ist, überwindet. Dieser Druck besimmt die Expansivkraft, welche, wenn die Dämpfe eine Temperatur von 80° Réaumur haben, mit einer 28 Par. Zoll hohen Quecksilbersäule, über welcher sich eine Torricellische Leere befindet, im Gleichgewicht ist. Die Temperatur der entwickelten Dämpfe hängt bei ihrer Entwickelung vom Wärmegrade des Wassers ab, und der höchste Wärmegrad, zu dem das Wasser gebracht werden kann, ist durch den Druck auf die Oberfläche des Wassers bestimmt, dessen Maaſs, wenn das Wasser der freien Luft ausgesetzt wird, die jedesmalige Barometerhöhe ist.

Die ersten hierüber mit Genauigkeit angestellten Versuche sind die von *Betancourt* in Memoire sur la force expensive de l'eau et de l'esprit de vin, Paris 1790, welche auch *Prony* in seiner neuen Aricht. hydraul. mitgetheilt hat. Dieselben Versuche hat Herr *Rit-*

*) Noch unzuverlässiger sind die Angaben der Physiker in Bezug auf die Ausdehnung *fester* Körper bei verschiedenen Wärmegraden. Man findet dergleichen a. a. O. S. 575 u. f.

ter v. Schmidt, Prof. der Mathem. und Phys. in Gieſsen, einer der genauesten Experimentatoren unserer Zeit, wiederholt. Ich stelle die Resultate dieser verschiedenen Versuche hier zusammen:

Wärmegrade nach 80 theiligem Quecksilberthermometer.	Höhe der Quecksilbersäule unter der Torricellischen Leere, welche mit der Expansivkraft der Wasserdämpfe im Gleichgewicht ist, in Pariser Zollen.		
	Nach Betancourts Beobachtung.	Nach v. Schmidts Beobachtung.	Nach der von Schmidt angegebenen Formel.
1°	0,00	0,00	1,00
10°	0,15	0,28	0,31
20°	0,65	0,90	0,92
30°	1,52	1,93	2,02
40°	2,92	3,64	3,80
50°	5,35	6,40	6,61
60°	9,95	10,98	10,98
70°	16,90	17,92	17,77
80°	28,00	28,00	28,00
90°	46,40	43,77	43,50
100°	71,80	67,00	66,47
110°	98,00	100,72	100,87

Die letzte Kolonne bezieht sich auf die höchst einfache Formel, welche *v. Schmidt* aus seinen Beobachtungen abgeleitet hat, nämlich

$$263.)\quad e = t^{1,4113+0,005\,.\,t}$$

Dabei ist e die Quecksilberhöhe unter der Torricellischen Leere, welche mit der Expansivkraft der Wasserdämpfe im Gleichgewicht ist, in Hunderttheilen eines Pariser Zolles.

t die Anzahl Grade, welche die Temperatur der Dämpfe nach einem 100 theiligen Quecksilberthermometer angiebt.

Die von *Prony* angegebene und von mir noch ergänzte Formel in meinem *Lehrbuch der Hydraulik* (XXI. Kap.) ist bei weitem verwickelter.

§. 247 P.

Erfahrungen bei Dampfmaschinen, wo der Wasseraufwand und die Anzahl von Hüben in 24 Stunden gegeben waren, leiteten mich schon im Lehrbuche der Hydraulik auf den Schluſs, daſs bei etwas weniger als 28 Zoll Barometerhöhe die Dichtigkeit der entwickelten Dämpfe, höchstens $= \frac{1}{1300}$ betragen könne, die des Wassers (bei mittler Temperatur $= 1$ gesetzt.)

Viel später vom *R. v. Schmidt* angestellte Versuche gaben ihm

Gewicht oder Dichtigkeit des Wassers $= 1$

der Luft $= \frac{1}{840}$

der Dämpfe $= \frac{1}{1470}$

Die Temperatur des zum Sieden genommenen Wassers und der Luft war 15° Réaum. Das Wasser kochte bei einer Barometerhöhe von 28 Par. Zollen. Meine und die von Schmidtsche bestätigen einander.

Weitere hierher gehörige Bestimmungen wird man im 2ten Bande bei den Dampfmaschinen finden.

§. 248.

Je feuchter die Luft ist, desto mehr wird sie durch einerlei Wärme ausgedehnt, also desto gröſser ihre Expansivkraft bei einerlei Wärmegrad. Die Expansivkraft einer mit Feuchtigkeit völlig gesättigten Luft wird, von der Gefrierkälte bis zur Siedhitze, bei 28″ Barometerhöhe, in einem verschlossenen Gefäſse erwärmt, in dem Verhältnisse 1 : 2,3574 nach *v. Schmidt* vergröſsert. Eben dieser treffliche und bescheidene Physiker theilt uns in Bezug auf die Aenderungen der Expansivkraft wegen der Feuchtigkeit noch die nachstehenden Resultate seiner Beobachtungen mit:

Wärmegrade nach dem 100 theiligen Quecksilber-Thermometer.	Feuchtigkeit.				
	20	40	60	80	100
	Volumen derselben Masse.				
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20°	1,0939	1,0994	1,1029	1,1074	1,1120
40°	1,1997	1,2207	1,2417	1,2627	1,2838
60°	1,3384	1,4087	1,4791	1,5494	1,6198
80°	1,5574	1,7374	1,9574	2.1574	2,3574

Diese Tafel giebt die Bestimmungen unter der Voraussetzung an, daſs die in 1 Kub. Fuſs Luft enthaltene Feuchtigkeit bei völliger Sättigung = 100 gesetzt wird.

§. 249.

Werkzeuge, welche die Menge der in der atmosphärischen Luft enthaltenen Feuchtigkeit anzugeben dienen, heiſsen *Hygrometer.* Eine mit Feuchtigkeit völlig gesättigte Luft, enthält nach *Saussure* bei 15° Réaumur, unter 100 Gran etwa 11 Gran Wasser; bei mittler Trockenheit und demselben Wärmegrade etwa 4 bis 5 Gran. *Manometer* dienen, die Aenderungen in der *Dichtigkeit* der Luft anzugeben. *Eudiometer* bestimmen die verhältniſsmäſsige Menge von *Lebensluft* in einer bestimmten Luftschichte.

§. 250.

Auſser der zahlreichen Menge von Lehrbüchern der Physik bemerke ich hier nur die nachstehenden besonders hierher gehörigen Schriften:

Mayer, über die Gesetze und Modifikationen des Wärmestoffs. Erlangen 1791.

Langsdorf, physisch-mathematische Abhandlung über Gegenstände der Wärmelehre, welche mit der Ausübung in der nächsten Verbindung stehen. Marburg 1796.

Lambert, Pyrometrie oder vom Maafse des Feuers und der Wärme. Berlin 1779.

Gren, Journal der Physik I., IV. u. VII. Bd.

v. Humbold, Bergm. Journal II. St. 1792.

v. Crell, Annalen, 1798. 6 St.

Schmidt, Abhandlung über die Expansivkraft etc. in *Grens* Journal d. Physik 4. Bd.

Desselben Phys. mathem. Abhandlungen.

Lambert, Hygrometrie, aus dem Franz. Augsburg 1774.

Saussure, Versuch über die Hygrometrie, aus dem Franz. Leipzig 1784.

De Luc, Idées sur la Météorologie.

Gehler, physikalisches Wörterbuch, wird jetzt neu bearbeitet.

Gilbert, Annalen der Physik I. B. 3. St. Halle 1799.

Langsdorf, Lehrbuch der Hydraulik.

VERBESSERUNGEN
in diesem Werke ersten Bandes erste Abtheilung.

Anmerk. Beim Abzählen sind die Paragraphen für eine Zeile gerechnet worden.

Seite 41, Zeile 3, v. o., statt: Tragheitsmoment, lies: Trägheitsmoment.

» 42, » 8, v. u., statt: *C*, lies: *C* (*Fig.* 31).

» 54, » 2, v. u., statt: $\frac{b}{B}$, lies: $\frac{b}{B} . c$

» 64, » 13, v. o., statt: *A, B, C, D*, lies: *A, B, C, D* gedruckt wird.

» 65, » 14, v. u., statt: *B* aus, lies: *B* aus III.

» 66, Formel 77 soll vor jeder einzelnen Formel stehen: Druck in.

» 69, Zeile 11, v. o., statt: $Cos. n \beta v$, lies: $Cos. n B v$.

» — » 12, v. u., $\genfrac{}{}{0pt}{}{A r}{A B}$, lies: $\frac{A r}{A B}$

» 137, » 5, v. u., statt: und daher, lies: und daher sind.

» 147, » 12, v. u., statt: *Fig.* 65, lies: *Fig.* 64.

» 148, » 1, v. u., statt: *Fig.* 64, lies: *Fig.* 65.

» 149, » 13, v. u., statt: $\delta \beta$, lies: $d \beta$.

» 165, » 2, v. o., statt: $-\frac{\zeta \eta}{\lambda k}- . \delta$ etc., lies: $\frac{\zeta \eta}{\lambda k} = \delta$ etc.

VOLLSTAENDIGES

REPERTORIUM

ZUM ERSTEN BANDE

ERSTE UND ZWEITE ABTHEILUNG DER MASCHINENKUNDE

NACH DER ORDNUNG DER PARAGRAPHEN.

I. Kapitel.

ALLGEMEINE DYNAMISCHE LEHREN.

§. 1. Allgemeine Begriffe von *Ruhe*, *Bewegung*, *Kraft*. — *Dynamik*.

§. 2. Begriff der Schwere — lothrechte Linien — wahre und scheinbare Horizontallinien und Horizontalflächen.

§. 3. Länge des Sekundenpendels — Tiefe des freien Falles in der ersten Sekunde.

§. 4. In wiefern die Schwere eine veränderliche Kraft ist. — Tafel für die Länge des Sekundenpendels in verschiedenen Entfernungen vom Aequator, nach *Gaufs*. — Einflufs des Umlaufs um die Sonne.

§. 5. *Beschleunigende* Kraft der Schwere.

§. 6. *Bewegende* Kraft, — Gewicht.

§. 7. Begriff von Druck und Stofs.

§. 8. Wesentlicher Unterschied zwischen Wirkung des Drucks und Wirkung des Stofses.

§. 9. Gleichförmige und ungleichförmige; gleichförmig- oder ungleichförmig-beschleunigte oder verzögerte Bewegung.

§. 10. Die drei Formeln

1.) $C = t \cdot c$

2.) $x = 2\,\mathfrak{g}$

3.) $C = t \cdot 2\,\mathfrak{g}$

in Bezug auf die Bewegung eines Körpers, in dessen Atome nach der Richtung der Bewegung eine beschleunigende unveränderliche Kraft so wirkt, dafs er, frei von allem Widerstande, in der ersten Sekunde den Raum $\mathfrak{g}$ durchlauft. Ist die wirkende Kraft unsere Schwere, so wird g statt $\mathfrak{g}$ geschrieben.

c bedeutet die Geschwindigkeit, welche der von der Kraft angegriffene Körper am Ende der ersten Sekunde erlangt hat.

C die Geschwindigkeit desselben am Ende der Bewegungszeit.

t die Bewegungszeit in Sekunden.
x die Gröfse der Geschwindigkeit c.
g ist $=$ 15,09 Pariser oder $=$ 15,625 rheinl. Fufs, wofür in der Folge auch oft die Zahlen 15,1 und 15,6 gesetzt werden.

§. 11. Die fünf Formeln

$$4.)\quad h = t^2 \cdot \mathfrak{g}$$
$$5.)\quad t = \sqrt{\frac{h}{\mathfrak{g}}}$$
$$6.)\quad t = \frac{C}{2\mathfrak{g}}$$
$$7.)\quad h = \frac{C^2}{4\mathfrak{g}}$$
$$8.)\quad C = \sqrt{4\mathfrak{g}h}$$

h bezeichnet den in der Zeit t vermöge einer gleichförmig beschleunigenden Kraft durchlaufenen Raum.
C, t, $\mathfrak{g}$ wie §. 10.

§. 12. Die acht Formeln

$$9.)\quad f = \frac{c}{C}$$
$$10.)\quad f = \frac{\mathfrak{g}}{g}$$
$$11.)\quad f = \frac{\mathfrak{h}}{h}$$
$$12.)\quad f = \frac{h}{\mathfrak{h}}$$
$$13.)\quad C' - c = 2fg \cdot t'$$
$$14.)\quad dc = 2fg \cdot dt$$
$$15.)\quad f = \frac{d\mathfrak{H}}{dH}$$
$$16.)\quad f = \frac{dH}{d\mathfrak{H}}$$

f die Gröfse der beschleunigenden Kraft, wenn die unserer Schwere $=$ 1 gesetzt wird.
c die durch die Kraft f in einer bestimmten Zeit (t) erlangte Geschwindigkeit.
C die in derselben Zeit durch unsere Schwere erlangte Geschwindigkeit.
$\mathfrak{g}$, g wie §. 10.
$\mathfrak{h}$ der wegen der Kraft f in der Zeit t durchlaufene Raum.
h der wegen der Schwerkraft in der Zeit t durchlaufene Raum.
C' die in der Zeit $t + t'$ bei der Kraft f erlangte Geschwindigkeit.
$\mathfrak{H}$ der in der Zeit $t + t'$ vermöge der Kraft f durchlaufene Raum.
H der in der Zeit $t + t'$ vermöge der Schwere durchlaufene Raum.

dt (das Differential der zur Bewegung verwendeten Zeit) ein unermefslich kleines Zeittheilchen, in welchem, wenn gleich eine stetig-veränderliche beschleunigte Kraft wirkt, die Kraft doch als unveränderlich angesehen werden kann.
dc die dem Zeittheilchen dt entsprechende unermefslich kleine Aenderung der Geschwindigkeit c, das Differential von c.
$d\mathfrak{H}$ das in dem Zeittheilchen dt vermöge der Kraft f durchlaufene Raumtheilchen.
dH das in dem Zeittheilchen dt vermöge der Schwerkraft durchlaufene Raumtheilchen.

§. 13. Die Formel

$$17.)\quad v = \frac{h}{f} = \frac{C^2}{4fg} = \frac{C^2}{4\mathfrak{g}}$$

v der Raum, welchen ein Körper bis zum völligen Stillstande durchlaufen mufs, wenn er seine Bewegung mit der Geschwindigkeit C anfängt, und eine verzögernde Kraft f ihm in der Richtung seiner Bewegung entgegen wirkt.
g, $\mathfrak{g}$ wie §. 10.

§. 14. Die Formeln

$$18.)\quad f = \frac{p}{P};\qquad \mathfrak{g} = \frac{p}{P} \cdot g.$$

f wie §. 12.
$\mathfrak{g}$, g wie §. 10.
P die Summe aller einzelnen Eindrücke, welche unsere Schwerkraft in einen Körper macht (sein Gewicht).

p die Summe aller einzelnen Eindrücke, welche eine andere Kraft f in denselben Körper macht. Die *Richtung* der Wirkung ist hierbei gleichgiltig.

§. 14*. Die Formel für aus Kreisbewegung entstehende Schwungkraft

$$18.^{*}) \quad p : 1 = 2v : r \quad \text{oder } p = \frac{2v}{r}$$

r der Halbmesser eines Kreisbogens, in welchem ein Körpertheilchen herumlauft.
v die Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit des Körpers zugehört (§. 11).
p die beschleunigende Kraft, welche das Körpertheilchen vom Mittelpunkt des Bogens zu entfernen strebt, die der Schwere = 1 gesetzt. Diese Kraft heiſst die *Zentrifugalkraft*.

§. 14**. Der Satz (No. 18*) giebt auch

$$18^{**}.) \quad p = \frac{c}{2gr} \cdot c$$

Die Entfernung vom Umlaufspunkte bis zum Schwerpunkte des Körpers ist der *Halbmesser des Schwungs* für den ganzen Körper

§. 14***. Begriff von *Schwungkräften überhaupt.* — *Zentrifugalkraft*, *Zentripetalkraft*, *Normalkraft*, *Tangentialkraft*.

§. 15. Die Formel für das Verhältniſs der *Bewegungsmomente*

$$19.) \quad B : b = \mathfrak{P} \cdot C : \mathfrak{p} \cdot c$$

$\mathfrak{P}$ die Masse eines bewegten Körpers, die durch die Gröſse ihres Gewichts ausgedrückt werden kann.
$\mathfrak{p}$ die eines andern bewegten Körpers, die dann gleichfalls durch ihr Gewicht ausgedrückt wird.
B das Bewegungsmoment von $\mathfrak{P}$.
b das Bewegungsmoment von $\mathfrak{p}$.
C die Geschwindigkeit von $\mathfrak{P}$.
c die Geschwindigkeit von $\mathfrak{p}$.
In der Note vom *Cartesischen* und *Leibnitzischen* Kräftenmaaſse.

§. 16. Die vier Formeln für die Wirkung des Stoſses *harter* Körper.

$$20.) \quad (M + m) \cdot \mathfrak{C} = MC - mc$$

$$21.) \quad \mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M + m}$$

$$21^{*}.) \quad \mathfrak{C} = \frac{M}{M + m} \cdot C, \text{ wenn } m \text{ vor dem Stoſse in Ruhe ist.}$$

$$22.) \quad \mathfrak{C} = \frac{MC + mc}{M + m}.$$

M eine Masse; C ihre Geschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung.
m eine andere, c ihre Geschwindigkeit nach einer Richtung, die der C entgegengesetzt ist.
$\mathfrak{C}$ die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Massen nach dem Stoſse.

§. 17. Begriff der *Trägheit.*

§. 18. Begriff der *Elasticität.* Für *elastische* Körper ist

$$23.) \quad \mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M + m} - \frac{m}{M + m} \cdot (C + c)$$

$$\mathfrak{C}' = \frac{mc - MC}{m + M} - \frac{M}{m + M} \cdot (c + C)$$

M, m, C, c, wie §. 16.
$\mathfrak{C}$ die Geschwindigkeit von M nach dem Stoſse.
$\mathfrak{C}'$ die Geschwindigkeit von m nach dem Stoſse.

§. 19. Rechnungsbeispiele zu diesem Kapitel. Hier noch die Formeln für *unvollkommen* elastische Körper.

$$24.)\quad \mathfrak{C} = \frac{MC - mc}{M + m} - \frac{m}{M + m} \cdot E \cdot (C + c)$$

$$25.)\quad \mathfrak{C}' = \frac{mc - M\mathfrak{C}}{m + M} - \frac{M}{m + M} \cdot E \cdot (C + c)$$

$$26.)\quad E = \frac{MC - mc - (M + m) \cdot \mathfrak{C}}{m \cdot (C + c)}$$

E bezeichnet die Elasticität des elastischeren Körpers, die vollkommene Elasticität $=1$ gesetzt. $M, m, C, c, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ wie §. 18.

$$27.)\quad E = \frac{\mathfrak{C}}{C}; \qquad 28.)\quad E = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos\beta}}$$

Zu Versuchen mit Pendeln, die mit $M = m$ und $C = c$ gemacht werden, wo α den Erhebungs- und β den Rückprellungswinkel nach dem Stoſse bezeichnet, und beide am Pendel befindliche Körper von einerlei Art sind, also *gleiche* aber *unvollkommene* Elasticität E haben, deren Gröſse durch solche Versuche gefunden wird.

II. Kapitel.

AEQUIVALENTE BEWEGENDE KRAEFTE. DAS KRAEFTEN-PARALLELOGRAMM, DIE SCHIEFE EBENE UND DER HEBEL.

§. 20. Aus der Formel (No. 18.) findet man $f = \frac{P - p}{\mathfrak{P}}$.

P die Summe von Eindrücken, welche allen Atomen eines Körpers, dessen Masse $\mathfrak{P}$ ist, nach parallelen Richtungen mitgetheilt werden.

p die Summe von Eindrücken, welche denselben Atomen nach entgegengesetzten parallelen Richtungen eingeprägt werden.

f die aus diesen entgegengesetzten Kräften entstehende beschleunigende Kraft, welcher der Körper nach der Richtung der gröſsern bewegenden Kraft folgen muſs.

§. 21. Gleiche entgegengesetzte Kräfte können den Zustand eines Atoms nicht abändern.

§. 22. Es ist gleichgiltig, in welchem Punkte der geraden Linie, nach welcher eine Kraft wirkt, diese Kraft angebracht wird.

§. 23. Wenn in einer Ebene MN (*Fig.* 3), welche keiner andern Bewegung als einer Umdrehungsbewegung um den unverrückbaren Punkt C fähig ist, Kräfte nach ma und ng wirken, so kann die Ebene nur dann in Ruhe bleiben, wenn $Cd \times P = Cf \times p$ ist.

§. 24. Verzeichnung des *Kräftenparallelogramms.*

§. 25. Wenn in einer Ebene MN (*Fig.* 5) Kräfte P, p nach as und aq wirken, die Ebene aber nur einer Umdrehungsbewegung um einen bestimmten Punkt m fähig ist, so bleibt die Ebene in Ruhe oder die Kräfte erhalten einander im Gleichgewicht, wenn

$$29.)\quad p \cdot km = P \cdot gm \quad \text{ist.}$$

§. 26. Begriff vom *mathematischen Hebel.*

§. 27. *Statisches Moment* einer Kraft am Hebel — *Drehkraft.* Gleiche entgegengesetzte Drehkräfte erhalten den Hebel in Ruhe.

§. 28. *Mittlere Richtung* des Drucks. *Mittelpunkt* des Drucks.

§. 29. Die äufsere Form der Hebelärme hat keinen Einflufs auf das Gesetz des Gleichgewichts.

§. 30. Mannichfaltige Kräfte O, P, Q, R seyen an einer Hebellinie $a\,b$ (*Fig.* 15.), die sich nur um einen unverrückbaren Punkt (m) drehen kann, nach gegebenen Richtungen, welche mit der Hebellinie in einerlei Ebene liegen und mit derselben die Winkel α, δ, ε, η bilden, angebracht; man soll die Stelle m bestimmen, welche unterstützt werden mufs, um die Hebellinie in Ruhe zu erhalten. Ihre Entfernung von a ist

$$30.)\quad m\,a = \frac{ca\,.\,P\,.\,\mathrm{Sin}\,\delta + da\,.\,Q\,.\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + ba\,.\,R\,.\,\mathrm{Sin}\,\theta}{O\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha + P\,.\,\mathrm{Sin}\,\delta + Q\,.\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon + R\,.\,\mathrm{Sin}\,\theta}$$

§. 31. Sind die Richtungslinien aller Kräfte O, P, Q, R an einer Hebellinie $a\,b$ unter einander gleichlaufend, so hat man für das Gleichgewicht

$$31.)\quad ma = \frac{ca\,.\,P + da\,.\,Q + ba\,.\,R}{O + P + Q + R}$$

Begriff des *Schwerpunkts:*

§. 32. Jeder Körper hat einen Schwerpunkt d. h. einen Punkt, bei dessen lothrechter Unterstützung die Drehkräfte aller Körpertheilchen, welche von den Eindrücken der Schwere herrühren, einander im Gleichgewicht erhalten.

§. 33. Zur vollständigen Ruhe eines unterstützten Körpers ist ausser der Verhinderung der Umdrehungsbewegung auch noch Sicherung gegen das Verschieben nothwendig.

§. 34. Bildung der Kettenlinie, wie $a\,m\,b$ (*Fig.* 18.). Hier die Formeln

$$32.)\quad z = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,.\,\sqrt{\left(1 + \frac{a^2 - \lambda^2}{a^2}\,.\,\mathrm{Cot}\,\alpha^2\right)}$$

$$33.)\quad x = \frac{\tfrac{1}{2}(a^2 - \lambda^2) - az\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha^2}{\frac{a^2 - \lambda^2}{a} + a\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha^2}$$

Zur Beantwortung der Frage:

Wenn eine völlig beugsame Kette oder Schnur mit ihren beiden Enden in a und b (*Fig.* 19) befestigt, und ihre ganze Länge $= M\,N$ ist, so dafs $a\,M = b\,N$ genommen wird, dafs also die in dieser Zeichnung nicht angedeutete Schnur von a und b wie *Fig.* 18 herabhängt, und wenn nun unterhalb b etwa eine Laterne mit einem Ring so an der Schnur eingehängt wird, dafs sie an derselben ungehindert herabgleiten kann: an welcher Stelle wird sie ruhig hängen bleiben?

Diese Stelle liegt in der horizontalen $m\,n$, wenn man die $Mm = z$ nach No. 32 nimmt. Dabei ist

a die ganze Schnurlänge.
λ die Entfernung $a\,b$.
α der Winkel $b\,m\,n$.

Um die bestimmte Stelle in der $m\,n$ anzugeben, dient No. 33, womit wir $Me = x$ finden; das Perpendikel $e\,k$ durchschneidet die horizontale $m\,n$ in der gesuchten Stelle k.

§. 35. Um den Schwerpunkt eines Prisma zu finden, darf man nur den Schwerpunkt eines Dreiecks wissen, in dem man alle Punkte als schwer betrachtet.

§. 36. Die Schwerpunktsformel für Dreiecke

$$34.)\quad \left.\begin{array}{l} ak = \tfrac{2}{3}\,ad \\ ck = \tfrac{2}{3}\,ce \end{array}\right\}$$

Fig. 20. ad theilt die $b\,c$; ce — die $a\,b$, in zwei gleiche Theile.

§. 37. Ein allgemeiner Ausdruck zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts k (*Fig.* 21) gegen die Schenkel eines willkührlich gelegten rechten Winkels $C\,A\,B$.

$$35.)\quad \begin{cases} k\lambda = \dfrac{m\alpha \,.\, A + h\zeta \,.\, B + g\beta \,.\, C}{A + B + C} \\ k\tau = \dfrac{m\gamma \,.\, A + h\varepsilon \,.\, B + g\delta \,.\, C}{A + B + C} \end{cases}$$

Dabei bezeichnen A, B und C die Flächen der Dreiecke dae, dac und cab.

§. 38. Formel für den Schwerpunkt a eines Bogens DAE (*Fig.* 22).

$$36.)\quad Ca = \frac{DE}{DAE} \,.\, CA$$

Ex. Es sey Winkel $DCE = 60°$, $CA = 3'$, so ist $DE = 3'$, $DAE = \frac{1}{6} . 3{,}14 . 6' = 3{,}14'$ und $Ca = \dfrac{3}{3{,}14} \,.\, 3' = 2{,}866'$.

§. 39. Für den Schwerpunkt v des Kreisausschnitts $CDAEC$ die Formel

$$37.)\quad Cv = \frac{DE}{DAE} \,.\, \tfrac{2}{3}\, CA \text{ (Fig. 23).}$$

§. 40. Für den Schwerpunkt v eines Ringflächenstücks $DAEead$ die Formel

$$38.)\quad Cv = \frac{Cw \,.\, \mathfrak{K} - Cz \,.\, \mathfrak{k}}{\mathfrak{K} - \mathfrak{k}} \text{ (Fig. 24).}$$

$\mathfrak{K}$ die Fläche des Kreisausschnitts $CDAEC$
$\mathfrak{k}$ die Fläche des Kreisausschnitts $CdaeC$
Für den Schwerpunkt t des Kreisabschnitts $DAED$ die Formel

$$39.)\quad Ct = \frac{Cw \,.\, \mathfrak{K} - Cz \,.\, \mathfrak{k}}{\mathfrak{K} - \mathfrak{k}}$$

$\mathfrak{k}$ die Fläche des Dreiecks CDE.
$\mathfrak{K}$ wie No. 38.
z der Schwerpunkt von $\mathfrak{k}$.

§. 41. Formel für den Schwerpunkt eines Kegels v (*Fig.* 25).

$$40.)\quad av = \tfrac{3}{4}\, ad$$

So auch für alle Pyramiden.

§. 42. Begriff der schiefen Ebene. *Fig.* 26.

§. 43. Für die Wirkungen der Schwere bei Körpern auf einer schiefen Ebene (*Fig.* 27) die Formeln für die Bedingung des Gleichgewichts.

$$41.)\quad I.\ P = M \,.\, \mathrm{Sin}\ a;\quad II.\ S = M \,.\, \mathrm{Cos}\ a;\quad III.\ \mathfrak{P} = M \,.\, \mathrm{tang}\ a$$

M das Gewicht eines Körpers.
P sein Streben abzugleiten.
S sein senkrechter Druck auf die schiefe Ebene.
$\mathfrak{P}$ die Gröſse der zur Verhinderung des Abgleitens erforderlichen horizontal angebrachten bewegenden Kraft nach vu.
a der Neigungswinkel der schiefen Ebene.

§. 44. Die vorstehenden Formeln (No. 41.) gelten allgemein von den Wirkungen einer bewegenden Kraft M, welche auf die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreiecks in senkrechter Richtung auf seine Grundlinie angebracht ist, daher von jeder Kraft, welche unter einem schiefen Winkel gegen eine Ebene gerichtet ist. Auf die Reibung ist hierbei keine Rücksicht genommen. S. unten §. 258.

III. Kapitel.

AEQUIVALENTE MASSEN IN BEZUG AUF BESCHLEUNIGENDE KRAEFTE. — TAEGHEITSMOMENTE. — ANWENDUNGEN AUF UNGLEICHFOERMIGE BEWEGUNGEN.

§. 45. Wiederholung schon vorgekommener Formeln

$$f = \frac{P - p}{P + p}\,; \qquad \mathfrak{g} = f \cdot g; \qquad \mathfrak{h} = t^2 \cdot \mathfrak{g}; \qquad c = t \cdot 2\mathfrak{g}$$

§. 46. Formel für die beschleunigende Kraft f, mit welcher eine Masse P an einer um eine Scheibe vom Halbmesser R gelegten Schnur niedersinkt, wenn am Umfange einer andern um dieselbe Welle gelegten Scheibe eine Masse p an einer herabhängenden Schnur entgegen zieht

$$42.)\quad f = \frac{P - \frac{r}{R} \cdot p}{P + X}$$

$X = \frac{r^2}{R^2} \cdot p$ die auf die Entfernung R von der Axe reducirte Masse p.

Auch ist

$$43.)\quad X = \frac{c^2 \cdot q}{C^2}$$

q eine Masse, die vermöge einer bestimmten bewegenden Kraft, welche in einer bestimmten Entfernung von der Umdrehungsaxe angebracht ist, mit der Geschwindigkeit c in Bewegung gesetzt ist.

X eine Masse, die an einer Stelle, der die gleichzeitige Geschwindigkeit C zukommt, angebracht, in Bezug auf die Kraft, der Masse q ganz äquivalent wäre, so daſs die Bewegung des von der Kraft angegriffenen Punktes ganz dieselbe bleiben muſs, ob sie in die Masse q oder in die X wirkt, wofern sich die Geschwindigkeiten von q und von X wie c und C verhalten.

Es versteht sich, daſs hier blos von Veränderung der *Massen* die Rede ist. Die Bewegungskraft, durch welche die verschiedenen Massen q und X in Bewegung gesetzt werden, muſs dabei ungeändert bleiben.

Die Producte $c^2 \cdot q$, $C^2 \cdot X$ heiſsen *Trägheitsmomente.*

Die reducirte äquivalente Masse ist

$$44.)\quad X = \frac{c^2 \cdot q}{C^2}.$$

Daher

§. 47.

$$44.^*)\quad f = \frac{P - \frac{r}{R} \cdot p}{P + \frac{r^2}{R^2} \cdot p}$$

wenn P und p zugleich als Gewichte wirken. Das Trägheitsmoment eines um eine Axe sich drehenden Körpers ist die Summe der Produkte aller Körpertheilchen in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe, wo dann die materiellen Theilchen auch als Gewichtchen gedacht werden können.

§. 48. Hier die Formel

45.) Trägheitsmoment eines Cylinders $= r^2 \cdot \frac{1}{2} K$ (*Fig.* 32)

r der Halbmesser des Cylinders.
K sein kubischer Inhalt oder auch sein Gewicht.

§. 49. Hier

46.) Trägheitsmoment eines Ringes oder hohlen Cylinders $= \frac{1}{2} \pi \lambda \cdot (R^4 - r^4)$ (*Fig.* 33.)

R der Halbmesser des äußeren Umfangs.
r der des inneren.
λ die Dicke des Rings oder Länge der Axe.

§. 49*. Die Formel für

47.) Das Trägheitsmoment eines rechtwinklichten Parallelepipedums $= \frac{1}{3} h b l \cdot (l^2 + b^2)$. (*Fig.* 34).

b die Breite der Grundfläche; l die Länge.
h die Höhe zwischen beiden Grundflächen.
Die Umdrehungsaxe (mn) geht durch eine von den Kanten, deren Höhe h ist.

Auch 48.) $= \frac{1}{3} K \cdot (l^2 + b^2)$

K der kubische Inhalt des Parallelepipedums. Anwendung auf eine andere parallele Axe. (*Fig.* 35.)

§. 50.

49.) Das Trägheitsm. eines gegen die Umdrehungsaxe schief stehenden prism. Körpers (*Fig.* 36).

§. 51. Trägheitsmomente verschiedener Massen X, q eines zusammenhängenden Systems, dessen mannichfaltige Theile gleichzeitig in bestimmten Geschwindigkeitsverhältnissen in Bewegung gesetzt werden, lassen sich allemal durch Produkte ausdrücken, die sich wie $C^2 \cdot X$ und $c^2 \cdot q$ verhalten, wenn C, c die Geschwindigkeiten von X, q sind. Daher die Anwendung auf die Bewegung des Wassers, welches mit einer bestimmten bewegenden Kraft durch den Druck eines Kolbens in Bewegung gesetzt wird. Hierher gehören die Formeln

50.) $$f = \frac{P - HW}{\left(h - \frac{1}{2}b + \frac{W}{w} \cdot \lambda\right) \cdot W} = \frac{\frac{P}{W} - H}{h - \frac{1}{2}b + \frac{W}{w} \cdot \lambda} \quad (Fig.\ 37).$$

51.) $$f = \frac{\mathfrak{H} - H}{h + \frac{W}{w} \cdot \lambda - \frac{1}{2}b}$$

52.) $$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{H} - H}{h + \frac{W}{w} \cdot \lambda - \frac{1}{2}b} \cdot g$$

53.) $$b = \frac{t^2 \cdot w \cdot g \cdot (\mathfrak{H} - H)}{W \cdot \lambda}$$

54.) $$\mathfrak{H} = H + \frac{b \cdot W \cdot \lambda}{t^2 \cdot w \cdot g}$$

55.) $$P = H \cdot W + \frac{b \cdot W \cdot \lambda}{t^2 \cdot w \cdot g} \cdot W$$

P die bewegende Kraft, welche auf den Kolben k wirkt.
H die Höhe des Wassers in der Steigröhre über dem mittleren Stande des Kolbens in seinem Niedergange.
W die Weite der Kolbenröhre oder Grundfläche des Kolbens.
h die Höhe von der tiefsten Stelle der Steigröhre (ihrem Mittelpunkte) bis zur höchsten Stelle des Kolbens (an seiner Grundfläche).
b der ganze Weg, den der Kolben bei einem Schube durchlauft.
w der innere Querschnitt oder die Weite der gleichweiten Steigröhre.
λ die ganze Länge der Steigröhre.
t die Zeit eines Kolbenschubs, in welcher der Kolben von der höchsten bis zur tiefsten Stelle geschoben wird.
g die bekannte Fallhöhe 15,09 Par. oder 15,625 rhl. Fuſs.

§. 52. Wenn in einem Systeme von Massen und Kräften, wo die von der Kraft P angegriffene Stelle in einer bestimmten Zeit den Raum B durchlauft, die von der Last Q angegriffene in derselben Zeit nach der Richtung des Widerstandes den Raum b durchlaufen muſs, so ist für gleichförmige Bewegung

$$P = \frac{b}{B} \cdot Q$$

Aber, wo beschleunigte Bewegung eintreten muſs

$$56.)\quad P = \frac{b}{B} \cdot Q + V$$

wo V die erforderliche Ueberwucht ist.

§. 53. Allgemeinere Bestimmung zur Ergänzung des §. 16. für die Geschwindigkeit nach dem Stoſse.

$$57.)\quad \mathfrak{C} = \frac{\left(\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} \cdot M\right) \cdot c}{\mathfrak{M} + \frac{dv^2}{dx^2} M + m + \frac{dw^2}{dy^2} \cdot \mu} \quad (Fig.\ 38^d).$$

c ist die Geschwindigkeit, mit der die an vx befestigte Masse $\mathfrak{M}$, bei ihrer Umdrehung um die Stelle d, an die Masse m anschlägt.
$\mathfrak{C}$ die Geschwindigkeit, mit der die Masse $\mathfrak{M}$ ihre Geschwindigkeit nach dem Stoſse fortsetzt.
M, μ sind Massen an den andern Enden der Hebellinien.
$\frac{dv}{dx}$ und $\frac{dw}{dy}$ sind Geschwindigkeitsverhältnisse.

§. 54. Die für Maschinen ungleichförmigen Beharrungsstandes wichtigen Formeln

$$58.)\quad c = \frac{\Pi}{\Pi + \Sigma} \cdot C$$

$$59.)\quad \frac{b}{B}\, C = \frac{\frac{B}{b} \cdot P - Q}{\Sigma} \cdot 2\, t\, g$$

$$60.)\quad b = \frac{2t^2 g\, \Pi \cdot \left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right)}{(\Pi + \Sigma) \cdot \Sigma} + \frac{\left(\frac{B}{b} \cdot P - Q\right) \cdot t^2 g}{\Pi + \Sigma}$$

§. 55.

$$61.)\quad P = \frac{b}{B} \cdot \left(Q + \frac{\Sigma \cdot (\Pi + \Sigma) \cdot b}{t^2 g \cdot (2\,\Pi + \Sigma)}\right)$$

$$62.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \cdot (\Pi + \Sigma) \cdot b}{t^2 g \cdot (2\,\Pi + \Sigma)}$$

Wäre Σ in Vergleichung mit Π unbedeutend, so wäre genau genug

$$63.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \,.\, \Pi \,.\, b}{t^2 g \; 2\Pi} = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \,.\, b}{2t^2 g}$$

Wäre aber Π gegen Σ unbedeutend, so kätte man beinahe

$$64.)\quad V = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \,.\, \Sigma \,.\, b}{t^2 g \; \Sigma} = \frac{b}{B} \cdot \frac{\Sigma \,.\, b}{t^2 g}$$

Π die auf den Lastpunkt reducirte Gröſse der beim Gange der Maschine in beständiger Bewegung bleibenden Massen.

Σ die periodisch jedesmal nach t Sekunden von Neuem aus der Ruhe in Bewegung zu setzende Masse, gleichfalls auf den angenommenen Lastpunkt reducirt.

b der Weg des Lastpunktes in den t Sekunden.

C die Geschwindigkeit des Kraftpunktes im letzten Augenblick vor dem neuen Angriffe.

$\frac{b}{B} \,.\, C$ die gleichzeitige Geschwindigkeit des Lastpunktes.

c die Geschwindigkeit des Kraftpunktes im ersten Momente nach dem Stoſse oder nach Ergreifung der neuen Masse.

$\frac{b}{B} \,.\, c$ die gleichzeitige Geschwindigkeit des Lastpunktes.

V die zur Unterhaltung der wechselnden Bewegung erforderliche Ueberwucht.

§. 56. Die Formeln

Nro. 65.) bis Nro. 72.)

welche höchst seltenen Gebrauch haben.

IV. Kapitel.

ANWENDUNG DER LEHRE VOM HEBEL AUF DIE WIRKUNG DES DRUCKS BEI MEHREREN UNTERSTUEZZUNGSPUNKTEN.

§. 57. Ein parallelepipedischer Balken sey in verschiedenen Entfernungen von seinem Schwer- oder Mittelpunkte, die hier mit α, β, γ bezeichnet werden, unterstützt; werden nun die Pressungen, die er vermöge seines Gewichts in diesen Entfernungen auf die Unterlager ausübt, mit P, Q, S bezeichnet, und sein ganzes Gewicht mit R, so hat man

$$73.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \\[2ex] Q = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \\[2ex] S = \dfrac{\alpha\beta}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta} \,.\, R \end{cases}$$

§. 58. Ist der Balken in 4 Entfernungen von seinem Mittelpunkte α, β, γ, δ unterstützt, und werden die Pressungen, die er vermöge seines Gewichts auf die 4 Unterlager ausübt, mit A, B, C, D bezeichnet, und sein ganzes Gewicht mit R, so ist

$$74.)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} . R \quad (Fig.\ 39). \\ B &= \frac{\alpha\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} . R \\ C &= \frac{\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} . R \\ D &= \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta} . R \end{aligned} \right.$$

§. 59. Werden die 3 Perpendickel aus den 3 Spitzen eines Dreiecks mit a, b, c bezeichnet, und nun aus irgend einem Punkte in dem Dreieck Perpendikel auf dieselben Seiten mit α, β, γ, bemerkt so ist allemal

$$75.)\quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1. \quad (Fig.\ 40.).$$

§, 60. Zur Bestimmung des Drucks einer in 4 Punkten unterstützten Fläche die Formel

Nro. 76.) (*Fig.* 41.).

§. 61. Die bisher gebrauchte Voraussetzung *völliger Steifigkeit* von Linien und Flächen ist auf Balken, Platten u. d. gl. ganz unanwendbar. Daher hier ganz andere Berechnungen eintreten.

Nro. 77.) (*Fig.* 42.).

§. 62. Wenn eine Anzahl von Arbeitern einen Balken tragen, wie viel trägt Jeder? — läſst sich nicht beantworten.

§. 63. Bestimmung des Drucks, den eine auf Pfählen ruhende Last auf jeden Pfahl ausübt.

§. 64. Verschiedene Erscheinungen des Drucks, wenn ein Körper sich unter einem schiefen Winkel gegen eine lothrechte Wand anlehnt, die über das obere Ende des Körpers hervorragt.

Nro. 78.) 79.) 80.) und 81.) (*Fig.* 43.).

§. 65. Wie diese Erscheinungen sich ändern, wenn der angelehnte Balken über den oberen Rand der Wand hinaus geht.

Nro. 82.) und 83.)

V. Kapitel.

VERSCHIEDENE ARTEN VON KRAEFTEN, WELCHE UNS DIE NATUR ZUM GEBRAUCHE BEI MASCHINEN DARBIETET.

§. 66. Die Schwere, die Muskelkraft, die Stoſskraft, die Expansivkraft und die Centrifugalkraft.

§. 67. *I.* Die *Schwere.* Specifische Gewichte hierher gehöriger Materien.

§. 68. Tafel zur Vergleichung verschiedener landüblicher Gewichte. Auch d. neufranzösische Gewicht.

§. 69. Vergleichungstafel verschiedener Fuſsmaaſse.

§. 70. *II.* Die *Muskelkraft* belebter Geschöpfe. Unmöglichkeit einer allgemeinen Bestimmung. Formeln von *Bouguer* und von *Euler*. *Coulomb's* Bestimmung des Maximums von *Tragkraft für mittelmäſsige Arbeiter*. Des Verfassers Formel *beym Tragen* auf *horizontalem* Wege.

$$84.)\quad p = 120 . (1 - \tfrac{1}{5} c) \quad \text{Cöll. ℔.}$$

c die Geschwindigkeit in rheinl. Fuſsen.

p die Kraft, deren ein des Gehens und Tragens gewohnter mittelmäſsiger Arbeiter fähig ist, so daſs er diese Anstrengung 9 Stunden lang *täglich* (in 24 St.) aushalten kann. Es ist also auch p die zu tragende Last.

§. 71. Steigt der Weg unter dem Winkel α, so wird

$$85.)\quad p = 120 \,.\, (1 - \frac{1}{5} c - 2\, Sin\, \alpha)\ \text{℔}.$$

Geht der Fuſsgänger leer, so wird in rheinl. Fuſsen

$$86.)\quad c = 5 \,.\, (1 - 2 \,.\, Sin\, \alpha);\quad Sin\, \alpha = 0{,}5 - 0{,}1 \,.\, c$$

Eine Beobachtung von *Wesermann*. Auch allgemein

$$87.)\quad c = 5 - (0{,}0416 \,.\, p + 10 \,.\, Sin\, \alpha)$$

Die Bedeutung der Buchstaben wie §. 70.

§. 72. Für das Maximum des Effekts $p \,.\, c$ wird

$$88.)\quad c = 2{,}5 - 5 \,.\, Sin\, \alpha = 5 \,.\, (0{,}5 - Sin\, \alpha)$$

$$89.)\quad p = 24 \,.\, (2{,}5 - 5 \,.\, Sin\, \alpha)$$

§. 73. In gewissen Fällen hängt der gröſste Effekt des Arbeiters im Gehen davon ab, daſs $c \,.\, (Sin\, \alpha - Sin\, \varphi)$ bei einem unveränderlichen Werthe von φ ein Maximum werde. Dann ist

$$90.)\quad Sin\, \alpha = 0{,}25 + 0{,}5 \,.\, Sin.\, \varphi \,.$$

$$91.)\quad c = 2{,}5 - 5 \,.\, Sin\, \varphi \,.$$

§. 74. Brauchbarkeit der vorstehenden Formeln; Unanwendbarkeit der Berechnungen von *Coulomb*.

§. 75. *Druck- und Zugkraft bei Menschen*. *Regnier's* Beobachtung der *absoluten* Kraft. Eine Beobachtung über die *relative* von *Lesage*; eine davon sehr verschiedene von *Perronet*. Noch gröſser als *Lesage* fand sie *Belidor*. Gröſste absolute Geschwindigkeit eines Menschen nach *Borgnis* = 3 Meter.

§. 76. Für die Zugkraft eines mittelmäſsigen Arbeiters

$$92.)\quad p = \varepsilon \,.\, 80 \,.\, (1 - \frac{1}{5} c - 2 \,.\, Sin.\, \alpha) \,.$$

Dabei $\varepsilon = 1 - 0{,}005 \,.\, \tau^2$

τ Die Zeitdauer der Anstrengung (in 24 St.) in Sekunden ausgedruckt, z. B. $\tau = 32400$ bei 9stündiger Anstrengung.

p, c, $Sin\, \alpha$ wie §. 70.

Hierher gehörige Beobachtungen über angewendete Kraft von *Schulze*; dergleichen von demselben über Geschwindigkeit. Eine Tafel nach des Verfassers Berechnung mit Rücksicht auf angewendete Zugkraft, auf Gröſse der Anstrengung und auf Geschwindigkeit. Noch die Formeln

$$93.)\quad c = 5 \,.\, (1 - 2 \,.\, Sin\, \alpha)\ \text{für}\ p = 0$$

$$94.)\quad c = 5 - \left(\frac{0{,}063}{\varepsilon} \,.\, p + 10 \,.\, Sin\, \alpha\right)$$

$$95.)\quad c = 2{,}5 - 5 \,.\, Sin.\, \alpha\ \text{für das Maximum, wenn}\ p = 0\ \text{ist.}$$

$$96.)\quad p = \varepsilon \,.\, 16 \,.\, (2{,}5 - 5 \,.\, Sin.\, \alpha)\ \text{für das Maximum des Effekts.}$$

§. 77. Wirkung menschlicher Kräfte bei ungleichförmigen Bewegungen

$$97.)\quad p = \mathfrak{P} \,.\, \left(\frac{h}{t^2 g} + 1{,}06\right);\quad g = 15{,}625\ \text{rheinl. F.}$$

$$98.)\quad \begin{cases} \mathfrak{C} = 2tfg \\ \mathfrak{C} = \dfrac{2h}{t} \end{cases}$$

$$99.)\quad \mathfrak{C} = \frac{p - 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \,.\, 2t\, g$$

h die Tiefe des Zugs
t die dazu verwendete Zeit in Sekunden.
$\mathfrak{P}$ das Gewicht der aufzuziehenden Masse, soviel davon auf *einen* Arbeiter fällt.
p die zum Zuge nöthige Kraft, wenn der Angriffspunkt am Zugseile in t Sekunden h Fuſse tief niedergezogen werden soll.
$\mathfrak{C}$ die Geschwindigkeit am Ende des Hubes;
$\frac{1}{2}\,\mathfrak{C}$ ist dann die mittlere Geschwindigkeit, wann die Bewegung von 0 (*Null*) anfängt.

§. 78. Die Zugtiefe kann von der Höhe, zu welcher ein Körper (z. B. ein aufgezogenes Rammklotz) durch den Zug erhoben wird, bedeutend verschieden seyn. In Bezug auf *einen* Arbeiter hat man hier

$$100.)\quad n \,.\, (\mathfrak{P} + 10) \,.\, h = 600000$$

n die Anzahl von Zügen in 9 Stunden oder 540 Minuten.
$\mathfrak{P}$ das Gewicht des Rammklotzes, soviel davon auf einen Arbeiter fällt, in Cölln. Pfunden.
h die Tiefe des Zugs in rheinl. Fuſsen.

Also

$$101.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{600000}{n \,.\, h} - 10 \\[2mm] n = \dfrac{600000}{(\mathfrak{P} + 10) \,.\, h} \\[2mm] h = \dfrac{600000}{(\mathfrak{P} + 10) \,.\, n} \end{cases}$$

Ex. Es falle auf einen Arbeiter ein Gewicht von 20 ℔ ($= \mathfrak{P}$); die Zugtiefe soll 3′ betragen; so wird

$$n = \frac{600000}{(20 + 10) \,.\, 3} = 6666 \text{ Züge in 540 Minuten.}$$

Also kommen im Durchschnitte

$$\text{auf 1 Min. } \frac{6666}{540} \text{ oder } 12\tfrac{1}{3} \text{ Züge}$$

$$\text{auf 1 Stunde } \frac{6666}{9} \text{ oder 740 Züge}$$

was mit Inbegriff der Pausen sehr wohl Statt haben kann, und zu einem sehr sicheren Resultate führt.

§. 79. Vergleichung mit Angaben von *Perronet* und *Coulomb*.

§. 80. Untersuchung für den Fall, wo der Zug nicht während der ganzen Zeit t, sondern nur während einem Theile τ mit der Kraft p, und während dem übrigen Theile $\mathfrak{t}$ ($= t - \tau$) mit der Kraft $\mathfrak{p}$ bewirkt wird, Jetzt wird

$$102.)\quad h = (\tau^2 + 2\,\tau\, \mathfrak{t}) \,.\, \frac{p - 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}}\, g + \mathfrak{t}^2 \,.\, \frac{\mathfrak{p} - 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \,.\, g$$

§. 81. Für die Forderung, daſs die Bewegung nach Verfluſs der Zeit τ während der Zeit $\mathfrak{t}$ oder $t - \tau$ gleichförmig fortdaure, wird

$$103.)\quad h = (2\,\tau\, t - \tau^2) \,.\, \frac{p - 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \,.\, g$$

$$104.)\quad p = \frac{\mathfrak{P} \,.\, h}{(2\,\tau\, t - \tau^2) \,.\, g} + 1{,}06 \,.\, \mathfrak{P}$$

Die Bedeutung der Buchstaben wie §. 78 und 80.

§. 82. Anwendung auf Lasterhebung mittelst eines Schwengels.

$$105.)\quad h = t\,.\,c + t^2 g\,.\,\frac{p + q - \frac{\lambda}{l}\,.\,(1+\alpha)\,.\,\mathfrak{P}}{m + \mathfrak{M}} + \mathfrak{h}$$

$$106.)\quad p = \frac{[h - (\mathfrak{h} + t\,.\,c)]\,.\,(m + \mathfrak{M})}{t^2\,g} + \frac{\lambda}{l}\,.\,(1+\alpha)\,.\,\mathfrak{P} - q$$

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, h wie §. 77. t wie §. 80.

λ die Länge des kürzern Hebelarms, an dem die Last angebracht ist, in rheinl. Fufsen.

l die Länge des längern Hebelarms, an dem der Arbeiter wirkt.

q das Gewicht des längern Hebelarms auf die Entfernung l reducirt.

m die ebendahin reducirte Masse des Schwengels.

$\mathfrak{M}$ die reducirte Masse der Last.

Alles nur in Bezug auf den Theil, der auf *einen* Arbeiter fällt.

$\alpha\,.\,\mathfrak{P}$ der Theil der Nebenlast, welcher für *einen* Arbeiter in Rechnung kommt.

p die Kraft, mit welcher ein Arbeiter wirkt.

$\mathfrak{h}$ die Tiefe bis zu welcher der ergriffene Punkt des Schwengels, ohne Angriff der Last, leer niedergedruckt werden soll.

C die Geschwindigkeit des ergriffenen Punktes am Schwengel in der erlangten Tiefe $\mathfrak{h}$, im letzten Augenblick vor Ergreifung der Last.

c die Geschwindigkeit desselben Punktes im ersten Augenblick nach Ergreifung der Last. Es ist aber

$$c = \frac{M + m}{M + m + \mathfrak{M}}\,.\,C$$

M die Masse des mitwirkenden Theils des Arbeiters.

Anmerk. Die genaue Bestimmung der Masse M wird Niemand fordern; sie darf aber defshalb nicht ausser Acht gelassen werden. Unstreitig kommt der Arbeiter destomehr mit seinem Körper zu Hülfe, je grösser die erforderliche Anstrengung p ist. Bei der Unmöglichkeit, einen etwas genauen Werth von M zu bestimmen, habe ich in dem Ex. zu diesem §. $M = 30$ ℔ angenommen. Hätte ein Arbeiter z. B. nur eine Anstrengung von 5 ℔ nöthig, so würde er den Zug mit blofser Bewegung der Hand ohne bedeutende Mitbewegung des Hauptkörpers beginnen, da dann M viel kleiner als 30 ℔ seyn müfste. Weil aber hier allemal von derjenigen Anstrengung die Rede ist, deren ein Arbeiter für die Ausdauer fähig ist, so wird man diesen Werth von M um so mehr im Werthe von c beibehalten können, weil dabei M auch im Nenner vorkommt.

§. 83. *Muskelkraft der Pferde.*
Erfahrungen von *Sauveur, Desaguliers* und *Belidor.* — Angaben (ganz unbrauchbare) von *Watt*, *Bolton*, *Smeaton* und *Regnier. Borgnis* widerspricht sich selbst.

§. 84. Sehr belehrende Beobachtungen von einem Teutschen.

§. 85. Folgerungen aus des letztern Beobachtungen.

§. 86. Nöthige Erläuterung zum vorigen §.

§. 87. Für Pferde im Zuge die Formeln (auf tägliche 8 Stunden).

$$107.)\quad \begin{cases} p = 37{,}5\,.\,(8 - c - 20\,.\,Sin.\,\alpha) \\ c = 8 - \frac{2p}{75} - 20\,.\,Sin.\,\alpha \end{cases}$$

Siehe §. 92. am Ende.

p die angewendete Zugkraft.

α der Steigewinkel des Bodens (für die Last und für die Pferde.)

c die Geschwindigkeit.

§. 88. Um in der kürzesten Zeit mit einem Zugpferde eine bestimmte Höhe h zu erreichen, giebt sich

108.) der vortheilhafteste Steigewinkel durch die Formel

$$Sin.\,\alpha = 0{,}2 - \frac{p}{1500}$$

die vortheilhafteste Länge des Wegs vom tiefsten Punkte bis zum höchsten.

$$\lambda = \frac{h}{0{,}2 - \frac{p}{1500}}$$

Bestätigung durch die Erfahrung.

§. 89. Für das Maximum des Effekts wird beym Steigewinkel α

$$109.)\quad c = 4 - 10 \,.\, Sin.\ \alpha$$

$$110.)\quad p = 150 - 375 \,.\, Sin.\ \alpha$$

Die Last, welche diese Anstrengung eines Pferdes erfordert, ist die vortheilhafteste.

§. 90. Käme der Zugkraft p ein mitwirkendes Gewicht $P \,.\, Sin.\ \alpha$ zu Hülfe, unter α wie vorher den Steigewinkel verstanden, so hätte man für das Maximum des Effekts

$$111.)\quad Sin\ \alpha = 0{,}2 - \left(\frac{p}{1500} + \frac{p}{2P}\right)$$

§. 91. *Muskelkraft der Ochsen.*

Für Ochsen, einen vom Mittelschlag verstanden, wird bei täglich 8 stündiger Anstrengung

$$112.)\quad c = (0{,}5 + Sin\ \alpha) \,.\, (8 - \frac{2p}{75} - 20 \,.\, Sin.\ \alpha)$$

oder

$$113.)\quad c = 4 - \left((2 + \frac{2p}{75}) \,.\, Sin\ \alpha + \frac{p}{75} + 20 \,.\, Sin.\ \alpha^2\right)$$

§. 92. Eine Schlufsanmerkung.

§. 93. III. *Die Stofskraft.*

Sie kommt bei Maschinen, die in der Folge betrachtet werden, in Anwendung.

§. 94. IV. *Die Expansivkraft.*

Sie kommt bei der Luftmaschine, bei Pumpen und bei Dampfmaschinen in der Folge vor.

§. 95. V. *Die Zentrifugalkraft.*

Sie wirkt bei der Saugschwungmaschine und bei dem Segnerischen Wasserrade.

VI. Kapitel.

FESTIGKEIT DER KOERPER.

§. 96. Man unterscheidet *absolute* und *respektive* Festigkeit.

§. 97. Resultate von Versuchen über absolute Festigkeit besonders solcher Materien die bei Maschinen und dabei vorkommenden Bauten sich ergeben.

§. 98. Die theoretische Fundamentalformel für die respektive Festigkeit.

$$114.)\quad \tfrac{1}{2}\,h^2 \,.\, \delta \,.\, k = x \,.\, Q + \tfrac{1}{2}\,\lambda\, q\ (Fig.\ 44.)$$

§. 99. Der Erfahrung zu Folge mufs der Hebelarm, in dessen Mitte der Festigkeitspunkt angenommen werden kann, merklich kleiner als h angenommen werden. In der Ausübung genügt es $\frac{1}{6}h$ statt $\frac{1}{2}h$ zu setzen. Daher

115.) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h^2 \delta . k = x . Q + \frac{1}{2} \lambda . q$

oder 116.) $\delta h^2 k = 6 . x . Q + 3 \lambda . q$

Nach der Zeichnung (*Fig.* 44.) ist:

Q ein in n angehängtes Gewicht.
q das Gewicht des frei liegenden Balkenstücks ac.
h die Höhe des Balkens ab in rheinl. Zollen.
δ die Dicke desselben (horizontal gemessen) in Zollen.
x die Entfernung an in Zollen.
λ die ganze Länge ac.
k die absolute Festigkeit für 1 Q. Zoll aus dem vorigen §.

§. 100. Die vorigen Bestimmungen gelten nur für neue durchaus gesunde Balken, die noch nicht belastet gewesen sind. Nach n Jahren darf man zur völligen Sicherheit in der Ausübung für *geschützte* Balken nur

117.) $\frac{1}{5 + \frac{1}{9} n} . k$ statt k

Für *offen liegende* der Witterung ausgesetzte nur

118.) $\frac{1}{5 + \frac{1}{2} n} . k$ statt k

setzen. Daher

119.) Eine Tafel für geschützte Balken von $n = 1$ bis zu $n = 100$ Jahren.

120.) Eine Tafel derselben Art für offen liegende.

Werden in beiden Tafeln die mit k multiplicirten Zahlen mit ς bezeichnet, so erhält man die allgemeine *praktische* Formel.

121.) $\delta . h^2 . \varsigma . k = 6 . x . Q + 3 . \lambda . q$

Die Buchstaben wie §. 99.

§. 101. Ist φ das specifische Gewicht des Balkens, so kann man auch φ statt q in die Gleichung bringen. Man hat

122.) $\delta \varsigma k h^2 = 6 x . Q + 0{,}1146 . \delta . \lambda^2 . \varphi . h$

und 123.) $h = \frac{0{,}0573 . \lambda^2 . \varphi}{\varsigma k} \pm \sqrt{\left(\frac{6 . x Q}{\delta \varsigma k} + \left(\frac{0{,}0573 . \lambda^2 . \varphi}{\varsigma k}\right)^2\right)}$

Die Buchstaben wie Nro. 121.

§. 102. Ueber $a c$ (*Fig.* 46.) ist ein Halbkreis verzeichnet, dessen Mittelpunkt v ist; wenn nun ein Gewicht Q in einer beliebigen Stelle des Durchmessers n liegt, so übt solches auch auf die Mitte v einen Druck zum Beugen dieser Stelle aus, so daſs Q weggenommen und ein Gewicht M in v gelegt werden könnte, welches in v dieselbe Wirkung hätte, wenn

123*). $M = \frac{n d^2}{v c^2} . Q$ genommen würde.

Für die Ausübung erhält man zur Sicherheit bei einem noch neuen Balken (*Fig.* 47.)

124). $M = \frac{2k . h^2 . \delta}{15 . \lambda} - \frac{1}{10} q$ (Alles in Zollen.)

Denn in der Ausübung muſs die Last immer viel kleiner seyn, als sie für das Gleichgewicht mit der Festigkeit nöthig wäre.

M das Gewicht, womit man einen auf zwei Unterlagern aufliegenden noch neuen Balken in der Mitte zwischen solchen mit der gröſsten Sicherheit etwa 1 Jahr lang belasten darf.

Die übrigen Buchstaben wie §. 99.

§. 103. Soll der Balken die Last M (in Cölln. ℔) noch am Ende des n^{ten} Jahres mit aller Sicherheit tragen, so hat man, wie No. 117. und 118. (*Fig.* 47.)

Für *geschützte* Balken.

$$125.)\quad \begin{cases} M = \dfrac{1}{5+\frac{1}{9}n} \cdot \left(\dfrac{2k \cdot h^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right) \\ \text{oder auch} \\ M = \dfrac{\delta\,h}{5+\frac{1}{9}n} \cdot \left(\dfrac{2kh}{3\lambda} - 0{,}0573 \cdot \lambda \cdot \varphi\right) \end{cases}$$

Für *offen liegende*

$$126.)\quad \begin{cases} M = \dfrac{1}{5+\frac{1}{2}n} \cdot \left(\dfrac{2kh^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right) \\ \text{oder auch} \\ M = \dfrac{\delta\,h}{5+\frac{1}{2}n} \cdot \left(\dfrac{2kh}{3\lambda} - 0{,}0573 \cdot \lambda \cdot \varphi\right) \end{cases}$$

Für Balken die an ihren Enden so befestigt wären, daſs mit einem Bruche in der Mitte α (*Fig.* 48) zugleich Brüche an den Enden erfolgen müſsten, hätte man zur hinlänglichen Sicherheit bis zum Ende des n^{ten} Jahres

für Balken in Gebäuden

$$127.)\quad M = \frac{1}{5+\frac{1}{9}n} \cdot \left(\frac{4kh^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right)$$

für Balken im Freien

$$128.)\quad M = \frac{1}{5+\frac{1}{2}n} \cdot \left(\frac{4kh^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right)$$

Siehe die gleich folgende Abänderung No. 130 und 131.

Die Buchstaben wie §. 99.

Wäre der Balken (*Fig.* 46.) an beiden Enden vollkommen befestigt, und sollte jetzt ausserhalb der Mitte in n ein Gewicht Q aufgelegt werden, so daſs man bis zum Ende des n^{ten} Jahres hinlänglich gesichert wäre, so hätte man

$$129.)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{\lambda^2}{4 \cdot (5+\frac{1}{9}n) \cdot x \cdot (\lambda - x)} \cdot \left(\dfrac{4kh^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right) \\ \text{statt No. 127.} \\ Q = \dfrac{\lambda^2}{4 \cdot (5+\frac{1}{2}n) \cdot x \cdot (\lambda - x)} \cdot \left(\dfrac{4kh^2\,\delta}{3\lambda} - \frac{1}{2}q\right) \\ \text{statt No. 128.} \end{cases}$$

S. No. 130. u. No. 131.

Für die Ausübung ist es aber nicht rathsam, diese theoretische Folgen so ganz beizubehalten. Wir setzen daher für Balken mit befestigten Enden

Unter Bedeckung

$$130.)\quad Q = \frac{\lambda^2}{4 \cdot (5+\frac{1}{9}n) \cdot x \cdot (\lambda - x)} \cdot \left(\frac{kh^2\,\delta}{\lambda} - \frac{1}{2}q\right)$$

$$131.)\quad Q = \frac{\lambda^2}{4 \cdot (5+\frac{1}{2}n) \cdot x \cdot (\lambda - x)} \cdot \left(\frac{kh^2\,\delta}{\lambda} - \frac{1}{2}q\right)$$

Die Buchstaben wie §. 99. Alles bezieht sich auf rheinl. Zolle, das Gewicht auf Cöllnische ℔. Statt q kann man auch $0{,}0382 \cdot \varphi \cdot h \cdot \delta \cdot \lambda$ setzen, wo φ das specifische Gewicht der Holzart bezeichnet (§. 67.)

§. 104. Ein durch ein Rammklotz geschlagener Pfahl sinkt, bei gleichförmigem Widerstande des Bodens um eine bestimmte Tiefe τ nieder, und man findet

$$132.)\quad \tau = \frac{PH}{\left(1+\frac{Q}{P}\right).(Z+Q)}$$

$$133.)\quad Z = \frac{PH}{\left(1+\frac{Q}{P}\right).\tau} - Q$$

P das Gewicht des Rammklotzes (Rammbäres)
Q das Gewicht des Pfahls
H die Fallhöhe des Rammbäres
τ die Tiefe, um welche der Pfahl bei einem Schlage in den Boden eindringt.
Z die Last, welche ein Pfahl, der nach einem Schlage um die Tiefe τ gesunken ist, zu tragen vermag, blos für das Gleichgewicht berechnet.

§. 105. Statt τ (No. 133.) kann man $\frac{1}{48}$ Fuſs setzen. Dieses giebt

$$134.)\quad Z = \frac{48.P.H}{1+\frac{Q}{P}}$$ zum Gleichgewicht.

Zur vollen Sicherheit für die Ausübung setze man

$$135.)\quad Z = \frac{4.PH}{1+\frac{Q}{P}}$$

§. 106. Leichte Pfähle (von spec. leichterem Holze) dringen schneller ein als schwerere von gleichem Umfange. — Doppeltes, dreifaches Gewicht des Rammklotzes nutzt mehr als doppelte, dreifache Fallhöhe.

§. 107. Zur hinlänglichen Festigkeit der Mauern, wenn solche von gewöhnlichen Bruchsteinen *mit Speiſse* aufgeführt werden, (*Fig.* 49.) dient die Formel

$$136.)\quad \frac{5}{56}h^2 = Bb + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}B^2$$

Sie giebt $$137.)\quad B = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{15}{56}.h^2 + \tfrac{3}{4}b^2\right)}$$

Diese Bestimmung in Bezug auf Sicherheit gegen den Umsturz dient zugleich zur Sicherheit gegen das Verdrücken.

§. 108. Ausfüllung des leeren Raums hinter der Mauer. (*Fig.* 51.)

§. 108.* *Trockene* Mauern. Maaſsregeln bei weichem Boden.

VII. Kapitel.

VON DER REIBUNG.

§. 109. *Coulomb's* Versuche. Frühere Bestimmungen von *Amontons, Parent, Bülfinger* und *Belidor.*

§. 110. Umstände, von welchen die Gröſse der Reibung abhängt. — *Gleitende* Reibung, *wälzende* Reibung, *Zapfenreibung.*

§. 111. Die Unbestimmtheit in der Gröfse der Reibung hat auf die Genauigkeit der Resultate von Maschinenberechnungen meistens keinen bedeutenden Einflufs.

§. 112. Resultate der Versuche von *Muschenbröck* und von *Coulomb*. Der Reibungskoëfficient ist, bei gehörig geschmierten Flächen, viel kleiner, als ihn *Belidor* gewöhnlich in Rechnung bringt. — Die *wälzende* Reibung kann

$$137.\,^{*}) \quad = \frac{d + 1}{(d^2 + 1) \cdot 1{,}8} \cdot F$$

gesetzt werden.

F die *gleitende* Reibung

d der Durchmesser der Walze oder des Zapfens in rheinl. Zollen.

§. 113. Die Reibung wird für die Maschinenlehre hier zu $\frac{1}{8}$ bis zu $\frac{1}{4}$ vom Druck angenommen, und dieser aliquote Theil in der Folge allemal mit μ bezeichnet, da dann μ (statt $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$) der *Reibungskoëfficient* genannt wird. Dabei wird aber vorausgesetzt, dafs die Richtung des Drucks auf die Richtung, nach welcher sich die reibende Stelle bewegt, senkrecht sey, wobei dann der Weg, den ein reibender Punkt auf der anliegenden Fläche durchläuft (b), mit dem ganzen Wege, den er überhaupt in seiner Bewegung durchläuft (B), einerlei ist. Sind diese Wege (b und B) verschieden, so gilt statt μ ein anderer Reibungskoëfficient φ, und man hat allgemein

$$138.) \quad \varphi = \frac{b}{B} \cdot \mu$$

Hierzu findet man im Text

139.) die Werthe von μ

§. 113.* Eine sehr empfehlungswerthe neuerlich angegebene Schmiere.

§. 114. Der Kreis *Fig.* 52. sey der Durchschnitt eines festliegenden cylindrischen Körpers, $a\,b\,c\,m$ ein angelegtes Seil, das auf die Bogenlänge $b\,c = \alpha$ der Reibung unterworfen ist; an a ziehe nach $b\,a$ eine Last Q, von c nach $c\,m$ eine Kraft V, die mit Q und der Reibung im Gleichgewicht seyn soll.

Legt man nun das Seil von b bis d an den Bogen $b\,c\,d = 2\,\alpha$, und läfst Q ungeändert, so wird nach $d\,n$ zum Gleichgewicht mit Q und der Reibung eine Kraft $= \frac{V}{Q} \cdot V$ erfordert; ebenso an e nach $e\,o$, für den Reibungsbogen $b\,c\,d\,e = 3\,.\,\alpha$, eine Kraft $= \left(\frac{V}{Q}\right)^2 . V$ u. s. f. Allgemein zum Gleichgewicht mit Q und der Reibung am n fachen Bogen eine Kraft.

$$140.) \quad K = \left(\frac{V}{Q}\right)^{n-1} . V.$$

VIII. Kapitel.

STEIFIGKEIT DER SEILE.

§. 115. Die Seile, durch deren Umwindung um eine Welle eine Last in Bewegung gesetzt wird, verrathen einen eigenen Widerstand, welcher der *Widerstand wegen der Steiffigkeit der Seile* genennt wird, oder auch schlechthin die *Steiffigkeit der Seile*. (*Fig.* 53.)

§. 116. Grund dieser Erscheinung. Bemühungen von *Coulomb* und von *Prony.*
§. 117. *Amontons* Versuche und *Karstens* Formel.
§. 118. *Prony's* Formel für *neue trockene ungepichte Seile.*

$$141.)\quad w = \frac{\delta^{1,7}}{R} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 \cdot Q)$$

R der Halbmesser der Walze in Linien,
δ die Dicke oder der Durchmesser des Seils, in Linien.
Q die Last am Seile (an der centrischen Linie des Seils angenommen.)
w die Gröfse des Widerstandes wegen der Steiffigkeit (gleichfalls in der centrischen Linie verstanden.)

Desselben Formel für Seile die durch langen Gebrauch ihre natürliche Steiffigkeit verloren haben.

$$142.)\quad w = \frac{\delta^{1,4}}{R} \cdot (2{,}45 + 0{,}053 \cdot Q)$$

§. 119. Nähere Betrachtung dieser Erscheinung und Erinnerungen gegen *Prony.* (*Fig.* 54.) Daher hier neue Formeln. Nämlich:

Für *neue* Seile

$$143.)\quad w = \frac{0{,}35 \cdot \delta}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q$$

Für *alte* Seile

$$144.)\quad w = \frac{0{,}35 \cdot \sqrt[3]{\delta^2}}{R + \frac{1}{2}\delta} \cdot Q$$

Vorausgesetzt dafs das Seilstück $m\,n$ (*Fig.* 54[a], *Fig.* 54[b]), woran die Kraft wirkt, die Walze in einem ganzen Quadrant berührt. Ist dieses Bogenstück mn in Graden $= \alpha$, so mufs man den Werth von w noch mit $\frac{\alpha}{90}$ multipliciren.

IX. Kapitel.

GESETZE DES GLEICHGEWICHTS TROPFBAR FLUESSIGER MASSEN UNTER SICH UND MIT FESTEN KOERPERN.

§. 120. Allgemeiner Gegenstand der Hydrostatik. Begriff von flüssigen Massen.
§. 121. Der Fundamentalsatz.

145.) Der Druck des Wassers, das ruhig in der Höhe h über einer Horizontalfläche w steht, ist dem Gewicht einer Wassersäule gleich, deren kub. Inhalt $= h \cdot w$ wäre.

§. 122. Der vorige Satz erhält eine noch gröfsere Allgemeinheit:

146.) Wasser das bei ruhigem Stande an einer Wand anliegt übt auf jedes Flächenstück w dieser Wand einen Druck $= h \cdot w$ aus, wenn h die Tiefe des Schwerpunkts von w unter dem Wasser bezeichnet.

Unter einem Druck $= h \cdot w$ wird allemal das Gewicht einer Wassersäule verstanden, deren kub. Inhalt $= h \cdot w$ wäre.

Liegt die Grundlinie (b) eines bis zum Wasserspiegel genommenen Wandstücks horizontal in der Tiefe H unter dem Spiegel, so ist

147.) der Druck des Wassers auf das ganze Wandstück im ruhigen Zustande $= \frac{1}{2}\, b\, H^2$.

§. 123. Wenn ein Körper unter dem Wasserspiegel den Raum k einnimmt, so leidet er vom Wasser

einen lothrechten Druck nach oben, der dem Gewicht einer Wassermasse gleich ist, die den Raum K ausfüllen würde. Daher die Formel

$$148.)\quad \varphi = \frac{P}{p}$$

P das Gewicht eines untergetauchten Körpers, der specifisch schwerer als das Wasser ist.
p das Gewicht, welches er im Wasser verliert, was mittelst einer Wage gefunden wird.
φ das specifische Gewicht des Körpers P.

für einen Körper, der specifisch leichter als Wasser ist und deſshalb mit einem specifisch schwereren P verbunden werden muſs, damit er sich ganz unter dem Wasserspiegel eintauche, hat man

$$149.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{Q} - q}$$

$\mathfrak{p}$ das Gewicht des specifisch leichteren Körpers.
q das Gewicht, welches P im Wasser verliert.
$\mathfrak{Q}$ das Gewicht, welches beide mit einander verbundene Körper zusammengenommen im Wasser verlieren.
φ das specifische Gewicht des Körpers $\mathfrak{p}$.

Muſs der specifisch leichtere Körper $\mathfrak{p}$, um das Eindringen des Wassers zu verhindern, etwa mit Wachs eingerieben werden, wodurch sein Gewicht $= \mathfrak{p}'$ wird, so erhält man

$$150.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{p}}{P + \mathfrak{p}' - Q - q}$$

P der mit $\mathfrak{p}$ verbundene specifisch schwerere Körper.
Q das Gewicht, welches P und $\mathfrak{p}'$ noch im Wasser behalten.
q, $\mathfrak{p}$ wie vorher.

Das Volumen von $\mathfrak{p}$ darf durch das Einschmieren nicht vergröſsert werden.

Auch finden wir die einzelnen Gewichte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Körpern A und B durch die Formeln

$$151.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\mathfrak{P} - \beta\,\mathfrak{Q}}{\alpha - \beta}\,.\,\alpha \\[2ex] \mathfrak{B} = \dfrac{\alpha\,\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}}{\alpha - \beta}\,.\,\beta \end{cases}$$

$\mathfrak{P}$ die Gewichte von A und B zusammengenommen (z. B. von einem Preuſsischen Thaler, der aus Silber und Kupfer besteht.)
$\mathfrak{Q}$ das Gewicht, was beide Materien A und B zusammengenommen (wie der Thaler) im Wasser verlieren.
α das specifische Gewicht von A; β das von B.

In der Anwendung wird vorausgesetzt, daſs im zusammengesetzten Körper (was beim Thaler nicht genau der Fall ist) die Materien zusammengenommen noch ebensoviel Raum einnehmen als vor ihrer Zusammensetzung.

§. 124. Anwendung auf Dämme wäre hier ohne Nutzen.

GRUNDLEHREN DER HYDRAULIK.

X. Kapitel.

UEBER DIE ERSCHEINUNGEN BEIM AUSFLUSSE DES WASSERS AUS GEFAESSEN ODER BEHAELTNISSEN, BEI BESTIMMTEN WASSERHOEHEN, DURCH DUENNE ODER DICKE WAENDE.

§. 125. Gegenstand der Hydraulik und insbesondere dieses Kapitels.

§. 126. Für die Ausflufsmenge aus einem Behältnisse, das beständig bis zu einerlei Höhe voll erhalten wird

$$152.)\quad M = C \,.\, w$$

M die in 1 Sekunde ausfliefsende Wassermenge.
C die Geschwindigkeit beim Austritt aus dem Behältnisse.
w der Querschnitt des mit dieser Geschwindigkeit hervorspringenden Wassers.

§. 127. Die Formeln

$$153.)\quad C = 2\sqrt{gH}$$

und beinahe

$$154.)\quad w = 0{,}62 \,.\, \alpha$$

Vorausgesetzt, dafs der Durchmesser der Oeffnung nicht über $\frac{1}{4}$ *H* und dafs die Oeffnung in einer *dünnen* Wand angebracht sey (§. 129.).

H die Wasserhöhe über der Mitte der Ausflufsöffnung.
α die Gröfse der Ausflufsöffnung.
Das übrige wie §. 126.

§. 128. Für Oeffnungen in *dicken* Wänden oder für kurze Ansatzröhren (§. 129.).

$$155.)\quad C' = 0{,}81 \,.\, 2 \,.\, \sqrt{gH} \quad \text{beinahe.}$$

$$156.)\quad C' = 2 \,.\, \sqrt{g \,.\, 0{,}656 \,.\, H} \quad \text{beinahe.}$$

und ebenso nahe

$$157.)\quad C' = 2 \,.\, \sqrt{g \,.\, \tfrac{2}{3} H}.$$

$$158.)\quad w = 0{,}81 \,.\, \alpha \quad \text{beinahe.}$$

Alles wie §. 127. angedeutet, nur *C'* statt *C* geschrieben.

§. 129. Die Koëfficienten von α (No. 154 und 158) heifsen *Zusammenziehungskoëfficienten* (0,62 und 0,81); sie werden in der Folge mit γ bezeichnet. Man setzt nun mit hinlänglicher Sicherheit
$\gamma = 0{,}62$ wenn die Dicke der Wand nicht über $\frac{1}{2}$ vom Durchmesser der Oeffnung beträgt.
$\gamma = 0{,}81$ wenn der Durchmesser der Oeffnung nicht über $\frac{6}{7}$ von der Wanddicke beträgt.

§. 130. Wir setzen in der Folge $1 - \gamma = k$ also.

für dünne Platten $k = 0{,}38$
dicke Wände $k = 0{,}19$

Dabei darf α nur einen kleinen Theil der Wandfläche ausmachen. Auch mufs auf die §. 127. bemerkte Beschränkung Rücksicht genommen werden. (Siehe §. 135.)

Zur genauern Bestimmung hat man

$$159.)\quad k = m \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

wo *m* zweierlei Werthe hat. Nämlich

$$160.)\quad \text{für } \textit{dünne} \text{ Wände } k = 1{,}3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

$$161.)\quad \text{für } \textit{dicke} \text{ Wände } k = 0{,}65 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{W}\right)}}\right)$$

Was hier *dick* und *dünn* ist, Siehe §. 129.

$$162.)\quad M = \gamma\,\alpha \cdot 2 \cdot \sqrt{g\,H} \quad \textit{wo } \gamma = 1 - k \textit{ ist.}$$

W bezeichnet hier die Gröſse der Wandfläche, in welcher die Oeffnung α angebracht ist, wie $\delta\,\varepsilon$ (*Fig.* 63.).

Alles übrige wie §. 127.

Am Ende dieses §. eine Tafel für die Werthe von *k* bei verschiedenen Werthen von $\frac{\alpha}{W}$

§. 131. Eine Bemerkung für die Anwendung.

§. 132. Bei einer rektangelförmigen Oeffnung mit horizontaler Grundlinie, die bis zum Wasserspiegel (*A B Fig.* 64.) hinauf reicht, wird

$$163.)\quad M' = H \cdot \beta \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \sqrt{g\,H} \quad \text{ohne Rücksicht auf Zusammenziehung}$$

$$164.)\quad M' = \gamma \cdot \tfrac{4}{3} \cdot H \cdot \beta \cdot \sqrt{g\,H} \quad \text{mit Rücksicht auf die Zusammenziehung.}$$

β die Breite der Oeffnung.

Alles übrige wie §. 130. nur *M'* statt *M* geschrieben. (Siehe §. 134 und 135.)

§. 133. Vergleichung mit Versuchen von *Christian*. Sie giebt

165.) Die beobachtete Wassermenge nur $\frac{9}{10}$ von der berechneten.

§. 134. Hier ist dem Kalkul zu Folge für die Oeffnung *q r s t* (*Fig.* 64.).

$$166.)\quad M = \left(\gamma \cdot \tfrac{4}{3}\beta \cdot \sqrt{g}\right) \cdot \left(H \cdot \sqrt{H} - \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{h}}\right)$$

Aber *Beobachtungen* zu Folge genauer

$$167.)\quad M = \left(0{,}85 + 0{,}15 \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{H}}\right) \cdot \left(\gamma \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \beta \sqrt{g}\right) \cdot \left(H \cdot \sqrt{H} - \mathfrak{h} \cdot \sqrt{\mathfrak{h}}\right)$$

H die Tiefe des untern Randes } der rektangelförmigen Oeffnung unter dem Wasser-
$\mathfrak{h}$ — — — obern Randes } spiegel.

β die horizontale Grundlinie der Oeffnung.

Wegen γ Siehe den folgenden §.

M die in jeder Sekunde durch die Oeffnung ($\alpha = (H - \mathfrak{h}) \cdot \beta$) ausfliessende Wassermenge.

§. 135. In Uebereinstimmung mit der Erfahrung wird hier

$$168.)\quad \gamma = 1 - \frac{c}{c + 0{,}4} \cdot k$$

gesetzt, und es genüget,

bei dünnen Wänden $c = 2 \cdot \sqrt{g} \cdot (\mathfrak{h} + \frac{4}{9} h)$ zu nehmen.

— dicken — — $c = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{g} \cdot (\mathfrak{h} + \frac{4}{9} h)$. In Bezug auf Fuſse.

§. 136. Wenn das Wasser aus einem Behältnisse erst einen Weg von der Länge δ durchlaufen muſs, bevor es zu einer beschleunigten Bewegung oder zum hinlänglich freien Absturze gelangt, so ist für die Ausübung genau genug allgemein

169.) $$M = \left(1 - \tfrac{1}{13} \cdot \sqrt{\tfrac{\delta}{3}}\right) \cdot \left(0{,}85 + 0{,}15 \cdot \sqrt{\tfrac{\mathfrak{h}}{H}}\right) \cdot (\tfrac{2}{3} \cdot \gamma\beta \cdot \sqrt{g}) \cdot (H\sqrt{H} - \mathfrak{h}\sqrt{\mathfrak{h}})$$

Nur soll δ nicht über 27′ betragen.
Für *Ueberfallwehre* genügt daher die Formel

170.) $$M = \left(1 - \tfrac{1}{13} \cdot \sqrt{\tfrac{\delta}{3}}\right) \cdot 1{,}13 \cdot \gamma\beta \cdot H \cdot \sqrt{g\,H}$$

Die Bedeutung wie §. 134.
Wie sich der Verfasser in Bestimmung des Werths von H verhält.
Eine leichte Methode alle solche Berechnungen sehr zu vereinfachen ist: mit den Lesern übereinzukommen, daſs es dabei auf $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ des Ganzen nicht ankommen solle.

§. 137. Sehr im Groſsen angestellte Beobachtungen. Daraus abgeleitete Formeln:
Von *Bauer*

171.) $$M = 6{,}7034 \cdot \alpha^{0{,}828} \cdot \sqrt{\mathfrak{H}}$$

Vom Verfasser nur in analogerer Form

172.) $$M = 0{,}863 \cdot \alpha^{0{,}828} \cdot 2\sqrt{g\,\mathfrak{H}}$$

Alles in Bezug auf Fuſse.

α die Gröſse der rektangelförmigen Oeffnung, deren oberer Rand noch bedeutend unter dem Wasserspiegel liegt.
$\mathfrak{H}$ die Tiefe des Schwerpunkts der Oeffnungsfläche (in der bekannten Bedeutung) unter dem Wasserspiegel.
Vergleichungen mit den Resultaten der Erfahrung bestätigen die Brauchbarkeit der Formel No. 169.

§. 138. Für den Ausfluſs durch eine dreieckte Oeffnung hat man

173.) $$M = \left(1 - \frac{\sqrt{\tfrac{1}{3}\delta}}{13}\right) \cdot \left(0{,}85 + 0{,}15 \cdot \sqrt{\tfrac{\mathfrak{h}}{H}}\right) \cdot \gamma\,\alpha \cdot 2\sqrt{g\,\mathfrak{H}}$$

Die Buchstaben wie §. 136 und 137.

XI. Kapitel.

UEBER DIE BEWEGUNG DES WASSERS IN REGULAEREN OFFENEN KANAELEN.

§. 139. Unbrauchbarkeit hierher gehöriger Schriften noch in der letzten Hälfte des vorigen Iahrhunderts.

§. 140. Abfluſs des Wassers in einem Kanale, wenn alle Hindernisse der Bewegung bei Seite gesetzt werden.

§. 141. Noch von *Kästnern* wird dieser Gegenstand nach §. 140. behandelt.

§. 142. *Karsten* und *Kästner* widersprechen einander, stimmen aber in der Hauptsache zusammen. Beide bauen auf unrichtige Voraussetzungen.

§. 143. *Silberschlag* erwarb sich durch seine *Hydrotechnik* wohl verdientes Ansehen in Teutschland und in Frankreich.

§. 144. Silberschlags Werk enthält noch viele Unrichtigkeiten.

§. 155. Ein Blik auf die Verdienste italienischer, englischer, schwedischer, polnischer und russischer Mathematiker um diesen Gegenstand.

Anmerk. Der Sprung von §. 144. zu §. 155., ist ein zu spät bemerktes Versehen.

§. 156. Ausgezeichnetes Verdienst französischer Ingenieure. Mit *Chezy* begannen neue richtigere Ansichten. Er setzte nachstehende Proportion fest.

$$174.)\quad C : c = \sqrt{\frac{z \cdot e}{l \cdot k}} : \sqrt{\frac{\zeta \cdot \eta}{\lambda \cdot \varkappa}}$$

oder

$$175.)\quad c = \frac{\sqrt{\frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}}}{\sqrt{\frac{z\,e}{l\,k}}} \cdot C$$

Die lateinischen Buchstaben beziehen sich auf einen Kanal A,
die griechischen auf einen andern B; die Kanäle haben unveränderliche Breite.
l, λ die Längen der beiden Kanäle.
z, ζ Abhang der Oberfläche des Wassers auf die Längen l, λ.
k, $\varkappa$ die Summe der beiden Seiten und der Grundlinie der Breitenprofile der beiden Kanäle.
e, η Flächeninhalt der Breitenprofile,
C, c Mittlere Geschwindigkeiten des Wassers in den Profilen beider Kanäle.

Die Formel No. 175 läſst sich auch so ausdrücken

$$176.)\quad c = \left(C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}}.$$

§. 157. Man stellte nun an einem Kanale A Beobachtungen an, und fand z. B. $C \cdot \sqrt{\frac{k\,l}{z\,e}} = 88$, denselben Ausdruck fand man bei einem andern Kanale, den man für A wählte, $= 86$; bei einem dritten, den man statt A gebrauchte, fand man ihn $= 95$, bei einem vierten $= 97$ u. s. f.

Nimmt man nun das arithmetische Mittel aus den vielen so berechneten Zahlen, so ergiebt sich, daſs man in Pariser Fuſsen

$$177.)\quad c = 92 \cdot \sqrt{\frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}}$$

setzen kann.

Dabei wird der Zustand gleichförmiger Bewegung des Wassers im Kanale vorausgesetzt. Auf Kanäle mit horizontalem Boden ist die Formel unanwendbar. Ueberhaupt ist die Chezysche Formel noch sehr beschränkt.

§. 158. *Dubuat* gieng weiter und kam nach mancherlei Künsteleien auf die Formel

$$178.)\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - \log n \cdot \sqrt{(b + 1{,}6}} - 0{,}3 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)$$

Alles in Bezug auf Pariser Zolle.

Statt $\frac{\zeta}{\lambda}$ steht hier $\frac{1}{b}$, und r statt $\frac{\eta}{\varkappa}$.

§. 159. Fast gleichzeitig erschienen von *Bernard Neue Grundlehren der Hydraulik.*

§. 160. Erst im Jahre 1800 legte *Coulomb* dem Nationalinstitut eine Abhandlung über diesen Gegenstand vor. Einige Jahre später baute hierauf *Girard* seine Formel.

$$179.)\quad \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa} = \varphi \cdot (c + c^2)$$

Vergleichung mit Beobachtungen giebt in Metern

$$180.)\quad c = -0{,}5 + \sqrt{\left(0{,}25 + 8052{,}54 \cdot \frac{\zeta\eta}{\lambda\varkappa}\right)}$$

Die Girardsche Formel hat Mängel mit den vorhergehenden gemein, kommt der Wahrheit nicht näher und ist dabei unbequemer.

§. 161. Endlich erschienen auch von *Prony's* Meisterhand (im Jahre 1804) hierher gehörige Untersuchungen. Nach ihm wäre

$$181.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa}\,.\,g = \alpha\,c + \beta\,c^2$$

Setzt man δ statt $\frac{\alpha}{g}$, und μ statt $\frac{\beta}{g}$; so wird

$$182.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = \delta\,.\,c + \mu\,.\,c^2$$

In Bezug auf Meter findet man

$$183.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948\,.\,c + 0{,}000271\,.\,c^2$$

In Bezug auf Pariser Zolle

$$184.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948\,.\,c + 0{,}00000738\,.\,c^2$$

In Bezug auf Pariser Fuſse

$$185.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0000948\,.\,c + 0{,}00008856\,.\,c^2$$

Auch aus (No. 177) hat man nach *Chezy*

$$186.)\quad \frac{\varsigma\eta}{\lambda\varkappa} = 0{,}0001165\,.\,c^2$$

Hieraus giebt sich eine Vergleichung der Pronyschen Formel mit der Chezyschen. Die Buchstaben wie §. 156.

§. 162. *Funk*, ein Preuſsischer Hydrotechniker, ist der neueste hierher gehörige Schriftsteller. Er hat groſse Verdienste um diesen Gegenstand, die sich besonders durch seine Untersuchungen in Bezug auf die Erscheinungen bei natürlichen Fluſsbetten auszeichnen.

§. 163. Des Verfassers eigene Untersuchungen über diesen Gegenstand in den Abhandlungen der Akademie zu *München*. Er setzt zuerst

$$187.)\quad M = \varphi\,.\,\sqrt{\frac{\varsigma\,b^3h^3}{\lambda\,.\,(b+h)}}$$ für die in 1 Sekunde abflieſsende Wassermenge M

die er, wegen der unbedeutenden Abänderung noch die *Chezische* Formel nennt.

ς λ wie §. 156.
b die mittlere Breite des Profils ($\alpha\,\beta$ *Fig.* 67.).
h die Höhe des Profils oder Wassertiefe ($m\,n$ *Fig.* 67.).

Aber dann lieſs er h nur für die Tiefe am Anfange des Kanals gelten, und unterschied davon die

H als Tiefe am Ende des Kanals. Auſserdem ist bei ihm
u die veränderliche Tiefe längs dem Kanale zwischen H und h.
c ist bei ihm das arithmetische Mittel der zu allem möglichen Werthen von u gehörigen Geschwindigkeiten. Er findet nun

$$188.)\quad c = \varphi\,.\,\sqrt{\frac{\varsigma b}{\lambda}}\,.\left(0{,}5 - \frac{b}{4\,.\,(h-H)}\,.\,[\,logn.\,(b+2h) - logn.\,(b+2H)]\right)$$

Jetzt ist bei ihm für die fernere Untersuchung
b die mittlere Breite des *ganzen* Kanals
ε der Abhang oder das Gefälle des *Bodens* auf die Länge λ
und so findet er

$$189.)\quad M = \varphi \,.\, bh. \sqrt{\left(\frac{bH\,.\,(\varepsilon + h - H)}{\lambda\,.\,(h+H)} \times \atop 1 - b\,.\,\frac{logn\,.\,(b + 2h) - logn\,.\,(b + 2H)}{2\,.\,(h - H)} \right)}$$

Für einen horizontalen Boden wird $\varepsilon = o$.

§. 164. Zur Verallgemeinerung findet er auch

190.) Eine allgemeine Formel für Kanäle mit *divergirenden* und mit *konvergirenden* Wänden.

§. 165. Bis hierhin legte er die Hypothese zum Grunde, dafs die Oberfläche des abfliefsenden Wassers im Beharrungsstande eine schiefe Ebene bilde. Jetzt nahm er auch auf die Abweichung von der schiefen Ebene Rücksicht, und fand

191.) Eine allgemeine Formel mit Rücksicht auf eine der wahren Fläche näher kommende Gestalt.

§. 166. Hier

192.
193.) Abgeleitete Formeln für Kanäle mit horizontalem Boden.

§. 167. Bemerkung eines bei diesen Formeln des Verfassers eingeschlichenen Hauptfehlers.

§. 168. Es tritt zwar im Beharrungsstande in gewisser Entfernung vom Anfange des Kanals allemal der Parallelismus zwischen der Oberfläche des Wassers und dem Boden ein; aber die Formeln der französischen Hydrauliker bleiben für $H = h$ und $\varepsilon = o$ (§. 163.) unanwendbar. Daher nunmehr eine

Neue Untersuchung über die Bewegung des Wassers in regulären Kanälen. (S. §. 178.).

§. 169. Die Stelle, unterhalb dem Eintritt des obern Wassers in den Kanal, wo die wallenden Bewegungen des eingetretenen Wassers aufhören und eine nach bestimmten Gesetzen regulirte Bewegung anfängt, gilt hier als *erster* Querschnitt oder als *Anfang* des Kanals.

Unterhalb dieser Stelle kann die Geschwindigkeit noch bis zu einer bestimmten Gränze zunehmen, bis der zunehmende Widerstand der beschleunigenden Kraft gleich, also die Wassertiefe unveränderlich wird. Hier ist nun

λ die Entfernung beider Stellen von einander
$\mathfrak{h}$ die Wassertiefe am Anfange
h die Tiefe am Ende von λ.

Es kann aber unterhalb $\mathfrak{h}$ die Wassertiefe mit abnehmender Geschwindigkeit zunehmen, so dafs $h > \mathfrak{h}$ wird.

λ kann gröfser seyn als die Länge des ganzen Kanals, da dann die Bewegung im Kanale nirgends gleichförmig wird.

§. 170. Nach einer annehmbaren Hypothese wird

$$193.^{*})\quad \begin{cases} c = \varphi\,.\,\mathfrak{h}\sqrt{\dfrac{2b\,.\,(\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{(b + 2\mathfrak{h})\,.\,(h + \mathfrak{h})\,.\,\lambda}} \\ M = \varphi\,.\,bh\,.\,\mathfrak{h}\,.\sqrt{\dfrac{2b\,.\,(\varepsilon + \mathfrak{h} - h)}{(b + 2\,\mathfrak{h})\,.\,(\mathfrak{h} + h)\,.\,\lambda}} \end{cases}$$

§. 171. Für freie Kanäle ist hier *allgemein*

$$194.)\quad M^2 = 2\varphi^2\, b^3\, h^2\, \mathfrak{h}^2\,.\,\frac{\varepsilon + \mathfrak{h} - h}{(b + 2\mathfrak{h})\,.\,(h + \mathfrak{h})\,.\,\lambda}$$

ε das Gefälle des Bodens auf die Länge λ.
b ist die mittlere Breite.
c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers bei der gleichförmigen Bewegung.
$\varphi = 92$, $\varphi^2 = 8464$, in Bezug auf Pariser Fufse.
h, $\mathfrak{h}$ wie §. 169.

Für die gröfstmögliche Ausflufsmenge, also für *freie* Kanäle

$$195.)\quad h = -\frac{2\mathfrak{h} - \varepsilon}{4} + \sqrt{\left(\left(\frac{2\mathfrak{h} - \varepsilon}{4}\right)^2 + \varepsilon\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^2\right)}$$

Insbesondere für *horizontale* Kanäle

$$196.)\quad h = 0{,}62\,.\,\mathfrak{h};\qquad \mathfrak{h} = 1{,}61\,.\,h$$

und 197.) $M^2 = 3{,}16 \cdot \varphi^2 \cdot b^3 \cdot \frac{h^4}{(2{,}61 \cdot b + 8{,}40 \cdot h) \cdot \lambda}$

Siehe Nro. 427), bis 429.)

§. 172. Für *freie* Kanäle überhaupt hat man

198.) $\mathfrak{h} = -\frac{\varepsilon - h}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(5h^2 - 6\varepsilon h + \varepsilon^2)}$

Diesen Werth setzt man in Nro. 194.) um M zu finden.

§. 173. Es sey jetzt in Bezug auf freie Kanäle
L die Länge des *ganzen* Kanals
E das Gefälle des Bodens auf die *ganze* Länge

so wird 199.) $\lambda = \frac{2b \cdot (\mathfrak{h} - h)}{\frac{(b + 2\mathfrak{h}) \cdot (h + \mathfrak{h}) \cdot M^2}{\varphi^2 b^2 h^2 \mathfrak{h}^2} - \frac{2bE}{L}}$

Auch 200.) $\lambda = \frac{\varphi^2 \varepsilon b^3 h^3}{(b + 2h) \cdot M^2}$

Aus Nro. 199 wird 201.) $\lambda = \frac{2\varphi^2 b^3 h^3 \mathfrak{h}^2 \cdot (\mathfrak{h} - h)}{(bh \cdot (b + 3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 \cdot (b + h)) \cdot M^2}$

Daraus findet man 202.) $\varepsilon = \frac{2\mathfrak{h}^2 \cdot (\mathfrak{h} - h) \cdot (b + 2h)}{bh \cdot (b + 3\mathfrak{h}) - 2\mathfrak{h}^2 \cdot (b + h)}$

und $\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{(b + 2h) \cdot M^2}{\varphi^2 \cdot b^3 h^3}$

Es muſs aber $\mathfrak{h}$ (Nro. 202.) zugleich der Bestimmung Nro. 198 gemäſs genommen werden, was durch Proberechnungen geschieht.

Die Buchstaben wie §. 170.

§. 174. Findet man $\lambda > L$, so kommt das Wasser längs dem ganzen Kanale nicht zur gleichförmigen Bewegung. Setzen wir *für diesen Fall* die Länge des ganzen Kanals $= \lambda'$

Den Abhang des Bodens auf diese Länge $= \varepsilon'$

so wird 203.) $\mathfrak{h} = \frac{h - \varepsilon'}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(5h^2 - 6\varepsilon' h + \varepsilon'^2)}$

Hier wäre *h* die Wassertiefe am Ende der Länge λ' des freien Kanals.

§. 175. Bemerkung über die Wassertiefe in verschiedenen Stellen des Kanals, bevor die gleichförmige Bewegung eintritt. Jetzt noch Bemerkungen über

Versperrte Kanäle.

§. 176. Es bleibt hier
λ die Länge vom obern Theile des Kanals, soweit die Bewegung noch ungleichförmig bleibt.
ε das Gefälle des Bodens auf diese Länge.
$\mathfrak{h}$ die Wassertiefe am Anfange von λ.
h die Wassertiefe am Ende von λ.
L die Länge des *ganzen* Kanals.
E das Gefälle des Bodens auf die ganze Länge *L*.
H die Wassertiefe am Ende des Kanals bei willkührlich vorgenommener oder auch vorgeschriebener Herablassung einer Fallschütze.
$\varphi = 92$ (in Pariser Fuſsen); $\varphi^2 = 8464$.
M die in jeder Sekunde abflieſsende Wassermenge.

§. 177. In Bezug auf *Fig.* 69. ist hier
$\lambda = ab$; $\mathfrak{h} = a\alpha$; $h = b\beta$,

$m = bc$ die Länge für die gleichförmige Bewegung, also $c\gamma = b\beta$.
$u = cd$ wieder für ungleichförmige Bewegung; $c\gamma = h$; $d\delta = H$.

$$204.)\quad M^2 = 2\varphi^2\, b^3\, H^2\, h^2\, \frac{\frac{u}{L}\,.\,E + h - H}{(b+2h)\,.\,(H+h)\,.\,u}$$

$$205.)\quad M^2 = \varphi^2\,.\,\frac{E\, b^3\, h^3}{L\,.\,(b+2h)}$$

$$206.)\quad 2\,.\,\frac{E}{L}\,.\,H^2\, u + 2h\, H^2 - 2H^3 = \frac{E}{L}\,.\,h\, H\, u + \frac{E}{L}\, h^2\, u$$

$$207.)\quad u = \frac{2H^2\,.\,(H-h)}{\frac{E}{L}\,.\,(2H^2 - h\,.\,(H+h))}$$

$$208.)\quad H^3 - \left(h + \frac{E}{L}\,.\,u\right) H^2 + \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{E}{L}\,.\,u\,h\,.\,H + \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{E}{L}\,.\,h^2\, u = 0\,.$$

Eine Bemerkung zu dieser kubischen Gleichung, welche die Konsequenz des bisherigen Kalkuls beweifst.

§. 178. und 178.* Zum Beschlufse dieses Kapitels hier noch eine allgemeine Anmerkung zur Anwendung der Sätze §. 169 — 177. Man findet hier alle hierher gehörigen Berechnungen sehr erleichtert.

XII. Kapitel.

VON GESCHWINDIGKEITS - MESSUNGEN BEI FLIESSENDEN WASSERN UND DAVON ABHAENGENDEN BESTIMMUNGEN DER ABFLUSSMENGEN IN OFFENEN BETTEN.

§. 179. Die angeblich grofsen Abweichungen der Rechnungsresultate, welche die Chezysche Formel giebt (auf die auch wir gebaut haben), von Beobachtungen beruhen blos auf unrichtigen Anwendungen derselben.

§. 180. Vorzüglich tritt v. *Wiebeking* mit seinen Beobachtungen gegen *Chezy* auf. Drei bemerkenswerthe Erfahrungen von demselben, hier näher geprüft, bestätigen die Anwendbarkeit des Kalkuls.

§. 181. Beobachtungen v. *Wiebeking* über zusammengehörige Neigung der Oberfläche und Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rheinstroms.

§. 182. Beobachtung von *Brünnings* am Rheine über Gröfse und mittlere Tiefe mehrerer Profile, und über die mittlere Geschwindigkeit des Stroms in diesen Profilen.

§. 183. Es werden hier 11 Geschwindigkeitsmesser angegeben.

§. 184. Beschreibung der *Pitotschen Röhre* (*Fig.* 71.),

§. 185. Der *Woltmannsche Strommesser*, *hydrometrische Flügel* (*Fig.* 72 bis 72.**).

§. 185.* *Gauthey's* Geschwindigkeitsmesser (*Fig.* 72.***). Eine beigefügte Tafel für die Gröfse des Wasserstofses nach *Belidor*. Eine andere vom Verfasser.

§. 186. Geschwindigkeitsmessung mit schwimmenden Körpern.

§. 187. Die hydrometrische Schutzwand (*Fig.* 74.).

§. 188. Noch eine Bemerkung wegen der schwimmenden Körper und ihres Gebrauchs.

XIII. Kapitel.

VON DER BEWEGUNG DES WASSERS IN ROEHREN-LEITUNGEN.

§. 189. Hierher gehörige Kenntnisse begannen erst in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Wir betrachten hier

I. Geradausgehende durchaus gleichweite Röhren.

§. 190. Hier die schon bekannte Formel für den Ausfluſs des Wassers aus einer in der Wand eines Behältnisses angebrachten Oeffnung α durch dünne oder dicke Wände oder nur durch kurze Ansatzröhren;

$$M = (1 - k) \cdot \alpha 2 \sqrt{g h}$$

dabei ist für dünne Wände $k = 1{,}3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2 - \frac{\alpha}{W})}}\right)$

für eine dicke Wand $k = 0{,}65 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2 - \frac{\alpha}{W})}}\right)$

Siehe oben §. 131. die Tafel

h die Tiefe des Mittelpunkts der Oeffnung unter dem Wasserspiegel

Statt $1 - k$ wird in der Folge auch γ gesetzt.

§. 191. Hier ist nun vom Abfluſse durch Röhren die Rede, welche sehr vielmal, wenigstens 100 mal, so lang sind als ihr Durchmesser.

§. 192. Hier bezeichnet (*Fig.* 75.)

H die ganze Wasserhöhe ad d. h. die Höhe des Wasserspiegels (bei a) über der Ausfluſsmündung bei e.

λ Die Länge der Röhrenleitung (be).

e das Gefälle der Röhrenleitung (bd).

d Durchmesser der Röhrenl.; α die zugehörige Kreisfläche.

h Höhe des Wasserstandes im Behältnisse (ab).

c Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung.

v die zugehörige Höhe.

M Die in jeder Sekunde abflieſsende Wassermenge.

γ wie §. 190.

Der Druck gegen die Oeffnung (e) ist $= H \cdot \alpha$, weil die Atmosphäre dabei mitwirkt. Bezeichnen wir die Höhe einer mit dem atmosphärischen Druck auf die Wasserfläche im Behältnisse im Gleichgewicht stehenden Wassersäule mit q, so ist hier immer nur von Fällen die Rede, wo die Geschwindigkeit $c > 2 \sqrt{g} \cdot \gamma^2 (h + q)$ ist, was aber auch zum allgemeinen Gebrauche hinlänglich ist.

§. 193. Hier die hypothetische Gleichung

$$209.)\quad \varphi = c \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{d \cdot H}}$$

wo φ ein dergleichen Koëfficient ist, wie im vorigen Kapitel, dessen Werth aus Versuchen abgeleitet werden mufs.

§. 194. Versuche geben hier in Bezug auf Pariser Zolle

$$210.)\quad \varphi = 150;\quad \varphi^2 = 22500.$$

und nun $$211.)\quad c = 150 \, . \sqrt{\frac{d\,H}{\lambda}}$$

Vorausgesetzt, dafs λ nicht $< 100 \, . \, d$ sey.

§. 195. Die Hindernisse der Bewegung in Röhren lassen sich als entgegenwirkender Druck einer Wassersäule von einer bestimmten Höhe betrachten. Diese Höhe heifst hier die *Widerstandshöhe*; sie ist

$$212.)\quad = \frac{\lambda - 46{,}8 \, . \, d}{\lambda} \, . \, H = \frac{\lambda - 46{,}8 \, . \, d}{31{,}2 \, . \, d} \, . \, v$$

Ist ε eine von α verschiedene Oeffnung, durch welche das Wasser aus dem Behältnisse in die Röhre tritt, wie wenn sie eine Oeffnung in einer vor die Einflufsmündung befestigte durchlochte Platte wäre,

so hat man
$$213.)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{(1-k)\,.\,\varepsilon}{0{,}81\,.\,\alpha} \, . \, 150 \\[2ex] c = \dfrac{(1-k)\,.\,\varepsilon}{0{,}81\,.\,\alpha} \, . \, 150 \, . \sqrt{\dfrac{d\,H}{\lambda}} \end{cases}$$

Alles in der Bedeutung §. 192.

II. Geradeausgehende Röhrenleitungen mit wechselnder Weite.

§. 196. Jetzt ist

λ die Länge der ersten Strecke (*Fig.* 76.)
d der zugehörige Durchmesser.
α die zu d gehörige Kreisfläche
ε die Eintrittsöffnung zur ersten Röhrenstrecke
$\gamma = 1 - k$ (Siehe §. 131.) die Tafel
$\lambda', d', \alpha', \varepsilon', \gamma', k'$ dasselbe für die zweite Röhrenstrecke.
$\lambda'', d'', \alpha'', \varepsilon'', \gamma'', k''$ dasselbe für die dritte Röhrenstrecke u. s. w.
c die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhrenstrecke.
v die zu c gehörige Höhe $\left(\frac{c^2}{4g}\right)$.

und nun, wenn die Verminderung wegen des Widerstandes in den Röhren selbst noch bei Seite gesetzt wird, wegen der verschiedenen Zusammenziehungen des Wassers bei den Eintrittsöffnungen.

214.) Die erforderliche Druckhöhe für vier Röhrenstrecken =

$$\left[\left(\frac{\alpha}{(1-k)\,.\,\varepsilon}\right)^2 + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k')\,.\,\varepsilon'}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k'')\,.\,\varepsilon''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\alpha}{(1-k''')\,.\,\varepsilon'''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2\right)\right] . \, v$$

woraus das Gesetz des Fortgangs für noch mehrere Röhrenstrecken gleich ins Auge fällt.

§. 197. Wegen des Widerstandes in den Röhren selbst ist für vier Strecken

215.) Die erforderliche Druckhöhe =

$$\left(\frac{\lambda - 46{,}8 \, . \, d}{31{,}2 \, . \, d} \, . \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^2 + \frac{\lambda' - 46{,}8 \, . \, d'}{31{,}2 \, . \, d'} \, . \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \frac{\lambda'' - 46{,}8 \, . \, d''}{31{,}2 \, . \, d''} \, . \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2 + \left(\frac{\lambda''' - 46{,}8 \, . \, d'''}{31{,}2 \, . \, d'''}\right) . \left(\frac{\alpha}{\alpha'''}\right)^2\right) . \, v$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{A}$ die Druckhöhe Nro. 214.
$\mathfrak{B}$ die Nro. 215.

so wird 216.) $H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot v; \quad v = \dfrac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$

für den gewöhnlichen Fall gleich weiter Röhren ist daher, wenn wir zugleich $\varepsilon = \alpha$ nehmen.

$$217.)\quad \mathfrak{A} = 1{,}5; \quad \mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8 \cdot d}{31{,}2 \cdot d}; \; H = \frac{\lambda}{31{,}2 \cdot d} \cdot v\,.$$

$$218.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{31{,}2 \cdot d}{\lambda} \cdot H, \quad \text{genauer} = \dfrac{31{,}25 \cdot d}{\lambda} \cdot \mathrm{H} \\ c = 150 \cdot \sqrt{\dfrac{dH}{\lambda}} \end{cases}$$

Alles in Bezug auf Pariser Zolle, wenn λ wenigstens $= 100 \cdot d$ ist.

§. 198. Wie man sich zu verhalten hat, wenn eine Röhrenstrecke von einer Länge vorkommt, welche kleiner als $100 \cdot d$ ist.

III. Geradeausgehende Röhrenleitungen mit Schiedwänden. (*Fig.* 77.)

§. 199. Hier behalten die Formeln (Nro. 214 und 215.) ihre völlige Anwendbarkeit; nur wird $\alpha' = \alpha$, $d' = d$, was dann auch bei mehreren Röhrenstrecken vorkommen könnte, so daſs z. B. $\alpha''' = \alpha''$, $d''' = d''$ gesetzt werden müſste.

IV. Röhrenleitungen mit plötzlichen Wendungen. (*Fig.* 78.)

§. 200. Hier erhält man eine neue Widerstandshöhe

$$219.)\quad = \frac{\beta}{90} \cdot \left(\left(\frac{\alpha}{0{,}81 \cdot \mathfrak{w}'}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right)^2 \right) \cdot v$$ wofür zur Abkürzung $\mathfrak{C} \cdot v$ geschrieben wird.

α die Weite der ersten Röhrenstrecke.
$\mathfrak{w}$ die Weite irgend einer Röhrenstrecke (ab), welcke unter einem gegebenen Winkel (mbc) seitwärts gebrochen wird.
β die Gröſse des Brechungswinkels (mbc).
$\mathfrak{w}'$ die Weite der abgelenkten Röhre (bc)

$$220.)\quad \begin{cases} H = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \cdot v \\ v = \dfrac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}} \end{cases}$$

Die Buchstaben wie §. 196.

V. Röhren- und Springbrunnen. (*Fig.* 79.)

§. 200.* Hier ist
α die Weite der Röhrenleitung; d ihr Durchmesser.
λ ihre Länge $\alpha\beta$; H die Wasser- oder Fallhöhe (bm).
α' wird hier als Weite der Röhre von β bis m angenommen.
d' Durchmesser zu α'; λ' angenommene Länge von β bis m.
α'' die Weite der Ausfluſsröhre (bei q); d'' ihr Durchmesse
λ'' ihre Länge. M die Ausfluſsmenge für eine Sekunde.
Alles in Bezug auf Pariſser Zolle.
Sonstige Buchstaben wie §. 196., 197 und 200.

§. 201. Man erhält nun für *eine* Ausfluſsröhre (bei q)

$$221.)\quad M = \alpha \cdot \sqrt{\frac{720 \cdot H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}}}$$

dabei ist $$222.)\quad \mathfrak{A} = 0{,}5 \cdot \frac{(\alpha')^2 + \alpha^2}{(\alpha')^2} + 1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2$$

$$223.)\quad \mathfrak{B} = \frac{\lambda - 46{,}8 \cdot d}{31{,}2 \cdot d} + \frac{\lambda'}{59 \cdot d} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \frac{\lambda''}{59 \cdot d''} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2$$

$$224.)\quad \mathfrak{C} = \left(1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)^2 - 1\right) + \left(1{,}5 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2\right)$$

§. 202. Hätte man n Ausflufsröhren von gleiche Länge und Weite, so würde

$$225.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = 0{,}5 \cdot \dfrac{(\alpha')^2 + \alpha^2}{(\alpha')^2} + 1{,}5 \cdot \left(\dfrac{\alpha}{n \cdot \alpha''}\right)^2 \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\lambda - 46{,}8 \cdot d}{31{,}2 \cdot d} + \dfrac{\lambda'}{59 \cdot d'} \cdot \left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 + \dfrac{n \cdot \lambda''}{59 \cdot d''} \left(\dfrac{\alpha}{n \cdot \alpha''}\right)^2 \end{cases}$$

$\mathfrak{C}$ kann hier $= o$ gesetzt werden.

Noch eine Bemerkung zur Sicherheit der Rechnung.

Bisher von den Röhren — jetzt von den Springbrunnen.

§. 203. Hierher gehörige Benennungen. (*Fig.* 80.)

§. 204. Hier ist

H wie vorher die Fallhöhe (bm).

h die Strahl- oder Sprunghöhe (nm).

c'' die Geschwindigkeit, mit welcher die Wassertheilchen die Sprungöffnung verlassen.

v'' die dieser Geschwindigeit zugehörige Höhe.

Nach *Mariotte's* Versuchen ist unter den günstigsten Umständen, welche die gröſste Strahlhöhe geben,

$$226.)\quad h = v'' - \frac{h^2}{300} \text{ in Bezug auf Pariser Fuſse.}$$

Allgemein wird
$$227.)\quad v'' = \left(\frac{\alpha}{(1 - k'') \cdot \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$$

Die Bedeutung wie §. 200.*; k'' nach der Tafel §. 131.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ wie Nro. 225.)

$$228.)\quad h = \left(\frac{\alpha}{(1 - k'') \cdot \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} - \frac{h^2}{300}$$

Daher
$$229.)\quad h = -150 + \sqrt{22500 + \left(\frac{\alpha}{(1 - k'') \cdot \alpha''}\right)^2 \cdot \frac{300 \cdot H}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}}$$

wo sich k'' auf die Oeffnung α'' bezieht.

VI. Hierher gehörige Formeln von *Dubuat* und *Prony*.

§. 205. *Dubuat* findet durch viele Künsteleien die selbst bis zu Haarröhrchen genügend seyn sollende Formel für die Bewegung in Röhrenleitungen

$$230.)\quad c = \frac{297 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)}{\sqrt{b} - logn \cdot (\sqrt{b} + 1{,}6)} - 0{,}3 \cdot (\sqrt{r} - 0{,}1)$$

in Bezug auf Pariser Zolle.

Dabei ist $r = \dfrac{\alpha}{3{,}14 \cdot d}$; $b = \dfrac{\lambda}{H - \dfrac{c^2}{470}}$

c die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren.

λ, H wie bisher.

§. 206. Nach *Prony* ist für die Bewegung des Wassers in Röhren

$$231.)\quad \tfrac{1}{4} g\, d\, j = \alpha\, U + \beta\, U^2$$

oder in bisherigen Bezeichnungen

$$232.)\quad \tfrac{1}{2} g\, d \cdot \frac{H}{\lambda} = \alpha\, c + \beta\, c^2$$

und alles in Metern ausgedruckt,

$$233.)\quad 2{,}452198 \cdot \frac{dH}{\lambda} = \alpha c + \beta c^2$$

Dabei $234.)\quad \alpha = 0{,}00017; \quad \beta = 0{,}003416$

$$235.)\quad c = -0{,}0248829 + \sqrt{\left(0{,}000619159 + 717{,}857 \cdot \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

In Bezug auf Pariser Fuſse hat man

$$236.)\quad c = -0{,}0766 + \sqrt{\left(0{,}005868 + 2209 \cdot \frac{dH}{\lambda}\right)}$$

VII. Röhrenleitungen über Anhöhen. (*Fig.* 81.)

§. 207. Durch eine bloſse Röhrenleitung soll durch natürlichen Abfluſs, d. h. ohne Beihülfe einer Maschine, Wasser, dessen Spiegel in der horizontalen Ag liegt, von A aus über die Anhöhe $Aabcdmn$ bis in e herabgeleitet werden, so daſs e unter Ag liegt.

§. 208. Hier zur Bestimmung der Mitwirkung der Atmosphäre die Angaben

Nro. 237.) und Nro. 238.)

§. 209. Bedingung zur wirklichen Anwendung.

§. 210. Zur Leitung des Wassers von A bis zu einer willkürlich angenommenen Stelle n wird erfordert 1) daſs die lothrechte co gröſser als die cf sey; 2) $cf < 14 . \mathfrak{H}$, unter $\mathfrak{H}$ die Barometerhöhe verstanden.

Hier wird wie bisher die zur Geschwindigkeit des Wassers gehörige Höhe $v = \frac{H}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}$ so lange diese Höhe einen bestimmten Werth von v nicht übersteigt. Diesen gröſsten Werth bezeichnet

die Formel Nro. 239.)

§. 211. Eine solche Röhre, sey sie 10 Zolle oder 10000 Fuſs lang, heiſst ein Heber. Seine Wirkung läſst sich noch vergröſsern.

VIII. Festigkeit der Röhren. (*Fig.* 82.)

§. 212. Hierher gehörige Erörterungen, und hieraus abgeleitete Formel.

Nro. 240.) Für die Druckhöhe an einer bestimmten Stelle der inneren Wandfläche, in jeder Tiefe.

§. 213. und Nro. 241.) Für diejenige Druckhöhe, für welche die erforderliche Festigkeit der Röhre an einer gegebenen Stelle berechnet werden muſs.

$$242.)\quad \Delta = \frac{\mu . K . d}{K' . d'} . \Delta'$$

d' der Durchmesser einer Röhrenleitung in *Zollen*.
Δ' die hinlänglich befundene Dicke der Röhrenwand in *Linien*.
K' die Höhe des Wasserspiegels über der tiefsten Stelle einer zugespundeten Röhrenleitung in Fuſsen.
d der Durchmesser einer andern Röhrenleitung
K die Höhe des Wasserspiegels im Behältniſse über einer willkührlich angenommenen Stelle der zweiten Röhrenleitung.
Δ hinlängliche Wanddicke dieser Röhrenleitung in der Tiefe K.
μ das specifische Gewicht desjenigen Fluidums, womit die zweite Röhrenleitung angefüllt werden soll.

§. 214. Aus der Erfahrung folgt

Für gegossene eiserne Röhren $242.^{*})\quad \Delta = \frac{\mu . K . d}{200}$ Linien.

Für büchene............. 243.) $\Delta = \frac{\mu K d}{112}$ Linien

Für fichtene und Förlene.... 244.) $\Delta = \frac{\mu K d}{4}$ —

Einige hinzugefügte Bedingungen.

§. 215. Hier

IX. Technische Bemerkungen. Siehe XXIX. Kapitel.

XIV. Kapitel.

VOM NIVELLIREN ODER WASSERWAEGEN.

§. 216. Hierher gehörige Schriften.

§. 217. *Wahre* und *scheinbare* Horizontalflächen, Horizontallinien.

§. 218. Bei Wasserleitungen kommt es auf wahre Horizontallinien an.

§. 219. Wenn *Bd* (*Fig.* 84.) eine scheinbare Horizontallinie ist, und die (durch den Mittelpunkt der Erde *K* laufende) lothrechte *dn* die zu *B* gehörige wahre Horizontalfläche in *m* schneidet, so hat man

245.) $dm = \frac{dB^2}{2 \cdot BK}$. Dabei $BK = 19630764$ Pariser Fuſs.

§. 220. *mn* (*Fig.* 84.) ist das Gefälle von *B* bis *n*, also

246.) Gefälle $mn = dn - \frac{dB^2}{2 \cdot BK}$

§. 221. Die Abweichung einer aus sehr vielen aber kurzen scheinbaren Horizontallinien (*ab*, *bc*, *cd* *etc. Fig.* 85.) zusammengesetzten (*ag*) von der wahren (*aμ*) ist unbedeutend.

Hierher gehörige Werkzeuge.

§. 222. Einrichtung und Gebrauch der *Setzwage.* (*Fig.* 86 und 87.)

§. 223. Fernere Erläuterung. (*Fig.* 88.)

§. 224. Einrichtung des Nivellementsverzeichnisses.

§. 225. *Nivellirdocken* zur Setzwage. (*Fig.* 89 und 90.)

§. 226. Der *Hängebogen* und sein Gebrauch. (*Fig.* 91, 92 und 93.)

§. 227. Der *Gradbogen.* Sein Gebrauch geht schneller von Statten. (*Fig.* 94.)

§. 228. Die *Visirmethode.* Sie ist die kürzeste.

§. 229. Wie beim horizontalen Visiren die *Abweichung wegen der Refraktion der Lichtstrahlen* in Rechnung kommt. Hierzu

Die Formel Nro. 246.*)

Auch die Korrektion bei einer schiefen Visirlinie.

§. 230. Hierzu nöthige Anstalten. Auch

Nro. 247.) Formel für das Fallen.

§. 231. Verbindung des Fernrohres mit einer *Libelle.* Eigenschaften einer Libelle. Schwierigkeit, ein solches Werkzeug in der erforderlichen Vollkommenheit zu erhalten. Bedingung, unter welcher auch ein nicht ganz fehlerfreies Werkzeug Punkte in wahrer Horizontallinie abzuvisiren gebraucht werden kann.

§. 232. Höhemessungen mit dem Barometer. (*Fig.* 100.) Vormals begnügte man sich mit der Formel

248.) Lothrechte Höhe $Bb = (log . p - log . q) . 10000$ Toisen.
Eine Toise zu 6 Pariser Fuſse.
Die Logarithmen sind die gemeinen (briggischen).
p die Barometerhöhe unten bei A in Pariser Linien.
q die Barometerhöhe in B.
Nach *De Luc* setzt man

$$249.)\quad Bb = 10000 . (l\,p - l\,q) . \left(+ \frac{32{,}5 - (k + k')}{2 . 215}\right)$$

k ist der Wärmegrad bei A in Réaum. Graden zur Zeit der Beobachtung.
k' — — — — bei B.
Nach *Trembley*, was *Prony* vorzieht, ist

$$250.)\quad Bb = 10000 . (l\,p - l\,q) . \left(1 + \frac{23 - (k + k')}{2 . 192}\right).$$

Keine Methode giebt völlige Schärfe.

§. 233. Eine Tafel zur Korrektion abvisirter Höhen, sowohl in bloſsem Bezug auf die Kugelgestalt der Erde, als auch zugleich mit Rücksicht auf die Refraktion der Lichtstrahlen.

XV. Kapitel.

WIRKUNGEN DES WASSERSTOSSES.

§. 234. *Stoſs* ist nur *momentane* Wirkung einer Masse; er wird geschwächt, wenn die Wirkung in eine *successive* verwandelt wird d. h. wenn die in der Masse enthaltenen Theile *nicht gleichzeitig mit einmal* sondern erst *in nach einander folgenden Zeittheilchen* ganz auf einen andern Körper wirken.

§. 235. *Isolirter Strahl*, *begrenztes* Wasser, *unbegrenztes*. *Normalstoſs*, *Parallelstoſs*, *Seitenstoſs*. *Senkrechter* und *schiefer* Stoſs. *Absoluter* und *relativer* Stoſs. *Zentralstoſs*.

§. 236. Für den *isolirten* Strahl ist (*Fig.* 102.)

$$251.)\quad p = \frac{C - c}{2g} . M$$

$$252.)\quad c = C - \frac{2pg}{M}$$

C Die Geschwindigkeit, welche die Theilchen des Strahls an der Stelle des Stoſses haben würden, wenn der den Stoſs aufnehmende Körper nicht vorhanden wäre.
c die Geschwindigkeit, mit welcher die Stoſsfläche nach der Richtung des Strahls (d. h. seiner Axe) ausweicht.
M die in 1 Sekunde mit dem Strahl abgeführte Wassermenge.
p die Gröſse des senkrechten Wasserstoſses oder die Gröſse der Kraft, mit welcher die dem Strahle senkrecht entgegen gesetzte Stoſsfläche dem Strahl entgegen gedruckt werden müſste, um in Ruhe erhalten zu werden.
g die bekannte Zahl 15,09 oder 15,1 in Bezug auf Pariser und 15,625 in Bezug auf rheinländische Fuſse.

Wird M in Pfunden ausgedruckt, so erhält man auch p in Pfunden.

Bezieht sich M auf Kubikfuſs, so erhält man auch p in Kubikfuſsen Wassers, deren Gewicht die Gröſse der Kraft p in Pfunden giebt.

§. 237. Die ganze Wirkung läſst sich aus einem *hydrostatischen* und einem *hydraulischen* zusammensetzen. Auch hat man

$$252.^{*})\quad p = 2\,(H - \sqrt{Hh})\,.\,w$$

H, h die den Geschwindigkeiten C, c zugehörigen Höhen $\left(\frac{C^2}{4g}, \frac{c^2}{4g}\right)$.

w der natürliche Querschnitt des Strahls $\left(\frac{M}{C}\right)$

§. 238. Hinlängliche Bestätigung der Formel Nro. 251., durch Versuche des Verfassers. (*Fig.* 105.)

§. 239. Versuche von *Dubuat*.

§. 240. Erscheinungen bei *Dubuat's* Versuchen.

§. 241. *Schiefer* Stoſs des isolirten Strahls. (*Fig.* 108.) Für die Gröſse des Normalstoſses N (nach $\gamma\delta$) wird

$$253.)\quad N = p\,.\,Sin.\,\mu$$

p wie Nro. 252.*)
μ der schiefe Winkel $\alpha\beta b$.

Für den *Parallelstoſs* P (nach $\alpha\zeta$)

$$254.)\quad P = p\,.\,Sin\,\mu^2\,.$$

Für den *Seitenstoſs* S (nach γv)

$$255.)\quad S = p\,.\,Sin\,\mu\,.\,Cos\,\mu\,.$$

Ohne groſsen Fehler wird nun

$$256.)\quad p = \frac{C - c}{2g}\,.\,M\,.\,Sin.\,\mu^2$$

Für die Ausübung zur Sicherheit

$$257.)\quad p = 0{,}9\,.\,\frac{C - c}{2g}\,.\,M\,.\,Sin.\,\mu^2$$

§. 242. Für den Stoſs des *begrenzten Wassers* (im Gerinne *Fig.* 103,)
Eine vorläufige Bestimmung; Hier noch ohne Anwendung.

§. 243. Schwierigkeit hierher gehöriger Bestimmungen für die Ausübung. Weitere Betrachtungen kommen bei den unterschlächtigen Wasserrädern vor.

§. 244. Senkrechter Stoſs des unbegrenzten Wassers. Hier die Formel

$$258.)\quad p = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2 + 5}\right)\cdot\frac{C^2}{4g}\,.\,W$$

in Bezug auf eine *ruhig stehende* Fläche (*Fig.* 109.), aus Beobachtungen von *Woltmann* abgeleitet.

Uebereinstimmung mit einer Beobachtung von *Dubuat* für den *Widerstand* des Wassers.

p wie Nro. 252.*)
W die Gröſse der Stoſsfläche unter dem Wasser.

§. 245. Für eine Stoſsfläche, die mit der Geschwindigkeit c nach der Richtung des flieſsenden Wassers ausweicht, ist für den senkrechten Stoſs

$$259.)\quad p = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2 + 5}\right)\cdot\frac{C\,.\,(C-c)}{4g}\,.\,W$$

§. 246. *Schiefer* Stoſs und Widerstand des unbegrenzten Wassers (*Fig.* 110^a^)

$$260.)\quad \mathfrak{p} = \frac{(1 - Sin\,\mu)\,.\,p + (1 + Sin\,\mu)\,.\,p\,.\,Sin\,\mu^2}{2}$$

p beim *Stoſse* wie Nro. 259.), wodurch dann W in die Formel kommtt; beim *Wider-*

stande wird 2 statt 3,8 gesetzt.

μ der schiefe Stoſswinkel (*a b e*).

C die Geschwindigkeit des Wassers (oder auch der Stoſsfläche in ruhig stehendem Wasser).

c die Geschwindigkeit, mit der die Stoſsfläche nach der Richtung des flieſsenden Wassers ausweicht.

$\mathfrak{p}$ die Gröſse des Stoſses oder auch des Widerstandes.

Bei Berechnung des Widerstandes einer bewegten Fläche in ruhig stehendem Wasser wird $c = o$ gesetzt.

W (im Werthe von *p*) die senkrechte Projektion der schiefen Fläche (also hier nicht nach *b e* sondern nach *b m* genommen).

$$261.)\quad p = \left(1 + \frac{2}{(C-1)^2 + 5} \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot W\right.$$

W der senkrechte Querschnitt (hier also nicht *b e* sondern *b m*.)

§. 247.[a] Eine Tafel zur Vergleichung der Formel (Nro. 260) mit Beobachtungen. Auch hier eine noch genügendere Formel

$$262.)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p} = \dfrac{(1 - Sin\,\mu)\,.\,p + (1 + Sin\,\mu)\,.\,p\ Sin\,\mu^2}{2} \\ \quad + \dfrac{p\,.\,(1 - 5\,.\,Sin\,\mu^2)}{32\,.\,(1 + Sin\,\mu)}\,.\,logbr.\,\dfrac{10000\,.\,Sin\,\mu^2 + 1}{10001} \end{array}\right.$$

Unbrauchbarkeit der von *Bossut* angegebenen Formel, für $p = 10000$,

$$\mathfrak{p} = 10000\,.\,Sin\,\mu^2 + 3{,}153\,.\left(\frac{90-\mu}{6}\right)^{3\frac{1}{4}}$$

Noch hierher gehörige Schriften.

§. 247.[b] Neue Versuche von *Morosi*. Umgebung der Stoſsfläche mit Leisten vergröſsert den Stoſs.

XVI. Kapitel.

AËROMETRISCHE ODER PNEUMATISCHE UNTERSUCHUNGEN.

§. 247.[c] Die Stoffe, von welchen hier die Rede ist, sind 1) die atmosphärische Luft; 2) der Wärmestoff; 3) die Wasserdämpfe.

§. 247.[d] Specifisches Gewicht der Luft.

§. 247.[e] Preſsbarkeit und Expansivkraft der Luft.

§. 247.[f] Das Barometer.

§. 247.[g] Vom Höhemessen durch das Barometer. — Noch hierher gehörige Schriften.

XVII. Kapitel.

FORTSETZUNG PNEUMATISCHER UNTERSUCHUNGEN — INSBESONDERE VOM WAERMESTOFF.

§. 247.[f'] Das Thermometer im Allgemeinen.
§. 247.[g] Das *Fahrenheitsche.*
§. 247.[h] Das *Réaumursche.*
§. 247.[i] Das Thermometer von *De l'Isle*, und das *schwedische* von *Celsius.*
§. 247.[k] Bestimmung des Fundamentalabstandes bei einem Thermometer.
§. 247.[l] Vergleichung verschiedener Barometer.
§. 247.[m] Ausdehnung des Wassers bei verschiedenen Wärmegraden.
§. 247.[n] Die Expansivkraft des Wärmestoffs ist unermeſslich groſs.
§. 247.[o] Die Expansivkraft der Dämpfe nach *Betancourt* und *v. Schmidt*
Nach Letzterem ist

$$263.)\quad e = t^{1{,}4113 + 0{,}005\,.\,t}$$

e die Quecksilberhöhe unter der Torricellischen Leere, welche mit der Expansivkraft der Wasserdämpfe im Gleichgewicht ist, in Hunderttheilen eines Pariser Zolles.

t die Anzahl Grade, welche die Temperatur der Dämpfe nach einem 100 theiligen Quecksilber Thermometer angiebt.

§. 247.[p] Vergleichung der Dichtigkeiten der Wasserdämpfe und der Luft.
§. 248. Verschiedene Maaſse der Ausdehnung der Luft bei verschiedenen Graden der Feuchtheit und der Temperatur.
§. 249. Hygrometer, Manometer, Eudiometer.
§. 250. Hierher gehörige Schriften.

ANWENDUNG
DER VORGETRAGENEN ALLGEMEINEN LEHREN AUF DEN BAU UND DIE WIRKUNG NUETZLICHER MASCHINEN.

XVIII. Kapitel.

ALLGEMEINE BEMERKUNGEN UEBER MASCHINEN UEBERHAUPT.

§. 251. Einfache und zusammengesetzte Maschinen. — Drei Abtheilungen von Maschinen.

§. 252. Eintheilung der Maschinen in Maschinen *gleichförmigen Beharrungsstandes* und Maschinen *ungleichförmigen Beharrungsstandes*. — *Kraftpunkt*, *Lastpunkt*, *reducirte Kraft*, *reducirte Last*.

§. 253. Ungleichförmig wirkende Maschinen werden durch *Ueberwucht*; gleichförmig wirkende durch die Trägheit im Beharrungsstande erhalten.

§. 254. *Nutzlast* und *Nebenlast*; *Totaleffekt*, *Nebeneffekt*, *Nutzeffekt*.
Hier die Formeln

264.) $E = c \cdot K$

265.) $E' = c \cdot K'$

266.) $e = c \cdot k = c \cdot (K - K')$

267.) $e = \frac{b}{t} \cdot k = \frac{b}{t} \cdot (K - K')$

E der Totaleffekt.
K der gesammte Widerstand im Lastpunkte.
c die Geschwindigkeit des Lastpunktes.
E' der verlorne Effekt.
K' die reducirte Nebenlast.
e der Nutzeffekt
k die Nutzlast.
b der Weg, welchen der Lastpunkt in der Zeit
t durchlauft.

§. 255. Hier die Formeln

268.) Bei gleichförmig wirkenden Maschinen
$P \cdot C = c \cdot K; \quad E = P \cdot C$

269.) Bei ungleichförmig wirkenden Maschinen
$(P - V) \cdot C = c \cdot K; \quad E = (P - V) \cdot C.$

270.) Der Nutzeffekt bleibt auch hier
$e = cK - cK' = (P - V) \cdot C - cK'$

271.) Verhältnifszahl für die Vollkommenheit einer Maschine
$$\frac{(P - V - p) \cdot C}{cK}$$

272.) Für die gröfstmögliche Vollkommenheit einer Maschine ist
$$\frac{[P - (V + p)] \cdot C}{ck} = 1$$

P die Kraft am Kraftpunkte.
C die Geschwindigkeit des Kraftpunktes.
K wie vorhin.
c wie vorhin.
E wie vorhin der Totaleffekt
V die in P mit enthaltene Ueberwucht.
p die auf den Kraftpunkt reducirte Nebenlast.
K' wie vorhin die auf den Lastpunkt reducirte Nebenlast.
e wie vorhin der Nutzeffekt.

§. 256. Vergröſserung des Nutzeffekts durch angebrachte Schwungmassen und durch Minderung des statischen Moments der Nebenlast. Eine Maschine ist zuweilen *übersetzt*.

§. 257. In der praktischen Maschinenlehre können wir keine genaue Resultate erwarten.

§. 258. Wie Rücksicht auf die Reibung rein mathematische Formeln abändert. Anwendung auf die Nro. 41. Mit Rücksicht auf die Reibung erhält man, wenn μ der Reibungskoëfficient ist,

273.) $p = (Sin\ a - \mu\ .\ Cos\ a)\ .\ M$ wo p statt P gesetzt ist.

274.) $p' = P' - (Sin\ a + \mu\ .\ Cos\ a)\ .\ M$

P' ist eine längs der schiefen Ebene nach vs (*Fig.* 27.) angebrachte bewegende Kraft.
p' die bewegende Kraft, mit welcher jetzt der schwere Körper, dessen Gewicht M ist, nach vs zu steigen strebt.

275.) $$\mathfrak{P} = \frac{(Sin\ a - \mu\ .\ Cos.\ a)\ .\ M}{Cos.\ a + \mu\ .\ Sin.\ a}$$

$\mathfrak{P}$ die Kraft, welche am Körper M nach horizontaler Richtung vu nöthig ist, um ihn in Ruhe zu erhalten.

276.) $$\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}' - \frac{(Sin.\ a + \mu\ .\ Cos.\ a)\ M}{Cos.\ a - \mu\ .\ Sin.\ a}$$

$\mathfrak{P}'$ eine nach vu angebrachte horizontale Kraft.
$\mathfrak{p}'$ die bewegende Kraft, mit welcher jetzt der schwere Körper M nach vs zu steigen strebt.

277.) Der gesammte lothrechte Druck in B nach Bk §. 65. (*Fig.* 43.)
$$= Q\ .\ \left(Sin.\ \alpha^2 - \mu\ .\ \frac{Br}{BA}\ .\ Cos\ \alpha\ .\ Sin\ \alpha + \frac{Ar}{AB}\ .\ Cos.\ \alpha^2\right)$$

278.) Gröſse des Drucks oder Schubs nach BH
$$= \frac{Br}{BA}\ .\ Q\ .\ (Sin.\ \alpha - \mu\ .\ Cos\ \alpha)\ .\ Cos\ \alpha$$
$$- \mu\ Q\ .\ \left(Sin\ \alpha^2 - \frac{Br}{BA}\ .\ Cos\ \alpha\ .\ Sin\ \alpha + \frac{Ar}{AB}\ .\ Cos\ \alpha^2\right)$$

Q das Gewicht eines an die lothrechte Wand CA unter dem Winkel α schief angelehnten Balkens Bo, so daſs er über die Wand weglauft.
r ist der in der Zeichnung angenommene Schwerpunkt.

XIX. Kapitel.

VOM PHYSISCHEN HEBEL, DER ROLLE, DER RAMM-MASCHINE UND DEN FLASCHENZUEGEN.

§. 259. Hier für den Zustand des Gleichgewichts zwischen Kräften am Hebel die Formeln (*Fig.* 110^e^).

279.) $c\mathfrak{s}\ .\ S + cf\ .\ P' + ce\ .\ P = cd\ .\ Q$

180.) $ac.(P + P' + Q + S) = ae\ .\ P + af.P' + ad.\ Q + as\ .\ S$

Die Bedeutung ergiebt sich aus der Zeichnung.

Setzt man ac (*Fig.* 110^e^) $= x$, so wird

$$281.)\quad x = \frac{ac \,.\, P + af \,.\, P' + ad \,.\, Q + as \,.\, S}{P + P' + Q + S}$$

$$282.)\quad y = \sqrt{\frac{2 \,.\, (cd \,.\, Q + \tfrac{1}{2}\, cb^2 \,.\, p - cf \,.\, P' - ce \,.\, P)}{p}}$$

y die Länge des Arms *ca* (*Fig.* 110.[f])

§. 260.[a] Bemerkung wegen der Unbeugsamkeit der Hebelärme.

§. 260.[b] Verschiedene Arten von Wagen, und ihre Theile; Krämerwagen und Schnellwagen; richtige und falsche.

§. 260.[c] Empfindliche und faule Wagen.

§. 260.[d] Theorie der Krämerwage. (*Fig.* 110.[n])

§. 260.[e] Eine Bemerkung zur Einrichtung empfindlicher Wagen.

§. 260.[f] Eine Bemerkung in Bezug auf nöthige Genauigkeit bei Wagen.

§. 260.[g] Der Wagbalken berührt sein Unterlager nie in einer geometrischen, sondern in einer physischen Linie, was einigen Einfluſs auf die Genauigkeit der Wage hat.

§. 260.[h] Zusammenstellung der Forderungen zur Empfindlichkeit und Genauigkeit einer Wage. (*Fig.* 110.[o] und 110.[p])

§. 260.[i] Apparat zu Krämerwagen kleinerer Art. (*Fig.* 110.[q])

§. 260.[k] Bei einer Schnellwage ist der Wagbalken ein ungleicharmiger Hebel. (*Fig.* 110.[r])

§. 260.[l] Die sogenannte *Brückenwage*, eine neue Art von Schnellwagen, von Hrn. *Quintenz* in *Straſsburg*. Tab. VIII. *Fig. A* bis *O*.

§. 260.[m] Vorläufige Beschreibung dieser Wage, und Bedingung ihrer Richtigkeit.

§. 260.[n] Mehrere Bestimmungen für den Zustand des Gleichgewichts zwischen Gewicht und Waare.

§. 260.[o] Ausführliche Beschreibung dieser Wage nach allen ihren Theilen mit den zugehörigen Zeichnungen.

§. 260.[p] Umständliche Beschreibung des *Regnier'schen Kraftmessers* mit einer wesentlichen Verbesserung. (*Fig.* 110[n] bis 110[q]. Tab. XXIII.)

§. 260.[q] Beschreibung eines schon sehr alten höchst einfachen *Teutschen Kraftmessers*, (*Fig.* 110.[w] Tab. XXIV.) — *Englischer Kraftmesser.* (*Fig.* 110.[x] Tab. XXIV.)

§. 261. Die *Rolle.* Zweierlei Arten von Rollbewegung. Die um eine feste Axe verdient den Vorzug. (*Fig.* 110.[h] bis 110.[m]

Sie ist entweder als Scheibe geformt oder nur aus Kranzstücken zusammengesetzt, die mit einer Welle verbunden sind.

§. 262. Hier zwischen Kraft und Last an der Rolle die Formeln

$$283.)\quad P = \frac{(R + 0{,}5 \,.\, r) \,.\, (R + 0{,}85 \,.\, \delta)}{R^2} \,.\, Q \text{ (S. §. 119.)}$$

in Bezug auf *Fig.* 54.[a]

$$284.)\quad P = \frac{R + \mu r}{R - \mu r} \,.\, \frac{R + (0{,}5 + \frac{\alpha}{90^0} \,.\, 0{,}35) \,.\, \delta}{R + 0{,}5 \,.\, \delta} \,.\, Q \text{ (§. 119.)}$$

in Bezug auf *Fig.* 54.[b]

Zur Abkürzung der Rechnung kann man aber auch

$$285.)\quad P = \frac{R + 0{,}5 \,.\, r + 0{,}01 \,.\, \alpha \,.\, \delta}{R} \,.\, Q$$

setzen.

R, *r* die Halbmesser der Rolle und der Rollzapfen.

§. 263. Wenn *Q* die an der Rolle aufzuziehende Last in Cölln. Pfunden bezeichnet, und *N* die Anzahl der hierzu erforderlichen Arbeiter, so kann man in der Ausübung ohne Bedenken, das Gewicht der Seilstücke bei Seite gesetzt,

$$286.)\quad N = 0{,}0376 \,.\, Q$$

setzen.

Dabei wird eine wirkliche tägliche Anstrengung von 8 Stunden angenommen, und eine Geschwindigkeit von 2,4 rheinl. Fufsen.
Mit gehöriger Rücksicht auf das Gewicht der Seilstücke hat man für die Ausübung

$$287.)\quad N = 0{,}0376 \,.\, (Q + \tfrac{2}{3} S - \tfrac{1}{3} s)$$

S das gröfste Gewicht des Seilstücks auf der Lastseite.
s das auf der Kraftseite.

§. 264. Rolle mit Haspel und Wirbel. (*Fig.* 111.)

§. 265. Gebrauch der Rollen zur Abänderung der Richtung der Bewegung. (*Fig.* 112.)

§. 265.[a] Eine wichtige Anwendung der Rolle.

§. 265.[b] — 265.[g] Beschreibung verschiedener *Rammmaschinen. Fig.* 112[a] bis 112.[c]

§. 266. Gebrauch der Rollen zur Vergröfserung der Geschwindigkeit. (*Fig.* 113.)

§. 267. Gebrauch der Rollen zur Verminderung des stat. Moments der Last.

$$288.)\quad P = \tfrac{1}{2}\, Q \,.\, Cosec.\, edm \,. \quad (Fig.\ 114.)$$

P die Kraft, welche nach de ziehen mufs, um die Last Q ruhig zu erhalten.

$$289.)\quad P = \tfrac{1}{2}\, Q, \text{ wenn } ba\,,\ de \text{ lothrecht werden}$$

Das Seil, woran die Last Q hängt, kann durch keine endliche Kraft in die horizontale Lage gespannt werden.

§. 268. *Flaschenzüge.* (*Fig.* 115.) zeigt einen Flaschenzug mit einrolligen Flaschen.

§. 269. Eintheilung der Flaschenzüge in symmetrische und unsymmetrische. (*Fig.* 116. und 117.) Noch andere Einrichtungen (*Fig.* 118[a], 118[b] und 118.[c])

§. 270. Für einen Flaschenzug mit m Rollen wird mit Beiseitsetzung der Nebenlast

$$290.)\quad P = \frac{Q}{m}.$$

Mit Rücksicht auf Reibung und Steifigkeit des Seils, wenn solche mit überwunden werden sollen.

$$291.)\quad P = \frac{(R + 0{,}5\,.\,r)\,.\,(R + m\,.\,0{,}85\,.\,\delta)}{R^2} \,.\, \frac{Q}{m}$$

Soll die Last nur ruhig erhalten werden, so kommt die Nebenlast zu Hülfe und es genügt

$$292.)\quad P = \frac{(R - 0{,}5\,.\,r)\,.\,(R - m\,.\,0{,}85\,.\,\delta)}{R^2} \,.\, \frac{Q}{m}$$

Genauer erhält man durch viel weitläuftigere Untersuchungen statt Nro. 291.)

$$293.)\quad P = \frac{1 - \left(\frac{R - \mu r}{A}\right)^2}{\left(\frac{R - \mu r}{A}\right)^2 \,.\, \left(1 - \left(\frac{R - \mu r}{A}\right)^m\right)} \,.\, \tfrac{1}{2}\, Q$$

Dabei ist $A = R + \mu r + \dfrac{0{,}35\,.\,\delta}{R + \frac{1}{2}\delta}$

Aber die gröfsere Genauigkeit ist hier von keinem Werthe.

§. 271. Auch hier verhält sich, wenn unter der Last der gesammte Widerstand begriffen wird, beim Gleichgewicht die Kraft zur Last, wie der Weg der Last zum gleichzeitigen Wege der Kraft. — Verbindung mehrerer Flaschenzüge. (*Fig.* 119.)

XX, Kapitel,

DAS RAD AN DER WELLE, DIE KRAHNEN, HASPELN, FUHRWERKE UND WELLEN OHNE SEIL UND OHNE RAD.

§. 272. *Rad an der Welle*, insbesondere *Haspel*.

§. 273. Acht Arten von Haspeln. — Die Zapfen der Rundbäume. — Haspelstützen. (*Fig.* 122, 123 und 124.)

§. 274. Der *Kreuzhaspel*. (*Fig.* 120 und 121.) — Sein Effekt.

§. 275. Das *Hornrad*. (*Fig.* 125 und 126.) — Es leistet etwas mehr als der Kreuzhaspel.

§. 276. Das *Spillenrad*. (*Fig.* 127 bis 129.)

§. 277. Das *Kettenrad*. (*Fig.* 130.)

§. 278. Der *Hornhaspel*. (*Fig.* 131 und 132.)

§. 279. Bemerkungen über die Kurbel.

§. 280. Mittel, das mit den Kübeln in den Schächten hinabhängende Seil als Gewicht unschädlich zu machen. — Hierher gehörige Berechnungen. (*Fig.* 134 und 135.)

§. 281. Nach einer hier angestellten Vergleichung ist der Nutzeffekt bei einem cylindrischen Rundbaume gröſser als bei einem konischen.

§. 282. Den gröſsten Effekt Gewinnt man mit einem Hornhaspel, dessen Kübel durch ein Verbindungsseil zusammenhängen.

§. 283. Vergleichung der Effekte *ohne* und *mit* einem Verbindungsseile.

§. 284. Der konische Rundbaum leistet, wo nur ein Kübel herabhängt, mehr als der cylindrische.

§. 285. Das *kleine Laufrad*. (*Fig.* 136.)

§. 286. Hier für den Zustand des Gleichgewichts oder für gleichförmige Bewegung

$$294.)\quad Q = \frac{e\,\mathfrak{p} - \mu\,.\,\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{P}}{r + \frac{1}{2}\delta} - q$$

$\mathfrak{P}$ das Gewicht des Laufrades samt Seil, Kübel, Mensch und Ladung.
$\mathfrak{p}$ das alleinige Gewicht des im Rade angestellten Arbeiters.
e seine Entfernung vom lothrechten Halbmesser.
r der Halbmesser der Welle.
$\mathfrak{r}$ der Halbmesser der Wellzapfen.
δ der Durchmesser des Seils.
} Alles in Fuſsen oder in Zollen ausgedruckt.
Q die Nutzlast.
q die Nebenlast auf die Stelle der Nutzlast reducirt.
μ wie immer der Reibungskoëfficient.

Erhebt sich der Mensch um den Bogen α von der tiefsten Stelle des Rades, so daſs eine lothrechte Linie von seinem Schwerpunkte herab diesen in Graden ausgedruckten Bogen abschneidet, so muſs, weil statisches Moment seines Gewichts mit gröſseren Werthen von α zu- hingegen seine Geschwindigkeit abnimmt, für einen gewissen Werth von α das *Maximum* des Effekts herauskommen; für diesen Fall findet man

$$295.)\quad \mathit{Sin}\,\alpha = 0{,}25 + \frac{\mu\,.\,\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{P} + (\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\delta)\,.\,q}{2\,R\,.\,\mathfrak{p}}$$

§. 286.[a] bis 286.[g] Beschreibung von der Einrichtung der Krahnen, besonders des Heidelberger mit einfachem Schnabel, und einem von Paris mit zwei Schnäbeln. Tab. XLVIII, XLIX und L *Fig.* 136.[a] bis 136.[u]

§. 287. Die *Erdwinde* oder der *kleine Göpel*, (*Fig.* 137 und 138.)

$$296.)\quad Q = \frac{36{,}6 \, . \, R}{r + \frac{1}{2}\delta} - \tfrac{1}{2} S$$

R die Entfernung des Kraftpunktes von der Axe.
r der Halbmesser der stehenden Welle.
δ Durchmesser des Seils.
S Gewicht des herabhängenden Seils.
Q die am Seile befestigte Last.

§. 288. Der *Gewalthaspel.* (*Fig.* 139.)

$$297.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{R - r}{\mathfrak{R}} \, . \, 1{,}1 \, Q \\ Q = \dfrac{10 \, . \, \mathfrak{R}}{11 \, . \, (R - r)} \, . \, P \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ die Entfernung des Kraftpunktes von der Umdrehungsaxe.
R der Halbmesser des stärkeren Wellenstücks.
r der Halbmesser des nur wenig schwächeren.

§. 290. Fuhrwerke im Allgemeinen.

§. 291. *Schubkarren.* Vereinte Wirkung von *Schub*- und *Tragkraft.* (*Fig.* 141 bis 143.)

$$298.)\quad Q = \frac{54{,}4 \, . \, B \, . \, (1 - \frac{1}{5} c - 2 \, . \, Sin\, a}{\dfrac{B - b}{n} + 0{,}45 \, . \, b} - q$$

B die Entfernung des Tragpunktes von der Axe.
q das Gewicht des leeren Karrens.
Q das der Ladung.
b die Entfernung des zu $Q + q$ gehörigen Schwerpunktes von der Axe.
n das Vielfache der verwendeten Zug- oder Schubkraft, was durch diese gewältigt wird. (Wenn Z. B. mit einer Anstrengung von $\frac{1}{8}$ Zentner Schubkraft $\frac{10}{8}$ oder 1,25 Zentner Last geschoben wird, so ist $n = 10$.)
c die Geschwindigkeit des Schubs oder Zugs.
α der Winkel, unter welchem die Bahn steigt.

§. 292. Für *horizontale* Bahnen ($\alpha = 0$) wird hier

$$299.)\quad \begin{cases} n = 10{,}3 \\ P = 27{,}2 \text{ ℔} . \end{cases}$$

Die Räder zu 30″ hoch angenommen.

§. 293. Für Räder von irgend einem bestimmten Halbmesser R wird bei *horizontaler* Bahn

$$300.)\quad Q = 280 \, . \, \sqrt{\frac{R}{15}} - (q' + \mathfrak{q})$$

$\mathfrak{q}$ das Gewicht der Räder
q' das übrige Gewicht des Karrens
R wie §. 287, hier in rheinl. Zollen.

Zu diesem §.
Fig. 144.[a] und 144.[b]
Dabei $n = 10{,}3$ angenommen.

§. 294. Vortheilhafter Bau der Schubkarren.

§. 295. Für *steigende* Bahnen unter dem Winkel α wird

$$301.)\quad Q = \frac{27{,}2 \, . \, (1 - 2 \, . \, Sin\, \alpha)}{\dfrac{0{,}377}{\sqrt{R}} + Sin\, \alpha} - (q' + \mathfrak{q})$$

Für das Maximum des Nutzeffekts wird

$$302.)\quad c = \frac{44{,}4 - 108{,}8 \, . \, Sin\, \alpha - \left(\dfrac{1}{n \, . \, \sqrt{\frac{R}{15}}} + Sin\, \alpha\right) . \, (q' + \mathfrak{q})}{21{,}76}$$

woraus sich Q giebt.

Man setzt dabei $n = 10{,}3$; also $\frac{1}{n \cdot \sqrt{\frac{R}{15}}} = \frac{0{,}377}{\sqrt{R}}$.

§. 296. Wichtigkeit der bisherigen Betrachtungen.

§. 297. *Grössere Fuhrwerke* mit Pferden, wenn R in rheinl. Zollen und c in rheinl. Fussen ausgedruckt wird,

$$303.)\quad Q = \frac{N \cdot 37{,}5 \cdot (8 - c - 20 \cdot \sin\alpha)}{\frac{0{,}82}{\sqrt{2R}} + \sin\alpha} - (q' + \mathfrak{q})$$

Für den grössten Nutzeffekt wird

$$304.)\quad c = \frac{N \cdot 37{,}5 \cdot (8 - 20 \cdot \sin\alpha) - \left(\frac{0{,}82}{\sqrt{2R}} + \sin\alpha\right) \cdot (q' + \mathfrak{q})}{N \cdot 75}$$

N die Anzahl der Pferde.

α, Q, c, wie §. 291. Für das Maximum wird im Werthe von Q der Werth von c aus Nro. 304. genommen.

q', $\mathfrak{q}$, R wie §. 293.

§. 298. Der Vortheil *hoher* Räder mit breiten Felchen.

§. 299. *Walzen* dienen zum Fortschaffen grosser Lasten. (*Fig.* 145.)

$$305.)\quad P = (Q + q) \cdot \sin\alpha + \frac{d + 1}{(d^2 + 1) \cdot 3{,}6} \cdot (Q + 2q) \cdot \cos\alpha$$

Für horizontale Bahnen ist

$$306.)\quad P = \frac{d + 1}{(d^2 + 1) \cdot 3{,}6} \cdot (Q + 2q)$$

q das Gewicht einer Walze.
Q das Gewicht der aufgelegten Last.
P die Kraft welche an der Last Q schieben muss.
d der Durchmesser der Walzen in Zollen.

§. 300. Geschwindigkeitsverhältniss.

§. 301. *Tromme* statt der Walze. (*Fig.* 146.)

$$307.)\quad P = \left(Q + \frac{D}{D + d} \cdot 2q\right) \cdot \sin\alpha + \frac{(D + d) \cdot (D + 1)}{7{,}2 \cdot d \cdot (D^2 + 1)} \cdot (Q + 2q) \cdot \cos\alpha$$

Hierbei D der äussere Durchmesser der Kränze, auf welchen die Tromme lauft. Dabei wird vollkommen fester ebener Boden vorausgesetzt.

Bei eben solchem Boden könnte man in Bezug auf ordentliche Fuhrwerke

$$308.)\quad P = (Q + q' + \mathfrak{q})\left(\sin\alpha + \frac{D + 1}{3{,}6\,(D^2 + 1)} \cdot \cos\alpha + \mu \cdot \frac{\delta}{D}\right) \text{ setzen.}$$

D der Durchmesser der Räder.
δ der Durchmesser der Nabe.
α, P, Q, q', $\mathfrak{q}$, μ wie bisher.

Für $\alpha = o$ wird $$309.)\quad P = (Q + q' + \mathfrak{q}) \times \left(\frac{D + 1}{3{,}6 \cdot (D^2 + 1)} + 0{,}007\right)$$

§. 301.* Eiserne Bahnen in England. (*Fig.* 147.[a] bis 147.[g])

§. 301.** Eine Vorrichtung zum Sperren der Hinterräder an einem Lastwagen. (Tab. L. *Fig.* 147.[i] bis 147.[l])

§. 302. Karren in Form einer Tromme. Für sie ist (*Fig.* 148.[a])

310.) $$P = \frac{(Q + q' + \mathfrak{q}) \cdot \left(Sin\,\alpha + \frac{D+1}{3{,}6 \cdot (D^2+1)} \cdot Cos\,\alpha \right)}{1 - \mu \cdot \frac{\delta}{D}}$$

und für $\alpha = o$ 311.) $$P = 0{,}3 \cdot \frac{D+1}{D^2+1} \cdot (Q + q' + \mathfrak{q})$$

Ein Umstand könnte den Effekt dieser Karrentromme bedeutend schwächen. Hierzu (*Fig.* 149.) Ein amerikanischer *Rollkarrn*. (*Fig.* 148.[b])

XXI. Kapitel.

DAS GROSSE LAUFRAD, DIE TRETSCHEIBE UND DIE GROSSE ERDWINDE ODER DER GOEPEL. AUCH VON FRIKTIONSRAEDERN.

§. 303. Durchmesser der Welle

312.) $$D = 8 \cdot \sqrt[3]{\lambda} + 2$$

D der Durchmesser in Zollen.
λ die Länge der Welle in rheinl. Fufsen.
Vollständige Konstruktion des Laufrades. (*Fig.* 150, 151, 152.[a], 152.[b])

§. 304. Nöthige Bemerkungen wegen der *Wellzapfen*. (*Fig.* 153, *Fig.* 154.[a] bis 154.[c] und *Fig.* 155.)

§. 305. Von Friktionsrädern am Ende dieses Kapitels.

§. 306. Vollständige Berechnung des Gewichts eines solchen Laufrades.

§. 307. Hier die Formeln. (*Fig.* 156.)

313.) $c = 6 \cdot (1 - 2{,}5 \cdot Sin\,\alpha)$ in rheinl. Fufsen.

314.) Die Nutzkraft $= 0{,}83\,P \cdot Sin\,\alpha - (F + K)$

Der Nutzeffekt $= c\,[0{,}83 \cdot P \cdot Sin\,\alpha - (F + K)]$
$= [(6 - 15 \cdot Sin\,\alpha) \cdot (0{,}83 \cdot P \cdot Sin\,\alpha - (F + K))]$

Für den *gröfsten* Nutzeffekt wird

315.) $$Sin\,\alpha = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot \frac{F + K}{0{,}83 \cdot P}$$ Im Text steht P' statt $0{,}83 \cdot P$.

α der Winkel ocs (*Fig.* 156.)
P das Gewicht der im Rade laufenden Thiere.
F die auf den innern Umfang des Radbodens reducirte Zapfenreibung.
K die ebenso reducirte übrige Nebenlast.
c die Geschwindigkeit am innern Umfange des Radbodens.
Auch Bestimmung der Arbeitsdauer.

§. 308. Hier

316.) $$P = \frac{\frac{r}{R} \cdot Q + F + K}{0{,}83 \cdot Sin\,\alpha}$$

Auch 317.) $P = \frac{r}{0,83 \,.\, R \,.\, Sin\,\alpha} \,.\, (Q + \mathfrak{F} + \mathfrak{K})$

318.) $Q = \frac{R \,.\, Sin\,\alpha}{r} \,.\, [0,83 \,.\, P - (F + K)]$

oder auch

$Q = \frac{R \,.\, Sin\,\alpha}{r} \,.\, 0,83 \,.\, P - (\mathfrak{F} + \mathfrak{K})$

r die unveränderliche Entfernung des Lastpunktes von der Radaxe.
R der Halbmesser vom innern Umfange des Radbodens.
$\mathfrak{F}$ die Zapfenreibung auf die Entfernnng r reducirt.
$\mathfrak{K}$ die übrige ebenso reducirte Nebenlast.
Q die ebenso reducirte Nutzlast. Das übrige wie vorher.

§. 309. Die *Tretscheibe*. (*Fig.* 157.) Hier ist

319.) Stat. Umdrehungsmoment $= \mathfrak{R} \,.\, P \,.\, Sin\,\alpha$

$\mathfrak{R}$ die Entfernung der Linie BA vom Schwerpunkte des Thieres.
P das Gewicht des Thieres.
α der Neigungswinkel der Scheibe gegen den Horizont.

Man hat hier überhaupt

320.) dieselben Gleichungen für die Tretscheibe, wie für das Laufrad, nur $\mathfrak{R}$ statt R, und P statt $0,83 \,.\, P$, geschrieben.

§. 310. Verschiedene Stellung des Thieres auf der Scheibe. (*Fig.* 158.)

321.) $Sin\,\beta = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \,.\, Sin\,\alpha$.

322.) $c' = 6 \,.\, \left(1 - 2,5 \,.\, \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \,.\, Sin\,\alpha\right)$

in Bezug auf eine willkührlich angenommene Stelle des Schwerpunkts v

$\mathfrak{R}$ wie vorhin (die cm).
$\mathfrak{R}'$ die cv; α wie vorhin; β der Steigewinkel der vw;
c' die Geschwindigkeit des Thieres in der Stellung bei v.

§. 311. Hier wird

323.) $\text{Nutzeffekt} = 6 \,.\, \left(1 - 2,5 \,.\, \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \,.\, Sin\,\alpha\right) \left(\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} \,.\, P \,.\, Sin\,\alpha - (F + K)\right)$

Für den *gröſsten* Nutzeffekt wird

324.) $Sin\,\alpha = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}} \,.\, \left(0,2 + 0,5 \,.\, \frac{F + K}{P}\right)$

§. 312. Die Gröſse des gröſsten Nutzeffekts (Nro. 323.) ändert sich mit dem Werthe von $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'}$. und man erhält *für das Maximum des* gröſsten Nutzeffekts

325.) $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\frac{F + K}{P} + 0,4}{2 \,.\, Sin\,\alpha}$ Die Bedeutung der Buchstaben wie §. 308 u. 310.

Hiernach wird

326.) $\text{Gröſster Nutzeffekt} = 6 \,.\, \left(1 - 2,5 \,.\, \left(0,2 + 0,5 \,.\, \frac{F + K}{P}\right)\right) \,.\, \left(0,2 - 0,5 \,.\, \frac{F + K}{P}\right) \,.\, P$

§. 313. Bau der Tretscheibe. (*Fig.* 159. bis 161.[b])

§. 314. Bei einer flach genug gelegten Tretscheibe läſst sich auch noch ein Theil der Zugkraft benutzen. Dabei wird (*Fig.* 162.)

$$327.)\quad V = 37{,}5 \,.\, (8 - c - 20 \,.\, Sin\,\alpha) + P \,.\, Sin\,\alpha - (F + K + q)$$

$$328.)\quad E = c \,.\, [(P - 750) \,.\, Sin\,\alpha + 300 - (F + K + q)] - 37{,}5 \,.\, c^2$$

Für das *Maximum* dieses vereinten Effekts von *Gewicht und Zugkraft* wird

$$329.)\quad c = \frac{(P - 750) \,.\, Sin\,\alpha + 300 - (F + K + q)}{75}$$

c die Geschwindigkeit des nach der Neigung der Scheibe ziehenden Thieres.
V die gesammte zur Umdrehung verwendete Nutzkraft.
E der Nutzeffekt.
q die durch die Rolle oder Walze bei t (*Fig.* 162.) verursachte Nebenlast.

§. 315. Es könnte auch die Gröſse der Zugkraft, welche man benutzen will, gegeben seyn und nach den Werthen von c und α gefragt werden, welche man nehmen müſste, um das *Maximum* des Effekts zu erhalten. Hierzu können wir eine der beiden Gleichungen

$$330.)\quad \begin{cases} c = 8 - \dfrac{\Omega + q}{37{,}5} - 20 \,.\, Sin\,\alpha \\[2ex] Sin\,\alpha = \dfrac{8 - c - \dfrac{\Omega + q}{37{,}5}}{20} \end{cases}$$

gebrauchen. Die Rechnung giebt

$$331.)\quad c = \frac{10 \,.\, [(0{,}001333 \,.\, P - 1) \,.\, (300 - (\Omega + q)) + 300 - (F + K + q)]}{P}$$

Ω die Zugkraft, welche benutzt werden soll.
Uebrigens wie §. 307. und 314.

§. 316. *Anwendung auf Ochsen.* Für diese wird im Allgemeinen

$$332.)\quad \Omega = 37{,}5 \,.\, \left(8 - 20 \,.\, Sin\,\alpha - \frac{c}{0{,}5 + Sin\,\alpha}\right) - q$$

und für die Verbindung mit dem Zuge

$$333.)\quad V = 37{,}5 \,.\, \left(8 - 20 \,.\, Sin\,\alpha - \frac{c}{0{,}5 + Sin\,\alpha}\right) + P \,.\, Sin\,\alpha - (F + K + q)$$

Alle Buchstaben wie vorher.
Für das *Maximum* des Effekts wird

$$334.)\quad c = \frac{0{,}5 + Sin\,\alpha}{70} \,.\, [(P - 750) \,.\, Sin\,\alpha + 300 - (F + K + q)]$$

§. 317. Es läſst sich auch sehr zweckmäſsig auf der Tretscheibe ein Ochs neben ein Pferd stellen. — Einige Vorzüge der Tretscheibe vor dem Laufrade.

§. 318. Werden N Thiere zugleich angestellt, so muſs man sämmtliche Gewichte, nach gehöriger Reduktion, im Schwerpunkte des äussersten als vereint annehmen, und nun die Rechnung bloſs für dieses äusserste Thier allein anstellen.

§. 319. *Pferde* – und *Menschengöpel.* Sie werden bloſs durch dieZugkraft betrieben, und leisten viel.

§. 320. Bau eines Pferdegöpels. (*Fig.* 163[a], bis 163[d].)

§. 321. Vollständige Beschreibung eines Premswerks zum Pferdegöpel. Hierzu *Fig.* 163[e]. und 163[f].

§. 322. Umdrehungsbewegung des Pferdes um seine eigene Axe.

§. 323. Verschiedene Zuglinien des Pferdes am Göpel. (*Fig.* 164 — 168.) Die Stellung in e (*Fig.* 168.), wo das Pferd nach ae zieht und $c\,e\,a = 90^\circ$ ist, wird als die vortheilhafteste hier immer beibehalten.

§. 324. Ist $cae = \beta$, der gesammte auf die Stelle a reducirte Widerstand $= Q$ und die Geschwindigkeit der Stelle $e = c$, so wird

$$335.)\quad Q = 37{,}5 \,.\, (8 - c) \,.\, Sin\,\beta$$

Die bei a wirkende Nutzkraft ist

$$336.)\quad V = 37{,}5 \,.\, (8 - c) \,.\, Sin\,\beta - (F + K)$$

Der Nutzeffekt

$$337.)\quad E = \left(300 - \frac{F + K}{Sin\,\beta}\right) . c - 37{,}5 \,.\, c^2$$

Für das Maximum des Nutzeffekts wird

$$338.)\quad c = 4 - \frac{F + K}{75 \,.\, Sin\,\beta} \text{ in rheinl. F.}$$

F die auf die Stelle a reducirte Zapfenreibung.
K die übrige ebendahin reducirte Nebenlast.

§. 325.[a] Für horizontale Tretscheiben verschwindet die Wirkung vom Gewicht des Thieres, und es wird aus Nro. 328

$$339.)\quad E = c \,.\, [300 - (F + K + q)] - 37{,}5 \,.\, c^2$$

und in Bezug auf das *Maximum*

$$340.)\quad E = \frac{[300 - (F + K + q)]^2}{150}$$

Dieser Effekt wird hier um $\frac{1}{17}$ kleiner gefunden als beim Göpel. Dagegen kommen bei der horizontalen Tretscheibe bedeutende Vortheile in Betrachtung. Einrichtung eines Zwingers über der Tretscheibe. (*Fig.* 169.)

§. 325.[b] Für den vortheilhaftesten Betrieb wird bei der *horizontalen* Tretscheibe mit einem Pferde

$$341.)\quad R = \frac{r \,.\, Q'}{150 + 1{,}5 \,.\, (F + K + q)}$$

R die Entfernung der Axe von der Zuglinie in rheinl. Fuſsen.
r die Entfernung der Last von der Axe.
Q' der gesammte Widerstand auf die Entfernung r gebracht.
F die Zapfenreibung auf die Entfernung R gebracht.
q die vom Zuggewicht herrührende Nebenlast für die Entfernung R.
K die ebenso reducirte übrige Nebenlast.

Für N Pferde wird

$$342.)\quad R = \frac{r \,.\, Q'}{N \,.\, 150 + 1{,}5 \,.\, (F + K + q)}$$

$$343.)\quad N = 0{,}00666 \,.\, \frac{Q' \,.\, r}{R} - 0{,}01 \,.\, (F + K + q)$$

§. 325.[c] Bauart eines Göpels. (*Fig.* 170 bis 174.)
§. 325.[d] Eine andere Bauart. (*Fig.* 175 und 176.)
§. 325.[e] *Friktionsräder.* (*Fig.* 177 bis 179.)
§. 326.[a] Ihre nähere Beschreibung. Vorgeschlagene Abänderung. (*Fig.* 180 bis 185.[a])
§. 326.[b] Ihre Stellung *hinter* einander ist vortheilhafter. (*Fig.* 185.[b])
§. 327. Die in diesem Kapitel betrachteten Maschinen heiſsen auch *Roſskünste.* Manche zum Betriebe mittelst thierischer Kräfte in andern Schriften angegebene Maschinen sind hier als unnütz übergangen worden.

XXII. Kapitel.

DER KEIL, DIE SCHRAUBE, DIE PRESSEN, UND DIE SCHRAUBE OHNE ENDE.

§. 328. Einige Worte über Ordnung im Vortrage.

§. 329. Verschiedene Formen des Keils. (*Fig.* 186 bis 188.)

§. 330. Theorie des Keils in Bezug auf das Verhältnifs zwischen der auf den Rücken druckenden Kraft P und dem auf die Mittelfläche senkrecht (nach *on*, senkrecht auf *ab* *Fig.* 189.) gerichteten Widerstande Q, für die Bedingung des Gleichgewichts, mit Rücksicht auf die Reibung 1) wenn die Kraft mit dem Widerstande Q und der dabei eintretenden Reibung zusammengenommen im Gleichgewicht seyn soll; 2) wenn der Widerstand oder die von der Seite wirkende Kraft Q mit dem Drucke P und der Reibung zusammengenommen im Gleichgewicht seyn soll, so dafs der Keil gegen das Zurückspringen gesichert ist, Hier die Formeln

$$344.)\quad P = \frac{Q \,.\, (\sin\beta \pm \mu \,.\, \cos\beta)}{\cos\beta \mp \mu \,.\, \sin\beta}$$

Q das Gewicht eines auf der schiefen Ebene *ac* (*Fig.* 27.) liegenden Körpers M.
β der Winkel *bac*; μ der Reibungskoëfficient.
P die Kraft, welche nach *vu*, parallel mit *ab* angebracht, den Körper M in Ruhe erhält.

Das *obere* Zeichen (in $\pm$ oder $\mp$) bezieht sich auf die Forderung, dafs die Kraft P auch noch die Reibung mit überwinden soll.

Das *untere* auf die Bedingung, dafs die Kraft mit der ihr noch zu Hülfe kommenden Reibung zusammengenommen hinreichend seyn soll, das Gewicht Q ruhig zu erhalten.

§. 331. In der Anwendung auf den Keil wird für den Zustand des Gleichgewichts

$$345.)\quad P = \frac{2Q \,.\, (\sin\beta \pm \mu \,.\, \cos\beta)}{\cos\beta \pm \mu \,.\, \sin\beta} = \frac{2Q \,.\, (tg\,\alpha \pm \mu)}{1 \mp \mu \,.\, tang\,\alpha}$$

$$346.)\quad Q = \frac{\frac{1}{2}P \,.\, (\cos\beta \mp \mu \,.\, \sin\beta)}{\sin\beta \pm \mu \,.\, \cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}P \,.\, (1 \mp \mu \,.\, tg\,\alpha)}{tg\,\alpha \pm \mu}$$

P eine Kraft, welche auf den Rücken eines gleichschenklichten Keils wirkt. (*Fig.* 189.)
Q eine Seitenkraft, welcke in paralleler Richtung mit dem Rücken des Keils oder in senkrechter Richtung auf *ab* wirkt.
β der Winkel *fab* oder der halbe Keilwinkel an der Schärfe.
μ der Reibungskoëfficient.

§. 331.* Schwierigkeiten, welche Mathematikverständige in der Theorie des Keils, auch ohne Rücksicht auf Reibung, gefunden haben. Ist Z eine Seitenkraft nach *wo* (senkrecht auf des Keils Seitenfläche), so ist ohne Rücksicht auf Reibung $Z = \frac{\frac{1}{2}P}{tang\,\beta}$. (*Fig.* 193 und 189.)

§. 332. Mannichfaltige Werkzeuge, die als Keile wirken.

§. 333. Wirkung des Keils, wenn er durch den *Stofs* getrieben wird.
Hier die Formeln

$$347.)\quad \mathfrak{g} = \frac{2Q\,.\,(Sin\,\beta + \mu\,.\,Cos\,\beta)}{P+p}\,.\,g$$

$$\left.\begin{matrix}348.\\349.\end{matrix}\right\}\quad h = \frac{P^2\,.\,C^2}{(P+p)\,.\,8\,Q\,.\,(Sin\,\beta + \mu\,.\,Cos\,\beta)\,.\,g}$$

$$350.)\quad h = \frac{P^2\,.\,H}{(P+p)\,.\,2Q\,.\,(Sin\,\beta + \mu\,.\,Cos\,\beta)}$$

$$351.)\quad Q = \frac{P^2\,.\,H}{(P+p)\,.\,2h\,.\,(Sin\,\beta + \mu\,.\,Cos\,.\,\beta)}$$

P das Gewicht einer auf den Keil fallenden Masse (Z. B. eines Stempels.)
p das Gewicht des Keils.
Q, β, μ wie Nro. 346.
C die Geschwindigkeit, welche P durch den Fall bis auf den Rücken des Keils erlangt.
H die Höhe dieses Falles.
h die Tiefe, um welche der Keil bei einem Schlage eindringt.
$\mathfrak{g}$ der Raum, durch welchen die Kraft Q die Masse $P + p$ in der 1ten Sekunde nach der hier Statt habenden Wirkung treiben könnte.
g ist wie bekannt die Zahl 15,625, in rheinl. Fuſsen.

§. 333.* Eine Anwendung auf die Preſskeile in Oehlmühlen. *Fig.* 190 bis 192.

§. 333.** Fälle, wo der Keil, auf den ein Druck P wirkt, in Ruhe beharrt, wenn auch P oder Q ohne Ende vergröſsert würde.

§. 334. Eine Anwendung auf den Keildruck bei Gewölben. *Fig.* 194. Keilformen, welche keine Anwendung bisheriger Bestimmungen gestatten. *Fig.* 195.

§. 335. *Die Schraube.* Ihre geometrische Bildung. *Fig.* 196[a]. und 196[b].

§. 336. Hierher gehörige Gegenstände bei einer Schraube. *Finfache*, *doppelte*, *dreifache* Schrauben.

§. 337. Zeichnungen verschiedener Schrauben mit ihren Muttern. *Fig.* 197[a], 197[b], 198[a], 198[b], 198[c] und 198.[d]

§. 338. Schrauben mit durchgesteckten Drehstangen oder Hebelärmen. *Fig.* 199.

$$352.)\quad p = \frac{tang.\,\alpha - \mu}{1 + \mu\,.\,tg.\,\alpha}\,.\,Q$$

$$353.)\quad p = \frac{tang.\,\alpha + \mu}{1 - \mu\,.\,tg.\,\alpha}.\,Q$$

$$354.)\quad P = \frac{r\,.\,(tang.\,\alpha + \mu)}{R\,.\,(1 - \mu\,.\,tg.\,\alpha)}$$

$$355.)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{r\,.\,(h + 6{,}28\,.\,\mu\,.\,r)}{R\,.\,(6{,}28\,.\,r - \mu\,h)}\,.\,Q \\ Q &= \frac{R\,.\,(6{,}28\,.\,r - \mu\,h)}{r\,.\,(h + \mu\,.\,6{,}28\,.\,r)}\,.\,P \end{aligned}\right.$$

α der Winkel, unter welchem die Schraubenlinie steigt.
p Nro. 353. die am Umfange d. h. in der Schraubenlinie selbst erforderliche Umdrehungskraft zum Gleichgewicht mit dem längs der Schrauben- oder Spindelaxe entgegengesetzten Widerstande und zugleich mit der Reibung.
p Nro. 352. die erforderliche Umdrehungskraft am Umfange, welche mit der Reibung zusammengenommen der längs der Spindelaxe wirkenden Kraft das Gleichgewicht hält.
P die unter gleicher Bedingung am Kraftpunkte des Hebelarms erforderliche Kraft.
Q die längs der Axe wirkende Kraft, welche die Umdrehung der Spindel zu verhindern strebt, mit Ausschluſs der Reibung.
r der *mechanische* Halbmesser der Spindel, welcher von der Axe bis zur halben Vertiefung der Schraubengänge gemessen wird.

R die Länge eines auf die Spindelaxe senkrecht eingesteckten Hebelarms, von der Axe bis zum Angriffspunkte der Drehkraft gemessen.

h die zum mechanischen Umfange der Schraube gehörige Höhe eines Schraubenganges, oder die Höhe, um welche die Schraubenlinie bei einem ganzen Umgange steigt.

μ der Reibungskoëfficient.

§. 339. Hier für die Forderung, dafs die Last Q durch die Reibung allein ruhig erhalten werde, die Formel

356.) $$h = 6{,}28 \,.\, \mu \,.\, r$$

Die vorige Bedeutung der Buchstaben.

§. 340. Für den *gröfsten* Effekt zur Erhebung einer Last durch die Schraube wird

357.) $$h = 6{,}28 \,.\, r \,.\, [\sqrt{(1+\mu^2)} - \mu]$$

358.) $$r = \frac{\mu + \sqrt{(1+\mu^2)}}{6{,}28} \,.\, h$$

Die Buchstaben wie §. 338.

§. 341. Gebrauch der Schraubenmuttern zu geringen Verrückungen. *Fig.* 201, 202[a] bis 202[c]. Der *englische Schraubenschlüssel* mit ganzem Bügel. *Fig.* 203, 204[a], 204[b], 204[c]. Mit halben Bügel *Fig.* 204[d], 204[e]. Schlüssel mit Mutter *Fig.* 205 und 206. Man denke sich die Mitte zwischen dem äufseren Umfange der Schraube und der äufsersten Stelle des Schraubenschlüssels v, und setze den Halbmesser von der Axe der Schraubenspindel bis zu der gedachten mittleren Stelle $= \mathfrak{r}$, so ist hinlänglich genau

359.) $$P = \left(\frac{r \,.\, (h + 6{,}28 \,.\, \mu r)}{R \,.\, (6{,}28 \,.\, r - \mu h)} + \frac{\mathfrak{r} \,.\, \mu}{R}\right) . \, Q$$

Ein noch schärferer hier aber sehr überflüssiger Ausdruck wäre

360.) $$P = \left(\frac{r \,.\, (h + 6{,}28 \,.\, \mu r)}{R \,.\, (6{,}28 \,.\, r - \mu h)} + \frac{\mathfrak{r} \mu}{R}\right) . \, Q + \frac{\rho \mu p'}{\lambda}$$

Aus dem Text ersieht man sogleich, dafs $\frac{\rho \mu p'}{\lambda}$ gar keine Beachtung verdient.

Alle Buchstaben wie vorher (§. 338).

ρ, p', λ s. den Text.

§. 341.* Das Hebgeschirr der Zimmerleute. Tab. L. *Fig.* 206*.

§. 342. *Pressen*, mannichfaltiger Art, auch ohne Schrauben. Allgemeine Darstellung einer Schraubenpresse. *Fig.* 207. Eine bessere Einrichtung *Fig.* 208 und 209.

361.) $$P = \left(\frac{r \,.\, (h + 6{,}28 \,.\, \mu \,.\, r)}{R \,.\, (6{,}28 \,.\, r - \mu h)} + \frac{\mathfrak{r} \mu}{2R}\right) . \, (Q - q)$$

q das Gewicht der Spindel (bei lothrechter Stellung).

Alle übrige Buchstaben wie §. 338.

§. 342*. Eine sehr wirksame Maschine mit doppeltem (verschiedenem) Gewinde auf *einer* Spindel. *Fig.* 209[a] bis 209[l].

§. 343. Presse in den *Papiermühlen*, *Fig.* 210 und 211., Tab. LI. *Fig.* 210* noch eine besondere Einrichtung der Papierpressen in Verbindung mit einem Wasserrade.

§. 344. u. 345. Die *Buchbinderpresse*. *Fig.* 212 bis 216.

362.) $$Q = \frac{P}{\frac{r \,.\, (h + 6{,}28 \,.\, \mu \,.\, r)}{R \,.\, (6{,}28 \,.\, r - \mu h)} + \frac{\mathfrak{r} \mu}{2R}} + q$$

Hier ist st (*Fig.* 216) $= \mathfrak{r}$.

363.) Der Druck durch die in Quadratzollen ausgedrückte Fläche des Drucks dividirt giebt die Gröfse des Drucks auf 1 Q. Zoll, oder die *specifische* Pressung.

§. 346. Die Preſsschrauben der *Schreiner. Fig.* 217, 218, und Tab. L. *Fig.* 218*. Der *Schraubenstock* der *Schlosser. Fig.* 219^a bis 219^f.

§. 347. *Walzenpressen. Fig.* 220^a und 220^c. Besondere Anwendung bei Wollspinnmaschinen. *Fig.* 220^b.

§. 348. Für sie wird

$$364.)\quad P = \frac{\mu \cdot \left(\frac{R}{r} \cdot \varrho \cdot Q + \mathfrak{r} \cdot (Q + q + \mathfrak{Q})\right)}{b}$$

R der Halbmesser der untern Walze *A* (*Fig.* 220^a).
r der Halbmesser der obern *B*.
ϱ der Halbmesser der obern Walzenzapfen.
$\mathfrak{r}$ der Halbmesser der unteren.
Q das Gewicht des beweglichen Rahmens oder Gatters *a b c d*.
q das der obern Walze *B*.
$\mathfrak{Q}$ das der untern *A*.
b die Entfernung des Kraftpunktes von der Axe der untern Walze *A*.
P die in dieser Entfernung zur Bewirkung des Gleichgewichts mit dem Widerstande erforderliche Kraft.

§. 349. Die Wirkung einer Walzenpresse hängt sehr von der Geschwindigkeit ab, mit der die zu pressende Masse zwischen den Walzen durchgezogen wird.

§. 350. Walzen dienen noch auf andere Weise zum Pressen.

§. 351. *Weinpressen.* Perspektivische Darstellung einer Mosterpresse. *Fig.* 221 — 228.

§. 352. *Kelterpressen. Fig.* 229 — 243.

§. 353. Eine gemeine *Weinkelter. Fig.* 244.

§. 354. *Obstpressen. Fig.* 245 und 246. Auch *Fig.* 247, 248^a und 248^b.

§. 355. *Buchdruckerpressen. Fig.* 249^a bis 249^w. Die *Fig.* 249^w findet man Tab. LI.

§. 356. *Schwungpressen Münzpressen. Fig.* 250^a. Hier die Formeln

No. (365.); (366.); (367.)

§. 357. Noch andere Einrichtungen zum Pressen. *Fig.* 250^b und 250^c.

§. 358. *Hydraulische Pressen. Reals Auflösungspresse.* Hydraulische Pressen von *Bramah* und *Murray.* Auch eine hierher gehörige Schraubenpresse. *Fig.* 251.

§. 359. *Schraube ohne Ende. Fig.* 252. Hier als Haspel gebraucht.

$$368.)\quad P = \left(\frac{r \cdot (h + 6{,}28 \cdot \mu \cdot r)}{R \cdot (6{,}28 \cdot r - \mu h)} + \mu \cdot \frac{n \cdot r'}{R}\right) \cdot \frac{\mathfrak{r} + \mu \cdot \mathfrak{r}'}{\mathfrak{R}} \cdot Q$$

$\mathfrak{r}$ der Halbmesser der Welle mit dem Seile, bis zur Mitte der Seildicke gemessen.
$\mathfrak{r}'$ der Halbmesser ihrer Zapfen.
$\mathfrak{R}$ der Halbmesser des verzahnten Rades, bis zur Mitte der Zähne genommen.
r der mechanische oder mittlere Halbmesser der Schraubenspindel.
r' der Halbmesser ihrer Zapfen.
n die Anzahl der Zähne.
h der *n*te Theil von dem zum Halbmesser $\mathfrak{R}$ gehörigen Umfange.
R die Entfernung des Kraftpunktes von der Spindelaxe.
α der Winkel, welchen die Schraubenlinie mit einer auf die Spindelaxe senkrechten Ebene macht.
Q die am Seile angebrachte Last.
P die am Kraftpunkte zur Umdrehung erforderliche Kraft.

Dabei ist der Widerstand wegen der Straffheit des Seils bei Seite gesetzt.
Im beigefügten *Ex.* wird zugleich die Straffheit des Seils berücksichtigt.

XXIII. Kapitel.

VERZAHNTE RAEDER, TRILLINGE, VERZAHNTE STANGEN, DIE WAGENWINDE.

§. 360. *Stirnräder* und *Kammräder*. *Trilling*, *Kumpf*, *Vorgelege*. *Fig.* 253, 254[a] und 254[b].
§. 361. Aeufserer, innerer und mittlerer oder *mechanischer* Umfang verzahnter Räder und Trillinge.
§. 362. Unrichtigkeit der Regel, dafs die Zahl der Triebstöcke in der Zahl der Kämme genau aufgehen solle.
§. 363. Wie die Winkelgeschwindigkeit oder die Anzahl der Umläufe einer Welle durch Räderwerk vergröfsert wird. *Fig.* 257.

$$369.)\quad N \,.\, N' \,.\, N'' = \mathfrak{N} \,.\, n \,.\, n' \,.\, n''$$

$$370.)\quad N^3 = \mathfrak{N} \,.\, n^3;\quad N = n \,.\, \sqrt[3]{\mathfrak{N}}$$

N, N', N'' die Anzahl von Kämmen bei Rädern an drei nach einander folgenden Wellen.
n, n', n'' Anzahl der Triebstöcke an der zweiten, dritten und vierten Welle.
$\mathfrak{N}$ die Anzahl von Umläufen, welche die vierte Welle bei einem Umgange der ersten macht.
No. 370 bezieht sich auf den Fall, wo die Trillinge gleichviele Triebstöcke, und die Kammräder gleichviele Kämme haben.

§. 364. Verschiedene Arten, die Kämme abzurunden. *Fig.* 258 — 261.
§. 365. Nothwendigkeit einer guten Abrundung. Regel für die Ausübung. *Fig.* 262.
§. 366. *Cykloidische* Abrundung der Kämme an den Kammrädern, und *epicykloidische* bei den Stirnräden. *Fig.* 264 und 263.
§. 367. Der so oft angepriesene Nutzen der epicykloidischen Abrundung ist für die Ausübung unbedeutend.
§. 368. Dasselbe gilt von der cykloidischen Abrundung. Mathematiker und Empiriker haben aus Beobachtungen irrige Folgen abgeleitet. *Fig.* 265.
§. 369. Zusammenstellung der Erinnerungen in Bezug auf die Abrundung.
§. 370. Die *Schrift* und ihre Eintheilung für die Dicke der Triebstöcke und der Kämme.

$$371.)\quad \Delta + \delta = \frac{15}{16} S; \qquad 372.)\quad \varepsilon \,.\, \Delta = \delta; \qquad 373.)\quad \Delta = \frac{15}{(1+\varepsilon) \,.\, 16} \,.\, S$$

Δ die Dicke eines Triebstocks (*Fig.* 266.)
δ die eines Kamms.
ε eine den Umständen angemessene Zahl, die gewöhnlich ein eigentlicher Bruch ist, aber auch > 1 seyn kann, z. B. bei hölzernen Kämmen und eisernen Triebstöcken.
S die Gröfse der Schrift.
Die Gröfse des Spielraums im mittleren Umfange oder dem Theilrisse $A' E'$ ist $\sigma = S - (\Delta + \delta)$.

§. 371. Betrachtung der Art, wie Kämme und Triebstöcke in gegenseitige Berührung kommen, und wie sie von einander abfallen. Defshalb gestattete verhältnifsmäfsige Abkürzung der Kammköpfe. *Fig.* 267.
§. 372. In *Fig.* 266 ist n der in der Zentrallinie $c\,C$ liegende Berührungspunkt von Kamm und Triebstock; φ die Stelle, wo beide von einander abfallen, und man findet

$$374.)\quad Cos.\,\alpha = \frac{(R + r - \frac{1}{2}d)^2 + r^2 - R^2}{2\,.\,(R + r - \frac{1}{2}d)\,.\,r}$$

R der Halbmesser $C\varphi$, wenn C der Mittelpunkt des Rades ist.
r der $c\varphi$ (des Trillings).
d Dicke oder Durchmesser eines Triebstocks.
α der Abfallswinkel $\varphi\,cn$.

Auch
$$375.)\quad p = 2\,.\,\frac{1 + \frac{S}{18\,.\,Bog.\,\alpha}}{1 + Cos.\,\alpha}\,.\,Q$$

S die Länge des zur Schrift gehörigen Bogens.
α wie vorher.
Q der Druck, welchen der Trilling in seinem mittleren oder mechanischen Umfange seiner Umdrehung entgegengesetzt.
p die am mechanischen Umfange des angreifenden Rades zum Gleichgewicht mit Q und der Reibung an den Kämmen erforderliche Kraft.

§. 373. Das gedachte Vorgelege (vor. §.) wird jetzt als das zweite betrachtet, so daſs es in der Zusammenstellung zweier Vorgelege vom ersten in Bewegung gesetzt werde, bei welchem die Buchstaben durch Accente von den vorigen (denen des zweiten Vorgeleges) unterschieden werden sollen. Jetzt erhält man *für das doppelte Vorgelege*

$$376.)\quad P = \frac{R' - \frac{1}{2}d'}{\mathfrak{R}}\,.\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\,.\,2^2\,.\,\frac{\left(1 + \frac{S'}{18\,.\,Bog.\,\alpha'}\right)\,.\,\left(1 + \frac{S}{18\,.\,Bog.\,\alpha}\right)}{(1 + Cos.\,\alpha')\quad.\quad(1 + Cos.\,\alpha)}\,.\,\frac{R - \frac{1}{2}d}{r'}\,.\,\mathfrak{Q}$$

R, r, d, α (Abmessungen beim zweiten Vorgelege) wie No. 374.
R', r', d', α' dieselben Abmessungen beim ersten Vorgelege.
$\mathfrak{r}$ die Entfernuug des Lastpunktes von der zweiten Trillingsaxe.
$\mathfrak{R}$ die Entfernung des Kraftpunktes von der ersten Stirnradaxe.
S die Gröſse des zur Schrift des zweiten Vorgeleges gehörigen Bogens auf dem Theilrisse,
S' dieselbe Abmessung beim ersten Vorgelege.
$\mathfrak{Q}$ der Widerstand, den die Triebstöcke des zweiten Trillings, ohne Rücksicht auf Reibung, ihrer Umdrehung entgegensetzen, auf die Entfernung $\mathfrak{r}$ von der Trillingsaxe reducirt.
P die zum Gleichgewicht mit $\mathfrak{Q}$ und der Reibung an den Kämmen und Triebstöcken des doppelten Vorgeleges erforderliche Kraft, auf die Entfernung $\mathfrak{R}$ von der ersten Stirnradaxe reducirt.

Für das einfache Vorgelege wird

$$377.)\quad P = \frac{R' - \frac{1}{2}d'}{\mathfrak{R}}\,.\,2\,.\,\frac{1 + \frac{S'}{18\,.\,Bog.\,\alpha'}}{1 + Cos.\,\alpha'}\,.\,\frac{\mathfrak{r}}{r'}\,.\,\mathfrak{Q}$$

§. 374. Die Zapfenreibung ist in den vorstehenden Formeln nicht berücksichtigt worden. Die Abrundung der Kammköpfe bei Kammrädern. *Fig.* 268.
Die Berechnungen bei Kammrädern werden wie bei den Stirnrädern geführt.

§. 375. Hier die nachstehenden Formeln mit Berücksichtigung der Zapfenreibung, in Bezug auf *Fig.* 257.

$$378.)\quad p = 2\,.\,\frac{1 + \frac{S}{18\,.\,Bog.\,\alpha}}{1 + Cos.\,\alpha}\,.\,\frac{\Delta}{2r}\,.\,\mu\,.\,(\mathfrak{P} + \varepsilon\,.\,\mathfrak{Q}) + \frac{\delta}{2R}\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{p}$$

$$379.)\quad F = \left\{ \frac{R' + \frac{1}{2}d'}{\mathfrak{R}} \cdot 2 \cdot \frac{1 + \frac{S}{18.\,Bog.\,\alpha'}}{1 + Cos.\,\alpha'} \cdot \frac{R - \frac{1}{2}d}{r'} \times \left(\frac{1 + \frac{S}{18.\,Bog.\,\alpha}}{1 + Cos.\,\alpha} \cdot \frac{\Delta}{r} \cdot \mu \cdot (\mathfrak{P} + \varepsilon \cdot \mathfrak{Q}) + \frac{\delta}{2R} \cdot \mu\,\mathfrak{p} \right) + \frac{\delta'}{2\mathfrak{R}} \cdot \mu\,\mathfrak{p}' \right.$$

380.) $P = K + F$. Daher für ein einfaches Vorgelege mit Inbegriff der Zapfenreibungen.

$$381.)\quad P' = \frac{R' - \frac{1}{2}d'}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{1 + \frac{S'}{18.\,Bog.\,\alpha'}}{1 + Cos.\,\alpha'} \cdot \left(\frac{2\mathfrak{r}}{r'} \cdot \mathfrak{Q} + \frac{\Delta}{r'} \cdot \mu \cdot (\mathfrak{P} + \varepsilon \cdot \mathfrak{Q}) \right) + \frac{\delta'}{2\mathfrak{R}} \cdot \mu\,\mathfrak{p}'$$

$$382.)\quad Cos.\,\alpha' = \frac{(R' + r' - \frac{1}{2}d')^2 + (r')^2 - (R')^2}{2 \cdot (R' + r' - \frac{1}{2}d') \cdot r'}$$

R, r, $\mathfrak{r}$, d, α, R', r', d', α', $\mathfrak{R}$, S, S', $\mathfrak{Q}$, P, wie No. 376.
Δ der Durchmesser der Zapfen an der Welle C (*Fig.* 257).
δ der Durchmesser der Zapfen an der Welle des Kammrades B.
δ' der Durchmesser der Zapfen an der Welle W.
$\mathfrak{P}$ das Gewicht der Welle C sammt Trilling.
$\mathfrak{p}$ das Gewicht des Kammrades B sammt Welle und Trilling.
$\mathfrak{p}'$ das Gewicht der Welle W mit dem Stirnrade.
μ der Reibungskoëfficient.

Der Druck auf die Zapfenlager der Welle C, welcher von der Last $\mathfrak{Q}$ herrührt, kann nicht allgemein $= \mathfrak{Q}$ gesetzt werden, weil in vielen Fällen nur ein aliquoter Theil von $\mathfrak{Q}$ als solcher Druck in Rechnung kommen kann. In dieser Hinsicht steht hier $\varepsilon \cdot \mathfrak{Q}$ statt $\mathfrak{Q}$.

p die erforderliche Kraft am Kammrade B.
K der Werth von P No. 376.
F die in der Entfernung $\mathfrak{R}$ von der Wellenaxe W nur allein zum Gleichgewicht mit allen *Zapfenreibungen* erforderliche Kraft.
P' die an derselben Stelle zum Gleichgewicht mit dem gesammten Widerstande erforderliche Kraft bei einfachem Vorgelege.

Noch zu diesem §. gehörige Zeichnungen s. *Fig.* 269[a] und 269[b].

§. 376. Verbessertes Kammrad mit Trilling. — *Konische Räder*. *Fig.* 270[a] und 270[b], s. auch §. 379.

§. 377. Noch einige Bemerkungen über Höhe und Dicke der Kammköpfe und Eintheilung der Schrift. Auch eisernes Räderwerk. *Fig.* 271 und 272[a], 272[b].

§. 378. Die Anzahl der Triebstöcke soll nicht unter 12 ausmachen. Dieser Forderung kann durch eiserne Triebstöcke leicht Genüge geschehen. Hiermit zusammenhängende Bemerkungen. Auch von der *Breite* der Kämme und Höhe der Kammköpfe.

§. 378.* Befestigung der Kämme in den Kränzen der Stirn- und Kammräder. *Fig.* 273.

§. 379. Verbessertes Stirnrad.

§. 380. Anwendung bei Winden. Die *Wagenwinde*. *Fig.* 274[a], 274[b] und 275. — Verstärkte doppelte Winde.

§. 381. Bemerkungen über die verschiedenen Grade der Festigkeit, der die verschiedenen Theile einer Maschine bedürfen. Effekt einer verstärkten doppelten Wagenwinde, auch Zeitaufwand bei ihrem Gebrauche.

§. 382. Die Aufstellung der Winde zum Aufwinden erfordert ein hinlänglich festes Unterlager.

§. 383. Besonderer Gebrauch der *Fußwinden*. Statt ihrer dient auch eine gemeine Winde, wenn man die auf dem Boden liegende Last mit einer Kette umschlingt, die man an einem Hebelarm befestigt. *Fig.* 276.

XXIV. Kapitel.

DIE WELLE MIT DAUMEN.

§. 384. Daumenwellen mit *Tangenten* oder mit *Hebeköpfen* dienen durch ihre Umlaufsbewegung Stampfer oder Stempel zu erheben. *Fig.* 277 und 278.

§. 385. Für die hierbei vorfallenden Bestimmungen erhält man

$$383.)\quad h = R \,.\, Sin.\,\alpha;\qquad Sin.\,\alpha = \frac{h}{R}.$$

$$384.)\quad ev = R\,.\,(1 - Cos.\,\alpha);\qquad 385.)\quad p = \frac{180\,.\,h}{3{,}14\,.\,\alpha\,.\,R}\,.\,Q$$

$$386.)\quad p' = \frac{180\,.\,\mu\,.\,(1 - Cos.\,\alpha)}{3{,}14\,.\,\alpha}\,.\,Q;\qquad 387.\ \begin{cases} P = \dfrac{180\,.\,[h + \mu\,.\,R\,.\,(1 - Cos.\,\alpha)]}{3{,}14\,.\,\alpha\,.\,R}\,.\,Q \\ Q = \dfrac{3{,}14\,.\,\alpha\,.\,R}{180\,.\,[h + \mu\,.\,R\,.\,(1 - Cos.\,\alpha)]}\,.\,P \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf eine periodisch von Neuem zu erhebende Masse Σ

$$388.)\quad P = \frac{180\,.\,[h + \mu\,.\,R\,.\,(1 - Cos.\,\alpha)]}{3{,}14\,.\,\alpha\,.\,R}\,.\,Q + \frac{b^2\,.\,(\Pi + \Sigma)\,.\,\Sigma}{B\,.\,g\,.\,t^2\,.\,(2\Pi + \Sigma)}.$$

Der Umstand, daſs periodisch ein Stempel abfällt, dafür aber in demselben Augenblick wieder ein neuer von demselben Gewicht ergriffen wird, hat den Erfolg, daſs die Bewegung nie in aller Schärfe gleichförmig bleiben und nach Beschaffenheit der Umstände merkbar ungleichförmig werden kann. No. 388 giebt den Werth von P allgemein für alle Fälle; No. 387 giebt ihn für die Fälle, wo die Ungleichförmigkeit oder das in No. 388 angehängte Glied als unbedeutend bei Seite gesetzt werden kann, was meistens der Fall ist.

h die Höhe des Hubs (von e bis m).
R der Halbmesser ce.
α der Erhebungswinkel $ec\varepsilon$.
μ der Reibungskoëfficient.
Q die Nutzlast.
P die in e erforderliche Kraft.

Das angehängte Glied (No. 388 zur Rechten) ist die hier erforderliche *Ueberwucht*. Die Bedeutung der Buchstaben ist dabei wie §. 55. No. 62.

Eine hierher gehörige Bemerkung s. in diesem Repert. zu No. 407.

§. 386. Hinlängliche Genauigkeit der Bestimmungen im vorigen §. s. auch §. 388.

§. 387. Die Stelle für den Zapfen a an dem Stempel ist ziemlich gleichgültig. μ kann zur Sicherheit $= \frac{2}{7}$ gesetzt werden.

§. 388. In den Bestimmungen §. 385 sind zur Vereinfachung der Rechnung einige Umstände ohne merkbaren Fehler bei Seite gesetzt worden.

§. 389. Statt der *Tangenten* gebraucht man auch *Hebeköpfe*, die nach einer krummen Linie abgerundet sind, deren *Evolute* ein Kreis ist, d. h. die durch den Endpunkt eines Fadens beschriewird, den man von einem Kreise (vom Umfange eines Cylinders) abwickelt. Der mechanische Vorzug dieser Gestaltung (d. h. der Vorzug in Bezug auf den Effekt der angebrachten Kraft) ist aber ganz unbedeutend.

§. 390. Zur Vergröſserung des Effekts beim Gebrauche abgerundeter Hebeköpfe hat man noch eine andere Abänderung getroffen, indem man *geschlitzte* Stempel dabei gebraucht, und die Hebeköpfe in die Schlitze eingreifen läſst. *Fig.* 280, 281.

Auf Vergröſserung des Effekts hat zwar auch diese Einrichtung keinen merklichen Einfluſs, aber sie gewährt einen solideren Bau. *Fig.* 282.

§. 391. Stempel mit Friktionswalzen. *Fig.* 283.
§. 392. Vortheil der Anordnung mehrerer Stempel bei einem Stampfwerke.
§. 393. Ein Stampfer darf nicht vor Vollendung seines erforderlichen ganzen Falles von einem nachfolgenden Daumen wieder ergriffen werden. Hierzu dienen folgende Bestimmungen:

I. Für Tangenten.

389.) $c \cdot \sqrt{\frac{h}{12}}$ höchstens $=$ Bog. β — Bog. α

390.) Bog. β nicht $< c \cdot \sqrt{\frac{h}{12}} +$ Bog α oder

391.) Bog. β nicht $< c \cdot \sqrt{\frac{R \cdot Sin\, \alpha}{12}} +$ Bog α

392.) $\mathfrak{R} = R \cdot Cos\, \alpha - \gamma$.

c die Geschwindigkeit eines Punktes u auf der Oberfläche der Welle. *Fig.* 277.
h die Höhe des Hubs.
β der von 2 hinter einander liegenden Tangenten abgeschnittene Bogen $k\,d$ in Graden.
α der Erhebungswinkel oder Bogen $d\,\delta$ in Graden.
R der mechanische Halbmesser $c\,e$.
γ der Zwischenraum $v\,d$ zwischen dem Zapfen und der Welle.
$\mathfrak{R}$ der Halbmesser $c\,d$ der wirklichen Welle.

Es darf kein Augenblick dintreten, in dem nicht wenigstens 1 Stempel in Bewegung wäre. Hierzu gehören noch folgende Bestimmungen:

393.) $\varepsilon = \alpha$; 394.) $N = \frac{360}{\varepsilon} = \frac{360}{\alpha}$ wenn immer nur 1 Stampfer in Bewegung seyn soll.

	Für 1 hübige Stampfer.	Für 2 hübige.	Für 3 hübige.	Für 4 hübige.
395.) $n =$	N	$\frac{1}{2} N$	$\frac{1}{3} N$	$\frac{1}{4} N$

Sollen immer $\mathfrak{N}$ Stampfer in Bewegung seyn, so wird

396.) $N = \frac{\mathfrak{N} \cdot 360}{\alpha}$; n wie Nro. 395.

ε der Bogen am Umfange der Welle, welcher, bei gleichmäſsiger Vertheilung aller auf ihrer ganzen cylindrischen Auſsenfläche angebrachten Tangenten, von zweien nach einander folgenden Tangenten, (nämlich von ihren angreifenden Flächen) abgeschnitten wird.
N die Anzahl aller Tangenten an der Welle.
n die Anzahl der Stampfer.

II. Für Hebeköpfe. (*Fig.* 281 — 284.)

397.) β nicht $< c \cdot \sqrt{\frac{h}{12}} + h$ oder nicht $< c \cdot \sqrt{\frac{R \cdot Bog.\, \theta}{12}} + R \cdot Bog.\, \theta$

Bog. θ wird für den Halbmesser $= 1$ ausgedruckt.
θ ist *Fig.* 284. $v\,c\,y$.

398.) $P = \left(1 + \frac{v\,w}{v\,x} \cdot \mu\right) \cdot Q$; 399.) $N = \frac{360}{\zeta}$; (ζ in Graden.)

Dabei die Voraussetzung, daſs immer nur 1 Stempel in Bewegung seyn soll.
Sollen immer $\mathfrak{N}$ Stempel in Bewegung seyn, so wird

400.) $N = \frac{\mathfrak{N} \cdot 360}{\zeta}$ und

Für 1 hübige Stampfer.	Für 2 hübige.	Für 3 hübige.	Für 4 hübige
$n = N$	$n = \frac{1}{2} N$	$n = \frac{1}{3} N$	$n = \frac{1}{4} N$.

Sind immerhin $\mathfrak{N}$ Stampfer in Bewegung, so hat man

$$401.)\quad P = \left(1 + \frac{v\,w}{v\,x} \cdot \mu\right) \cdot \mathfrak{N} \cdot Q.$$

Die vw läſst sich ohne methodische Rektifikation nach der Anweiſsung am Ende dieses §. finden. Hierzu *Fig.* 285.

β, c, h wie §. 393.

R der Halbmesser cv *Fig.* 284.

ζ der Erhebungswinkel vcx.

Q das Gewicht von *einem* Stempel.

P die in v erforderliche Kraft zum Gleichgewicht mit der gesammten Last (bei einem in Bewegung gesetzten Stempel Nro. 398, oder bei $\mathfrak{N}$ Stempeln Nro. 401), wofern die zur Ueberwucht erforderliche Kraft (welche fast immer unbedeutend ist) bei Seite gesetzt werden darf.

n die Anzahl erforderlicher Stampfer.

§. 394. Vertheilung und Verzeichnung der Stellen zur Einsetzung der Daumen auf der cylindrischen Oberfläche einer Welle. *Fig.* 286.

§. 395. Eine Bemerkung wegen der Hammerwerke.

XXV. Kapitel.

DIE WELLE MIT DEM KRUMMZAPFEN UND MIT DER HERZFOERMIGEN SCHEIBE.

§. 396. Der *Krummzapfen* oder eine Kurbel mit der am Kurbelgriffe, der hier die *Warze* heiſst, angebrachten Last. *Kurbelarm*, Bahn der Warze. *Fig.* 287 und 288.

§. 397. Nach dem gewöhnlichen Vortrage setzt man

$$402.)\quad P = 0{,}637 \cdot Q; \qquad Q = 1{,}57 \cdot P$$

Q die Last an der Warze.

P die an der Warze in senkrechter Richtung auf den Kurbelarm angebrachte Kraft, welche der Last, in Bezug auf ihr mittleres statisches Moment, gleich wäre.

§. 398. Die Gestalt des Krummzapfens gestattet keine gleichförmige Bewegung. Darum muſs P allemal gröſser als der mittlere Werth des Widerstandes d. i. gröſser als $0{,}637 \cdot Q$ seyn. Der Ingenieur muſs daher das Verhältniſs zwischen P und Q genauer kennen, als es Nro. 402. angegeben wird.

§. 399. Untersuchung des Gesetzes, nach welchem die Warze in ihrer Bahn herumlauft. Hierzu einige Formeln

(403.) (404.) und (405.)

welche als blos präparatorisch hier übergangen werden.

§. 400. Resultat jener Untersuchung. Es führt zu den Formeln

$$406.)\quad Q = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot (P - q) - \frac{2h}{r} \cdot \left(\frac{\Omega}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Omega\right)$$

$$407.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{2Q + \dfrac{2h}{r} \cdot \left(\dfrac{\Omega}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Omega}{\pi} + q \\ \quad = 0{,}637 \cdot Q + \dfrac{2h}{r} \cdot \left(\dfrac{\Omega}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}318 \cdot \Omega + q \text{ oder auch} \\ \quad = 0{,}637 \cdot Q + \dfrac{c^2}{gr} \cdot \left(\dfrac{\Omega}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}16 \cdot \Omega + q \end{cases}$$

Siehe §. 429.

Dabei darf sogar $\Omega > \Pi$ seyn, doch höchstens $\Omega = 4\ \Pi$, weil weiter hinaus die Formel schon merklich von der Wahrheit abzuweichen anfängt.

Q die an der Warze angebrachte Last.

r die Entfernung dieser Last von der Umdrehungsaxe (*cv* oder *cd Fig.* 288.)

q die auf diese Entfernung reducirte Nebenlast.

π die bekannte Verhältnifszahl 3,14...

c die mittlere Geschwindigkeit der Warze.

h die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe $\left(\dfrac{c^2}{4g}\right)$

Ω die mit der Last Q verbundene Masse, auf die Stelle. *d* d. h. auf die Entfernung r von der Umlaufaxe reducirt.

P die in der Entfernung r erforderliche Kraft zur Unterhaltung der Bewegung, senkrecht auf den Kurbelarm genommen.

Π die Summe von Masse, welche in *jedem* Augenblick in Bewegung ist, auf die Entfernung r reducirt.

Man sieht, dafs die Masse Ω, welche periodisch immer wieder von Neuem in Bewegung gesetzt werden mufs, nicht zu Π gehört.

Bei Stampfwerken gehört zu Ω nur die Masse des Stampfers, welcher periodisch von neuem ergriffen wird. Zwar fallen *alle* Stampfer nach einander periodisch ab, aber bei jedesmaligem Ergreifen eines neuen Stempels befinden sich die übrigen noch in Bewegung und ihre Masse, ob sie gleich als Last wirkt, gehört nicht zu Ω sondern zu Π. Hat man bei einem Stampfwerk z. B. immerhin 4 Stempel in Bewegung, so dafs statt eines abfallenden wieder ein neuer ergriffen wird, so gehört die Masse von 3 Stampfern zu Π, und nur die von einem zu Ω.

§. 401. Hier noch die Formel

$$408.)\quad P = 0{,}637 \cdot Q + q + \frac{0{,}01 \cdot c^2}{r} \cdot \Omega \cdot \left(\frac{\Omega}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Erinnerungen gegen die Folgerung, dafs P desto kleiner werde oder dafs man einer desto geringeren Kraft bedürfe, je gröfser man Π mache.

§. 402. Bei einem bestimmten Werthe von Q giebt es einen bestimmten Werth von Π, für welchen P ein *Minimum* wird.

Man denke sich an der Welle des Krummzapfens ein Rad mit einem Kranze. Es sey nun

$\mathfrak{R}$ der äufsere Halbmesser des Kranzes.

$\mathfrak{r}$ der innere.

Π die auf die Entfernung r reducirte Masse aller in Bewegung bleibenden Theile, nach einem angenommenen Bau berechnet, in Bezug auf Pfunde.

$\mathfrak{p}$ das Gewicht von 1 Kubikfufs solcher Materie, aus welcher der Kranz besteht.

so erhält man

409.) Eine präparatorische Formel

$$410.)\quad \delta = \frac{\Omega \cdot \sqrt[3]{\dfrac{0{,}0001 \cdot c^4 \cdot (\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{r}^2)^2}{16 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot \rho^2}} - \Pi}{1{,}57 \cdot (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4) \cdot \mathfrak{p}} \cdot r^2$$

δ die Dicke, welche man der schon angenommenen bei der Berechnung von Π zum Grunde gelegten Kranzdicke zulegen muſs, um die vortheilhafteste Dicke zu erhalten, für welche P ein Minimum wird.

ρ der Halbmesser der Zapfen.

$\mathfrak{Q}$, Π werden in Bezug auf Pfunde ausgedruckt.

Setzt man für Π die auf die Entfernung r reducirte Masse aller in Bewegung bleibenden Theile, mit Ausschluſs der Masse des Radkranzes, so ist δ, nach Nro. 410, berechnet, die vortheilhafteste *ganze* Dicke des Kranzes, die das Minimum von P giebt.

§. 403. Wie man der Wahrheit nahe kommen kann, wenn die Warze beim Hin- und Hergange *verschiedene* Lasten zu wältigen hat.

§. 404. Gegenseitige Stellung und Belastung der Warzen, wenn mehrere Kurbelärme an einer Welle angebracht werden. *Fig.* 289.

§. 405. Hier einige Formeln.

(411.) und **(412.)**

Sie haben den Satz zur Folge, daſs die Vorrichtung mit Krummzapfen allemal der mit Trilling und einer verzahnten Stange vorgezogen werden muſs

§. 406. Gestaltung der Schaufelzapfen, und die Verbindung der Warze mit einer *Kurbelstange*. *Fig.* 290^a bis 290^d, 291, 292^a und 292^b.

§. 407. Wenn der Druck gegen die Warze bei ihrem Umlaufe $= W$ ist, so wird dieser Widerstand durch die an der Warze entstehende Reibung vergröſsert, und es wird

$$413.)\quad \text{der gesammte Widerstand an der Warze} = \left(1 + \frac{\mu\delta}{2r}\right) \cdot W$$

δ der Durchmesser der Warze.

r der Halbmesser ihrer Bahn (die Höhe des Kurbelarms).

§. 408. Beschreibung und Vorzüge der Krummzapfen mit *Kurbelscheiben*. Auch einige Bemerkungen wegen des Uebergewichts der Krummzapfen. *Fig.* 293^a bis 293^e.

§. 409. Die *herzförmige Scheibe;* ihre Einrichtung, Gebrauch und Zweck. *Fig.* 293^f und 293^g; 293^h

XXVI. Kapitel.

DIE WELLE MIT SCHWUNGMASSEN — REGULATOR.

§. 409.* *Schwungräder* und *Schwungkolben.*

§. 410. Wie müssen die Abmessungen eines Schwungrings von beliebiger Materie beschaffen seyn, wenn er mit einer Schwungscheibe von gegebenen Abmessungen und von einer bestimmten Materie einerlei Wirkung haben soll?

$$414.)\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{R} \sqrt[4]{\frac{d\varepsilon - \delta s}{d\varepsilon}}$$

$\mathfrak{R}$ der Durchmesser vom äuſsern Umfange des Schwungrings (und der Scheibe.)

$\mathfrak{r}$ der des innern Umfangs.

d seine Breite, parallel mit der Axe gemessen.

ε das specifische Gewicht seiner Masse.

δ die Dicke der Schwungscheibe.

s das specifische Gewicht ihrer Masse.

Für $d = \delta$ wird

$$415.)\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{R} \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon - s}{\varepsilon}} \text{ wo dann } \varepsilon > s \text{ seyn mufs.}$$

Eine empirische Regel von *Murray* und *Wood* giebt für den Schwungring bei einer Wattschen Dampfmaschine

$$415.^{*})\quad K = \frac{n \cdot 2000}{c^2}$$

Dabei ist

n die Anzahl von Pferden, welche mit der Maschine gleichen Effekt leisten.
c die Geschwindigkeit eines Punktes im mittleren Umfange des Schwungrings.
K das schickliche Gewicht des Schwungrings in Zentnern (zu 100 engl. ℔.)

§. 411 u. 412. Hier wird Betreibung einer Maschine vorausgesetzt, bei welcher das statische Moment der Last, wenn es auch nicht unveränderlich ist, doch ohne Bedenken nach seinem mittlern Werthe in Rechnung kommen kann, wobei aber wegen periodischen Wechsels ergriffener Massen (wie bei Stampf- und Hammerwerken) keine gleichförmige Bewegung eintreten kann. Welches ist die vortheilhafteste Dicke, die man einem schon angenommenen Kranze (dessen Masse blos für die Forderung der nöthigen Festigkeit angenommen worden wäre) noch zulegen darf, um das Minimum der zur Betreibung erforderlichen Kraft P zu erhalten?

416.) Eine präparatorische Gleichung.

$$417.)\quad \delta = \frac{-\mathfrak{D} + \sqrt{\frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}}}{\mathfrak{E}}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{A} = \frac{3{,}14 \cdot \mu \cdot \rho \cdot (\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2) \cdot \mathfrak{p}}{r}; \qquad \mathfrak{B} = b \cdot \Sigma \cdot (\Pi + \Sigma)$$

$$\mathfrak{C} = b \cdot \Sigma \cdot 1{,}57 \cdot (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4) \cdot \frac{\mathfrak{p}}{r^2}; \qquad \mathfrak{D} = t^2 \cdot g \cdot (2\Pi + \Sigma)$$

$$\mathfrak{E} = t^2 \cdot g \cdot 3{,}14 \cdot (\mathfrak{R}^4 - \mathfrak{r}^4) \cdot \frac{\mathfrak{p}}{r^2}$$

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{r}$, r, ρ, $\mathfrak{p}$ wie §. 402.

t die Anzahl von Sekunden, nach deren Verflufs immer wieder eine neue Masse von Gewicht Q ergriffen wird.

b der Weg, den der Lastpunkt in der Zeit t nach der Richtungslinie des Widerstandes durchlauft.

Π die auf die Entfernung r von der Umdrehungsaxe reducirte Masse von Theilen, welche bei der schon angenommenen Maschine immer in Bewegung sind, ganz so wie §. 400 verstanden.

B, im Texte genannt, ist der Weg, den der in der Entfernung r von der Axe angreifende Punkt in der Zeit t durchlauft.

Σ die zu Q gehörige Masse, auf die Entfernung $\frac{b}{B}\, r$ reducirt.

§. 413. Ein verneinter Werth von δ (Nro. 417.) würde zeigen, dafs die Festigkeit des Baues die mechanisch vortheilhafteste Dicke des Radkranzes nicht gestattet.

§. 414ᵃ. Die vorstehenden Sätze bleiben auch bei Maschinen mit Vorgelege anwendbar. Betrachtungen in Bezug auf die Frage:

Für welche Stelle soll bei einer Maschine mit Vorgelege die etwa noch weiter erforderliche Schwungmasse berechnet werden?

Fast immer lassen sich besondere Schwungmassen durch gehörig bestimmte Dicke der Kränze des Hauptrades (z. B. des Wasserrades) entbehrlich machen. Zuweilen können

Schwungmassen zugleich als Gegengewichte zur Beförderung eines gleichförmigeren Ganges sehr gute Dienste leisten.

§. 414.[b] Einrichtung eines *Regulators* und dahin gehörige Theorie.

XXVII. Kapitel.

VORRICHTUNGEN ZU GERADLINIGEN BEWEGUNGEN NACH BESTIMMTEN RICHTUNGEN.

§. 415. *Geradlinige* Bewegung ist immer auch mit *rückkehrender* Bewegung bei Maschinen verbunden, und kann nur durch besondere Vorrichtungen, mehr oder weniger genau, erhalten werden.

§. 416. *Stangenkünste.* Ihr Zweck. Dabei vorkommende Benennungen.

§. 417. Nach halbem Schube muſs die Kunst im Mittel stehen. Verkammung der Schubstangen. *Fig.* 294. Ihre Gestalt und Stärke.

$$418.)\quad \mathfrak{h} = \frac{(E+5)\,.\,\sqrt{(4+\frac{1}{2}Z)}}{240} \quad \textit{Fig. } 295.$$

E die Länge zwischen zwei Lenkern (Schwingen) in rheinl. Fuſsen.
Z der Widerstand den eine Stange zu überwinden hat.
$\mathfrak{h}$ die Stangenhöhe cd in rheinl. Fuſsen.
Die Breite $ab = \frac{5}{7}\,cd$.

§. 417.* *Baaders* Einrichtung zur willkührlichen Vergröſserung oder Verkleinerung des Hubs oder Schubs. Tab. XLVIII. *Fig.* 292[c].

§. 418. Ein stehender Lenker mit Schubstangen. *Fig.* 296, 297. Eine dergleichen Stangenkunst werde durch eine an ihrem Anfange angebrachte Kraft z. B. um 1 Fuſs fortgeschoben, so rückt ihr Endpunkt allemal um weniger als 1 Fuſs fort z. B. in einem einzelnen Falle um $\frac{1}{10}$ Fuſs weniger, in einem andern Falle um $\frac{1}{4}$ Fuſs weniger. Der Verlust am Schube ist desto gröſser 1) je gröſser der dem Schube entgegen gesetzte Widerstand, 2) je länger die Stangenkunst ist. Für die Ausübung wird beiläufig für jeden Fuſs Schub

$$419.)\quad \sigma = 0{,}0000017\,.\,\lambda\,\sqrt{(Q+400)}$$

λ die Länge der Stangenkunst in Fuſsen.
Q die Gröſse des Widerstandes in Cölln. Pfunden.
σ der Verlust am Schube für jeden Fuſs des Schubes, welcher am Anfange der Stangenleitung bewirkt wird.

§. 419. Wichtigkeit einer Stangenleitung von Eisen, wodurch der Schubverlust sehr vermindert werden kann.

§. 420. *Zwillinge.* Ein *stehender Fig.* 298. Ein *hängender Fig* 299. Ein *Viertelskreuz Fig.* 300, 301. Ein *Halbkreuz Fig.* 302; ein ganzes Kreuz, *Kunstkreuz Fig.* 303, 304. *Wendeböcke* (*Werkstempel*) mit zwei und mit vier Aermen *Fig.* 305 und 306.

§. 421. Beispiel einer Stangenkunst mit verschiedenen Wendungen und unter verschiedenen Steigewinkeln. *Fig.* 307.

§. 422. Doppelte Stangenleitungen sind bei etwas steilem Ansteigen die besten. *Fig.* 308.

§. 423. In ebenen Gegenden verdienen die Stangenleitungen mit horizontalen Schwingen den Vorzug. *Fig.* 309 bis 320, wo alle einzelne Theile im Text erklärt sind.

§. 424. Auch über höckerichte Flächen kann man noch mit solchen Stangenleitungen (mit horizontalen Schwingen) gut wegkommen. *Fig.* 321 und 322.

§. 425. Die eiserne Schubstangen werden auch bei dieser Art von Stangenleitung empfohlen. *Fig.* 322 und 323.

§. 426. Bemerkung wegen der Hebelärme, an welchen bei Pumpenbetreibung die Kolbenstangen eingehängt werden. Die Abweichung von der lothrechten Erhebung wird dabei unbedeutend. *Fig.* 324.

§. 427. Eine sehr einfache Vorrichtung zur Verhinderung der Abweichung einer Kolbenstange von der lothrechten Richtung. *Fig.* 325.

§. 427[a]. Eine andere Einrichtung zu demselben Zwecke. *Fig.* 326.

§. 427[b]. Eine leicht anwendbare Einrichtung, bei welcher mittelst einer Stange, welche zwei einander zugekehrte über einander liegende Hebelärme mit einander verbindet, und in deren Mitte man die Kolbenstange aufhängt, die gedachte Abweichung sehr vermindert wird. *Fig.* 327.

§. 427[c]. Zu vorstehender Einrichtung noch einige Bemerkungen. *Fig.* 328.

§. 427[d]. Die technische Konstruktion. *Fig.* 329 und 330.

§. 427[e]. Das englische Parallelogramm zu gleichem Zwecke. *Fig.* 331, 332[a].

§. 427[f], Seine Wirkungsweise und darauf gegründete Formeln.

(420.) (421.) (422.)

§. 427[g]. Einrichtung im Groſsen. *Fig.* 332[b] und 332[c].

§. 427[h], Eine Angabe von *Herrn von Reichenbach.* Noch eine neu beigefügte. *Fig.* 333.

§. 427[i]. Eine sehr empfehlenswerthe Einrichtung. *Fig.* 334.

§. 427[k]. Noch eine hierher gehörige sinnreiche Einrichtung. *Fig.* 335; 336.

§. 428. Einrichtungen zu gleichem Zwecke bei bloſsem *Zuge.* *Fig.* 337 — 340.

§. 429. Hier noch eine Erinnerung zu der Formel Nro. 407, und noch einige dazu beigefügte Formeln.

(423.) (424.) (425.) (426.)

XXVIII. Kapitel.

PRAKTISCHE BEMERKUNGEN UEBER WASSERLEITUNGEN, IN BEZUG AUF OFFENE REGULAERE KANAELE.

§. 430. Allgemeine Bemerkungen über Umstände, auf die man bei den Abmessungen eines Kanals Rücksicht zu nehmen hat.

§. 431. Wie hierher gehörige Bestimmungen von einander abhängen. Hierzu die Formeln für *freie horizontale* Kanäle.

$$427.)\quad M^2 = 10240.\,\frac{b^3\,h^4}{(b + 3{,}22\,.\,h)\,.\,L}\ \text{(in Pariser F.)}$$

$$428.)\quad h = \sqrt[6]{\frac{(n + 3{,}22\,.)\,.\,L\,.\,M^2}{10240\,.\,n^3}}$$

$$429.)\quad log.\,h = \frac{l\,(n + 3{,}22) + l\,.\,L + l\,.\,M^2 - (l\,.\,10240 + l\,n^3}{6}$$

M die in jeder Sekunde abflieſsende Wassermenge in Kub. F.
L die Länge des Kanals; *b* die mittlere Breite.
h die Tiefe des Wassers nahe beim Ausflusse des Wassers.

$n \left(= \frac{b}{h}\right)$ die Anzahl, welche anzeigt, wie vielmal die Wassertiefe in der mittlern Breite enthalten seyn soll, was Nro. 427 unbestimmt bleibt.

§. 432. Für *andere freie* Kanäle (bei welchen nämlich das Wasser nach der ganzen Breite und ganzen Tiefe am Ende frei abfällt) läſst sich *b* durch hier gewiesene Proberechnungen am leichtesten finden.

§. 433. Was vor der Anlage selbst in Bezug auf erforderliche Kraft, auf deſshalb erforderliche Wassermenge, und auf die Wassermenge welche wirklich beigeleitet werden kann, zu beobachten ist.

§. 434. Das Verhalten beim Nivellement. Bestimmung des herauskommenden nutzbaren Gefälles.

§. 4ė5. Wie man bei der Aushebung des Kanals mit Behutsamkeit und Sicherheit zn Werke geht.

§. 436. Verschiedene Einrichtungen einer Wasserleitung von Holz. *Fig.* 341ª — *Fig.* 341ⁱ.

§. 437. Eine von Mauerwerk. *Fig.* 342. Ein hölzernes Gerinne auf Mauerwerk gelagert. *Fig.* 344. Kanäle in aufgeführten Dämmen. *Fig.* 343.

§. 438. Noch eine praktische Erinnerung wegen hölzerner Gerinne. Ihre Tiefe und Dihlendicken.

§. 439. Arbeiten bei der Aushebung des Grabens. Gröſse der Böschung in erdigem gut stehendem Boden. Fälle wo Vermauerung nothwendig wird. Arten der Vermauerung. *Fig.* 345 — 349. Dabei können *Röste* unter den Mauern nothwendig werden, und selbst *Pfahlröste.* Sogar kann Befestigung des Kanalbodens nach seiner ganzen Breite nothwendig werden.

§. 440. Löcher in den Futtermauern. Fälle, wo Kanäle *überwölbt* werden.

§. 441. Wasserleitungen mittelst *Stollen.*

§. 442. Wie Wehre nothwendig werden; zuweilen Durchfluſs- oder Schleuſsenwehre statt der Ueberfallwehre. Gewöhnliche Stelle der Radstube und der Rösche bei einem Kanale. Mögliche Ausnahme. *Fig.* 350.

§. 443. Verschiedene Arten von Wehren.

§. 444. *Lichte* Wehre. *Fig.* 351 — 353.

§. 445. Ueberfallwehre sind häufig zugleich Vorrathswehre.

§. 446. *Steinerne* dichte Ueberfallwehre, auch mit *Flügelmauern.* *Fig.* 354 — 356.

§. 447. *Hölzerne* dichte Ueberfallwehre, zugleich als Vorrathswehre. *Fig.* 357.

§. 448. *Durchlaſs*- oder *Schleuſsenwehre.* Sie können unschädlich gemacht werden,

§. 449. Dergleichen mit *Freiarchen* oder *wüsten Gerinnen.*

§. 450. Ihre Bauart. *Fig.* 358 — 361.

§. 451. Aufmerksamkeit auf unschädliche Höhe der Wasserstemmung.

§. 452. Anstalten zur Erhebung der Fallschützen. *Fig.* 362.

§. 453. Noch eine andere Einrichtung. *Fig.* 363ª, 363ᵇ.

§. 454. Zurichtung der Fallschützen. *Fig.* 364.

§. 455. Mittel, den Hindernissen zu begegnen, welche das Wasser bei Erbauung eines Wehres den Arbeiten in den Weg legt. *Fig.* 365 — 367.

§. 456. Bedeutende Vorraths- oder Sammlungswehre mit durchlaufenden Oeffnungen. *Fig.* 368-370.

XXIX. Kapitel.

PRAKTISCHE BEMERKUNGEN UEBER WASSERLEITUNGEN DURCH ROEHREN. INSBESONDERE AUCH VON ROEHREN- UND SPRINGBRUNNEN. — VERTHEILUNG DER WASSER IN STAEDTEN.

§. 457. Mannichfaltige Zwecke dieser Wasserleitungen.

§. 458. Eine in der Ausübung sehr gewöhnliche Art hölzerne Röhren zusammenzutreiben. *Fig.* 371, 372.

§. 459. Mängel der vorstehenden Art der Zusammensetzung hölzerner Röhren.
§. 460. Eine bessere Methode, mittelst eiserner Büchsen. *Fig.* 373ª, 373ᵇ.
§. 461. Die vorzüglichste ist die mit Büchsen, welche in das Holz selbst, zwischen dem inneren und äusseren Umfange der Röhrenmündungen eingetrieben werden. *Fig.* 374.
§. 462. Holzarten und Dicke der Röhrenwände. *Fig.* 375.
§. 463. Lagerung der Röhren.
§. 464. Ihre Beschützung gegen das Gefrieren des Wassers. *Fig.* 376 — 378.
§. 465. Ihre Beschützung gegen Erwärmung des Wassers.
§. 466. Man kann sich in Bezug auf die Beschützung gegen das Gefrieren und gegen die Erwärmung der nachstehenden Formel bedienen:

$$430.)\quad h = 6 + \frac{M+1}{M} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1000}\,(24 \pm 6)$$

wo das obere Zeichen in Bezug auf Wärme
das untere — — — auf Kälte
gebraucht wird.

M die in 1 Minute abfliefsende Wassermenge in Kub. F.
λ die Länge der Röhrenleitung in Fufsen.
h die Höhe der Bedeckung mit Erde über dem oberen Rande der Röhren (oder mn. *Fig.* 376 — 378.) *in Zollen.*

§. 467. Die Zusammensetzung eiserner Röhren mittelst Scheiben und Schrauben. *Fig.* 379ª — 379ᵉ.
§. 468. Die Zusammensetzung mittelst büchener Fäfschen. Diese verdient den Vorzug. *Fig.* 380ª, 380ᵇ.
§. 469. Wendungen der Röhrenleitung mittelst gekrümmter Verbindungsstücke. Röhrenleitungen, die über das Niveau des ursprünglichen Wasserspiegels steigen. *Fig.* 381, 382.
§. 470. Anstalten zur Reinigung einer Röhrenleitung von eingeschlichener Luft oder andern fremdartigen Theilen. — Vermauerte *Ablässe.* *Fig.* 383 — 386.
§. 471. Anstalten zur Einleitung des Wassers in eine Röhrenleitung.
§. 472. Nothwendigkeit einer *Brunnenstube.* Vor der Anlage mufs das Wasserbedürfnifs ausgemittelt werden.
§. 473. Anstalten zur Einrichtung der Wasserstube.
§. 474. Zuweilen müssen Maschinenwerke zu Hülfe genommen werden, um einem wasserdürftigen Orte Wasser zuführen zu können.
§. 475. Die *Leitungslinie* verdient eine vorzügliche Aufmerksamkeit.
§. 476. Zweckmäfsige Vertheilung der Wasser in einer Stadt ist ein wichtiger Gegenstand.
§. 477. Plan der ganzen Stadt und dessen Eintheilung in Quartiere, mit Ueberrechnung des Wasserbedürfnisses für jedes Quartier.
§. 478. Vertheilung der Quartiere nach Distrikten, so dafs jedem Distrikte mehrere Quartiere zugeordnet werden. Das *Hauptbrunnenhaus* mit dem *Stadtkessel* zur Vertheilung des Wassers in die *Distriktskessel.*
§. 479. Bestimmung der Abflufsöffungen zur Leitung nach den Distrikten.
§. 480. Anordnungen im Hauptbrunnenhause, wo dem Stadtkessel so viele Kästen beigeordnet werden, als man Distrikte hat.
§. 481. Ein kleineres Brunnenhaus in jedem Distrikte.
§. 482. Wie in Bezug auf die erforderlichen Röhrenleitungen die Berechnungen geführt werden.
§. 483. *Die Springbrunnen.* Man hat hier (*Fig.* 387.)

$$431)\quad d^5 = \frac{M^2 \cdot \lambda}{13865 \cdot H}.$$

H die Höhe des Wasserspiegels in Einem der um den Stadtkessel angebrachten Kästen über dem Wasser im zugehörigen Röhrenstock.
λ die Länge einer dabei angebrachten Röhrenleitung bis zum zugehörigen Röhrenstock.
M die Wassermenge, welche in 1 Sekunde hervorspringen soll.

§. 484. Hierher gehörige Berechnung der Strahlhöhe.

§. 485. Geringste Gröſse des zugehörigen Bassins.
§. 486. Zurichtung des Bassins. *Fig.* 388 — 396.
§. 487. Bemerkungen und Bestimmungen in Bezug auf Dicke des Strahls. *Hohle* Strahlen. *Fig.* 397.
§. 488. Warum man den Strahl selten durch eine dünne Platte steigen läſst. *Fig.* 398.
§. 489. Dieser §. fällt jetzt nebst *Fig.* 399 und 400 ganz weg. Siehe den Text.
§. 490. } Darstellung einiger Springwerke zur Verschönerung öffentlicher Plätze. *Fig.* 401[a] — 401[c];
§. 491. } 402[a] und 402[b]; 403; 404[a] und 404[b]; 405 — 407.

XXX. Kapitel.

VOM BAU UND WIRKUNG DER OBERSCHLAECHTIGEN WASSERRAEDER.

§. 492. Begriff des *oberschlächtigen* Rades.
§. 493. Veränderlichkeit des statischen Momentes einer gefüllten Schaufel bei ihrem Umlaufe. Sie begründet den Effekt des Rades.
§. 494. Das auf das Rad herabstürzende Wasser beginnt erst mit vollendeter Füllung der jedesmaligen Einschuſsschaufel seine volle Wirkung. Daher bleibt allemal ein Theil von der Höhe des Wasserrades unbenutzt.
§. 495. Nähere Berechnung dieses Verlustes, wenn das Rad nur vier Schaufeln hätte.
§. 496. Ungleichförmige Bewegung dieses Rades.
§. 497. Bestimmung der Anzahl von Schaufeln für ein oberschlächtiges Rad.

$$421.^{*}) \quad n = 18 + 3R$$

R der mittlere Halbmesser des Rades in rheinl. Fuſsen.
n die genügende Anzahl von Schaufeln.

§. 498. Die Geschwindigkeit c des Rades (eines Punktes im mittlern Umfange zwischen dem inneren und äusseren des Radkranzes) darf nicht zu klein genommen werden. Hier die Bestimmung

$$432.) \quad c = 1 + \tfrac{1}{8}n$$

§. 499. Eine mögliche Minderung des Werthes von c (No. 432). Vorkehrungen, die sich dann treffen lassen.
§. 500. Der Augenblick, in welchem das einstürzende Wasser zwischen dem äuſsern Umfange des Rades und dem Schaufelboden nur *schwebt*, ohne noch auf das Rad drücken zu können, ist hier als unbedeutend nicht in Rechnung gebracht worden.
§. 501. Allemal geht ein Theil von der Höhe des Rades von oben herab als unbenutzt verloren. Diese verlorne Höhe heiſse v, so ist

$$433.) \quad v = R \,.\left(1 - \frac{Cos.\,\dfrac{b}{6{,}28\,.\,R}\,.\,360^\circ + Cos.\,\dfrac{b + \dfrac{6{,}28\,.\,R}{n}}{6{,}28\,.\,R}\,.\,360^\circ}{2}\right)$$

R der mittlere Halbmesser des Rades.
b die Länge des Bogenstücks von der höchsten Stelle des Rades bis an den eintsürzenden Wasserstrahl (in Fuſsen, wenn R in Fuſsen ausgedrückt ist.)
n die Anzahl aller Schaufeln am Rade.

Auch wird 434.) $m = \frac{6{,}28 \cdot R \cdot M}{n \cdot c}$ $\left\{\begin{array}{l} M \text{ die Zuflußmenge in einer Sekunde.} \\ c \text{ die Geschwindigkeit des Rades.} \\ m \text{ die Wassermenge, welche die Einschußschaufel auffängt.} \end{array}\right.$

§. 502. Durch die Schwungkraft geht ein Theil vom Druck des Wassers verloren, und es bleibt

435.) Das statische Moment des Wassers im *obern* Quadrant für $\frac{1}{4}n$ Schaufeln, wovon jede die Füllung m (No. 434) enthält, ohne Rücksicht auf die verlorne Höhe v (No. 433.) $= \frac{1}{4}n \cdot \left(0{,}637 - 0{,}165 \cdot \frac{c^2}{R}\right) \cdot mR$
Die Buchstaben wie vorher.

Für alle Fälle der Ausübung ist hinlänglich genau

436.) Das No. 435 erwähnte statische Moment mit Rücksicht auf die verlorne Höhe $= \frac{1}{4}n \cdot \left(0{,}637 - 0{,}165 \cdot \frac{c^2}{gR}\right) \cdot m\zeta R$

wenn die in No. 433 eingeschlossene Größe durch $1 - \zeta$ ausgedrückt wird.

§. 503. Für den *unteren* Quadrant genügt in der Ausübung die Bestimmung

437.) Statisches Moment des Wassers $= \left(0{,}1333 + 0{,}0215 \cdot \frac{c^2}{gR}\right) \cdot n \cdot m \cdot R$

und

438.) Statisches Moment aller Schaufeln $= \left(\left(0{,}159 - 0{,}041 \cdot \frac{c^2}{gR}\right) \cdot \zeta + 0{,}1333 + 0{,}0215 \cdot \frac{c^2}{gR}\right) \cdot nmR$

In Bezug auf rheinl. Fuße wird dieses Moment $=$

439.) $\left(\left(0{,}159 - 0{,}00263 \cdot \frac{c^2}{R}\right) \cdot \zeta + 0{,}1333 + 0{,}00138 \cdot \frac{c^2}{R}\right) \cdot n \cdot m \cdot R$

oder, wenn man $\frac{b}{R}$ (s. §. 501) nur beiläufig $= \frac{1}{4}$ setzt,

440.) Statisches Moment aller Schaufeln $= \left(0{,}284 - 0{,}00112 \cdot \frac{c^2}{R}\right) \cdot n \cdot m \cdot R$

und für die Ausübung, welche doch keine scharfe Bestimmung zuläßt, noch genügend

441.) Dasselbe $= 0{,}284 \cdot n \cdot m \cdot R = 0{,}568 \cdot \frac{1}{2}n \cdot m \cdot R$ (s. No. 444).
m die in die Einschußschaufel stürzende Wassermenge. (No. 434).
$\frac{1}{2}n$ die Anzahl von Schaufeln auf der einen Radhälfte.
R der mittlere Halbmesser des Rades.
Es wird vorausgesetzt, daß c die Grenze (No. 432) nie überschreite. *Fig.* 409.

§. 504. Der Wasserring abc (*Fig.* 410), dessen Masse (als schwer betrachtet) $= \mathfrak{M}$ wäre, wirkt so, als wäre in b ein Gewicht angebracht, das

442.) $= \frac{ac + fc}{\text{Bog. } abc} \cdot \mathfrak{M}$ wäre.

Man findet hier 443.) Statisches Moment aller Schaufeln $= 0{,}286 \cdot n \cdot m \cdot R$
Daher als Mittel zwischen No. 441 und 443

444.) Das statische Moment $= 0{,}285 \cdot n \cdot m \cdot R$

§. 505. Man hat auch, wenn wir das statische Moment mit S bezeichnen,

445.) $S = 0{,}285 \cdot t \cdot M \cdot R$
446.) $M = \frac{S}{0{,}285 \cdot t \cdot R}$
t die Umlaufszeit des Rades in einer Sekunde.
M die Menge des Aufschlagwassers in einer Sekunde.
R der mittlere Halbmesser des Rades.

§. 506. Hier die Bestimmungen

447.) $Q = \frac{S}{r} q$

448.) $Q = \frac{0{,}285 \,.\, n \,.\, m \,.\, R}{r} - q$

449.) $Q = \frac{0{,}285 \,.\, t \,.\, M \,.\, R}{r} - q$

450.) $M = \frac{r \,.\, (Q + q)}{0{,}285 \,.\, t \,.\, R}$

Q die unveränderliche Nutzlast auf die unveränderliche Entfernung r gebracht.
q die Nebenlast auf dieselbe Entfernung von der Axe gebracht.
Die übrigen Buchstaben wie vorher.

§. 507. *Theilrifs*, *Boden-* oder *Riegelschaufel* und *Stofsschaufel*. *Fig.* 411ᵃ.
§. 508. Acht verschiedene Methoden (Maximen) zur Verzeichnung der Schaufeln. *Fig.* 411ᵇ.
§. 509. Des Verfassers Art, die Schaufeln zu verzeichnen. Zugleich

451.) Einfache Regel zur Bestimmung der Schaufellänge.

§. 510. Hier zur Bestimmung der Breite der Stofsschaufel ac (*Fig.* 411ᵃ)

452.) $a\,c = \beta \,.\, \sqrt{(Cot.\ \alpha^2 - \frac{4}{9})}$
Für $\alpha = 30^0$ wird hiernach
$a\,c = 1{,}6 \,.\, \beta.$

α der Winkel $e\,k\,b$, für welchen die obere Weite der Zelle $a\,c\,b$, nämlich die $a\,b$, horizontal liegen soll.
β die Breite des Kranzes $b\,d$.

Ferner

453.) $\beta = 8 + \frac{1}{6} R.$

454.) $a\,b$ (*Fig.* 411ᵃ) $= 2\,\beta$

455.) $A = 0{,}289 \,.\, \beta^2$

456.) $\lambda = \frac{3{,}46 \,.\, m}{\beta^2}$

457.) $\lambda = \frac{3{,}46 \,.\, t \,.\, M}{n \,.\, \beta^2}$

457*.) $m = \frac{n \,.\, \beta}{21{,}6 \,.\, R} \,.\, K$

A Flächeninhalt des Dreiecks $a\,b\,c$, für $\alpha = 30^0$.
λ die Länge der Schaufel zwischen beiden Radkränzen.
m die Füllung der Einschufsschaufel.
R der mittlere Halbmesser des Rades.
t die Zeit eines Umlaufs in Sekunden.
n die Anzahl aller Schaufeln (No. 431*).
K der kubische Inhalt der obersten Zelle $\alpha\beta\gamma\varphi v$ bis an den Rand $\alpha\, v$.
M die in 1 Sekunde beifliefsende Wassermenge.

§. 511. Rekapitulation von 11 Gleichnngen für die Gröfsen
n, c, t, m, β, ac *Fig.* 411, bc ebendas., λ, Q, M und m.

§. 512. Wenn E den absolut gröfsten Effekt bezeichnet, welchen eine bestimmte Wassermenge bei einem Abfalle von der Höhe $2\,R + u + \beta$ möglicher Weise leisten könnte, und e den Effekt, welchen sie in der Anwendung auf ein oberschlächtiges Rad, dessen mittlerer Halbmesser $= R$ wäre, leisten kann, so ist genau genug

458.) $e = \frac{0{,}9}{1 + \frac{u + \frac{4}{3}\beta}{2R}} \,.\, E$

wofür man auch

459.) $e = \frac{0{,}9}{1 + \frac{1}{R}} \,.\, E$

$= \frac{9R}{10 \,.\, (R + 1)} \,.\, E$

setzen kann.

u die Höhe von der Bodenfläche des Gerinnes, aus welchem das Wasser herabstürzt.
β die Breite des Kranzes.
R der mittlere Halbmesser des Wasserrades.

§. 513. Das oberschlächtige Rad *mit dem Krummzapfen*. Hier

460.) Der gesammte Widerstand auf die Entfernung r gebracht $\Big\} = 0{,}637 \,.\, Q + \frac{0{,}01 \,.\, \mathfrak{C}^2}{r} \,.\, \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathfrak{Q} + q$

461.) $$M = \frac{r \,.\, (0{,}637 \,.\, Q + q) + 0{,}01 \,.\, \mathfrak{C}^2 \,.\, \mathfrak{Q} \,.\, \sqrt{\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}}}{0{,}285 \,.\, t \,.\, R}$$

r die Höhe des Kurbelarms.
Q die an der Warze widerstehende Nutzlast.
$\mathfrak{Q}$ die mit der Nutzlast verbundene Masse (z. B. eine Stangenkunst) auf die Entfernung r reducirt.
q die auf die Entfernung r reducirte Nebenlast.
R der mittlere Halbmesser des Rades.
Π die in beständiger Umlaufsbewegung bleibende Masse auf die Entfernung r gebracht.
t die Zeit eines Umlaufs in Sekunden.
$\mathfrak{C}$ die mittlere Geschwindigkeit der Warze $\left(= \frac{6{,}28 \quad r}{t}\right)$.

Die Formel für M ist bis zu $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi} = 2$ noch ziemlich genau, und sie bleibt noch bis zu $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi} = 4$ brauchbar. Aber solche Fälle kommen fast nie vor; meistens ist $\frac{\mathfrak{Q}}{\Pi}$ ein kleiner Bruch.

§. 514. Vergleichung der theoretischen Bestimmung (No. 458) mit Versuchen (mittelst eines Modellrädchens) von *Bossut*. Prüfung dieser Versuche. *Fig.* 412.

§. 515. Fortsetzung. Die Anwendbarkeit der Formel (No. 458) wird dadurch noch mehr bestätigt. Unrichtige Folgerungen aus dergleichen Versuchen.

§. 516. Versuche von *De Parcieux* und *Smeaton*, gleichfalls mit Modellrädchen. Sie haben wenig Werth und verleiten den Empiriker zu irrigen Folgerungen.

§. 517. Eine *Spannschütze* nach Freiberger Einrichtung. *Fig.* 417.
Schwedische Einrichtungen oberschlächtiger Räder. *Fig.* 414[a], 414[b], 415, 416[a] — 416[c].
Französische Einrichtungen. *Fig.* 418, 419.

§. 518. Warum hier die zahlreichen Beobachtungen von *Nordwall* bei Seite gesetzt werden. Hier

462.) Die Bestimmung der Nutzlast bei einem für einen bestimmten Zufluſs M gebauten oberschlächtigen Rad, wenn $2M$, $3M$, $4M$, $5M$ auf das Rad gelassen wird.

Wie in solchen Fällen der Verlust am Effekte durch einen Mantel sehr vermindert werden kann. *Fig.* 420.

§. 519. Bisher war die Wirkung des vom einstürzenden Wasser herrührenden Stoſses nicht berücksichtigt worden. Diese hinzugenommen wird hier die Nutzlast in der Entfernung r von der Axe

463.) $$Q = \frac{0{,}285 \,.\, n \,.\, m \,.\, (R + 0{,}4 \,.\, h)}{r} - q$$

h die Höhe des Wasserspiegels im Gerinne über der höchsten Stelle der Einschuſsschaufel.
Die übrigen Buchstaben wie §. 510.

Oder auch 464.) $$Q = \frac{0{,}285 \,.\, 6{,}28 \,.\, R \,.\, \frac{M}{c} \,.\, (R + 0{,}4 \,.\, h)}{r} - q$$

wo c die Geschwindigkeit des Rades ist.

Alle bisherige Bestimmungen setzen übrigens voraus, daſs das Aufschlagewasser in die zweite höchstens dritte Schaufel von oben herab eingeleitet werde.

XXXI. Kapitel.

MITTELSCHLAECHTIGE WASSERRAEDER.

§. 520. Wie sich das mittelschlächtige Rad vom oberschlächtigen und dem unterschlächtigen unterscheidet.

§. 521. Einleitung des Wassers auf das mittelschächtige Rad. *Fig.* 421, 422.

§. 522. Vorläufige Bestimmung der Nutzlast, die noch einer Korrektion bedarf.

§. 523. Die Bestimmungen

$$464^*.)\quad \begin{cases} n = (1 + \tfrac{1}{4}\,Sin.\alpha)\,.\,(18 + 3\,R) \\ c = \dfrac{1 + \tfrac{1}{8}n}{1 + \tfrac{1}{4}\,.\,Sin.\alpha} \end{cases}$$

$$465.)\quad Q = \frac{0{,}285\,.\,H\,.\,n\,.\,m\,.\,(R + 0{,}4\,.\,h)}{2R\,.\,r\,.\,(1 + \tfrac{1}{10}\,.\,Sin.\alpha)} - q \quad (Fig.\ 421).$$

H die Höhe op; h die Höhe vw.

α der Winkel qcb.

Die übrigen Buchstaben wie vorher (§. 506 und 510).

§. 524. Mittelschlächtige Räder mit flacher liegenden Stoſsschaufeln und mit einem *Kropfgerinne.*

§. 525. Fälle, wo mittelschlächtige Räder den oberschlächtigen vorzuziehen sind.

XXXII. Kapitel.

UNTERSCHLAECHTIGE WASSERRAEDER.

§. 526. Begriff des unterschlächtigen Wasserrades. Dieses Rad läſst 13 Abänderungen zu, woraus sich 88 verschiedene Anordnungen ergeben.

§. 527. Verschiedene hierhergehörige Benennungen. Auch verschiedene Einrichtungen unterschlächtiger Räder nach *Nordwall*, *Eiselen* u. a. *Fig.* 423 — 429.

§. 528. Hauptforderungen zur Vollkommenheit eines unterschlächtigen Rades.

§. 529. Erste Begründung einer Theorie der unterschlächtigen Wasserräder. Erklärung hierher gehöriger Benennungen. S. unten §. 540.

§. 530. Nach (§. 242) war $p = \frac{C - c}{2g}\,.\,(M - m)$. (*Fig.* 225).

C die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte mn, bis zu welchem die Bewegung beschleunigt wird.

c die Geschwindigkeit der Schaufeln, beiläufig in ihrer Mitte.

g die bekannte Zahl 15,62 in rheinl Fuſsen.

M die in 1 Sekunde abflieſsende Wassermenge (in Kub. Fuſsen oder in ℜ.)

m die durch den Spielraum unter und neben den Schaufeln unbenutzt in einer Sekunde abfliefsende Wassermenge.

p die Gröfse des Drucks, welchen das Wasser auf die Schaufeln ausübt.

§. 531. Hier die hypothetischen Bestimmungen

$$466.)\quad H = \frac{0{,}66 \,.\, \mathfrak{H} + \mathfrak{h}}{1 + 0{,}02 \,.\, \lambda} \text{ (in Bezug auf rheinl Fufse.)}$$

$$467.)\quad C = 2 \,.\, \sqrt{15{,}6 \,.\, \frac{0{,}66 \,.\, \mathfrak{H} + \mathfrak{h}}{1 + 0{,}02 \,.\, \lambda}} \text{ (Bis zu } \lambda = 30' \text{ brauchbar.)}$$

C wie vorher; *H* die zugehörige Höhe.

$\mathfrak{H}$ das *obere* Gefälle (vom Wasserspiegel bis zur Mitte der Schützenöffnung herab gerechnet).

$\mathfrak{h}$ das *untere* (von der Mitte der Schützenöffnung bis zur Mitte der untersten Schaufel).

λ die Länge des ganzen Gerinnes.

§. 532. Hier zwei Bestimmungen

(468.) (469.)

die in der Folge nicht gebraucht werden.

§. 533. Hier die Formeln

(470.) (471.) (472.) (473.) (474.)

die gleichfalls ohne Gebrauch bleiben.

§. 534. Die Bestimmungen

(475.) (476.)

§. 535. In Bezug auf den Krummzapfen

(477.)

} ohne weiteren Gebrauch.

§. 536. Hier die Bestimmungen

$$478.)\quad n = \left(2{,}7 - \frac{M}{M + 10}\right) . 2 \,.\, R; \qquad 479.)\quad m = \tfrac{1}{2}\, C \,.\, s$$

$$480.)\quad s = \frac{M - m}{c}; \qquad 481.)\quad m = C \,.\, a \,.\, (\tfrac{1}{2} l + b)$$

für ein Straubrad.

$$482.)\quad l = \frac{s}{0{,}8} = \frac{10 \,.\, M}{8 \,.\, c}; \qquad 483.)\quad m = C \,.\, a \,.\, (\tfrac{1}{2} l + b + \delta)$$

für ein Staberrad.

§. 537. Vorschlag horizontaler Schufsgerinne, schon von *Deparcieux*. Hierher gehörige Versuche von *Nordwall*. *Fig.* 424 — 427. Insbesondere

I. Bei der senkrechten Stellung flacher Schaufeln. *Fig.* 423.

II. Bei gebrochener Schaufelung. *Fig.* 424, 427.

III. Bei schiefer Stellung flacher Schaufeln. *Fig.* 426.

§. 538. Bemerkung wegen des gröfseren Effekts bei schiefer Schaufelung.

§. 539. *Nordwall's* Schaufelung, vorhin no. III. *Fig.* 426. Auch Versuche mit einem Modellrädchen von *Bossut*.

§. 640. Betrachtung der Räder §. 537. II.

Nunmehr die eigentlich hierher gehörige vom Verfasser später bearbeitete zweite *Begründung einer Theorie der unterschlächtigen Räder*. S. oben §. 529.

§. 541. Die erste Begründung fand der Verfasser späterhin unbrauchbar; mehrere dabei vorkommende richtige Angaben und Berechnungen werden in dieser zweiten benutzt.

§. 542. Warum die erste hier nicht angenommen werden kann.

§. 543. Nähere Betrachtung der Wassermenge, welche bei *Nordwall's* Versuchen auf die Schaufeln wirken konnte.

§. 544. Wirkliche Effekte bei 3 Versuchen, in Bezug auf §. 537. I.

§. 545. Effekte bei 3 Versuchen, in Bezug auf §. 537. II.

§. 546. Effekte bei 3 Versuchen, in Bezug auf §. 537. III.
§. 547. Zusammenstellung der *beobachteten* und der, nach der reinen Theorie des *Stofses berechneten* Effekte, beim *horizontalen* Gerinne.
§. 548. Bemerkungen über die Zulässigkeit der hier angestellten Berechnungen in Bezug auf Bestimmung des theoretischen Effekts.
§. 550. Der Ausspruch des vorigen Paragraphs durch Beobachtungen bestätigt.
§. 551. Bei horizontalen Schufsgerinnen mufs die senkrechte Stellung der Schaufeln vermieden werden.
§. 552. Hypothetisch steht hier *für die horizontalen Gerinne*

$$484.)\quad p = \frac{\delta . C - \varepsilon . c}{2g} . (M - m)$$

wo die noch unbekannten Werthe der Koëfficienten δ und ε erst noch aus Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Diese geben dann

$$485.)\quad p = \frac{1{,}37 . C - 1{,}17 . c}{2g} . (M - m)$$

für das Rad no. II. (§. 537)

und für dasselbe Rad

$$486.)\quad Q = \frac{R}{r} . \frac{1{,}37 . C - 1{,}17 . c}{2g} . (M - m) - q$$

Aber für das Rad no. III.

$$487.)\quad Q = 0{,}94 . \left(\frac{R}{r} . \frac{1{,}37 . C - 1{,}17 . c}{2g} . (M - m) - q\right)$$

Q die Nutzlast; q die Nebenlast.
R die Entfernung des Kraftpunktes von der Radaxe.
r die Entfernung des Lastpunktes
M, m, C, c, wie §. 530.
Der Werth von C wird nach No. 467 bestimmt, da dann hier, für die horizontalen Gerinne, $\mathfrak{h} = o$ gesetzt werden mufs.

§. 553. Für das Maximum des Nutzeffekts ist hiernach, beim horizontalen Gerinne

$$488.)\quad c = 0{,}59 . C - \frac{0{,}855 . r . g . q}{R . (M - m)}$$

§. 554. Für den gröfsten Totaleffekt wird

$$489.)\quad Q^* . c = \frac{R}{r} . 0{,}8 . \frac{C^2}{4g} . (M - m)$$

oder auch

$$490.)\quad Q^* . c = 0{,}52 . \frac{R}{r} . \frac{\mathfrak{H}}{1 + 0{,}02 . \lambda} . (M - m)$$

Q^* die Totallast $(Q + q)$. Die übrigen Buchstaben wie No. 487 und 467.
Das Verhältnifs des Effekts zu dem des oberschlächtigen Rades.

491.) beiläufig wie 4 zu 9.

Bisher in Bezug auf horizontale Gerinne; jetzt von unterschlächtigen Rädern mit fallenden Gerinnen.

§. 555. Vorläufige Bemerkungen.
§. 556. Beobachtungen von *Nordwall.* Es bezieht sich noch wie §. 437. I. auf *Fig.* 423, II. auf *Fig.* 424 und 427, III. auf *Fig.* 426. Hier kommen noch Versuche IV. bei gebrochenen Schaufeln *Fig.* 430 hinzu. Die bisherigen Bestimmungen bleiben in Bezug auf Effektsbestimmung auch hier brauchbar, aber sie geben c augenscheinlich zu grofs, was zu erkennen giebt, dafs der Ausdruck für p einer allgemeinern Form bedarf, durch die er auf die vorkommenden Werthe von $\mathfrak{h}$ anwendbar, und für $\mathfrak{h} = o$ in die Gleichung No. 484 verwandelt

wird. Hier mufs man der Theorie entsagen und in den allmähligen Verallgemeinerungen sich von der Hand der Erfahrung leiten lassen. So gelangt man zur allgemeinern Bestimmung

§. 557.

$$492.)\quad Q + q \text{ oder } Q^* = \frac{R}{r} \cdot \left(\frac{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1{,}37 \cdot C - \left(\frac{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}{\mathfrak{H}}\right) \cdot 1{,}17 \cdot c}{2g} \cdot (M - m)$$

und der Effekt

$$493.)\quad Q^* \cdot c = \frac{R}{r} \cdot \left(\frac{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1{,}37 \cdot Cc - \left(\frac{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 1{,}17 \cdot c^2}{2g} \cdot C \cdot (M - m)$$

Für das Maximum des Effekts wird

$$494.)\quad c = 0{,}585 \cdot \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}}\right) \cdot C$$

Nun wird $\alpha = 0{,}25$ gesetzt, und dieses giebt für das Maximum des Effekts

$$495.)\quad \begin{cases} c = 0{,}585 \cdot \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H} + \alpha\mathfrak{h}}}\right) \cdot C \\ Q^* = \frac{R}{r} \cdot \left(\frac{\mathfrak{H} + 0{,}25 \cdot \mathfrak{h}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1{,}37 - 0{,}684 \cdot \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H} + 0{,}25 \cdot \mathfrak{h}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2g} \cdot (M - m) \end{cases}$$

Die Buchstaben wie §. 554.

Diese Bestimmung kann beibehalten werden, so lang die Höhe vom Mittelpunkt der untersten Schaufel bis zum Stofspunkte der ersten Stofsfläche nicht kleiner als $\frac{3}{4}\mathfrak{h}$ ist.

§. 558. Wird die zuletzt gedachte Höhe durch $\varepsilon \cdot \mathfrak{h}$ ausgedrückt, so wird allgemeiner

$$496.)\quad Q^* = \frac{R}{r} \left(\frac{\mathfrak{H} + \frac{\varepsilon\mathfrak{h}}{3}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1{,}37 \cdot C - \left(\frac{\mathfrak{H} + \frac{\varepsilon\mathfrak{h}}{3}}{\mathfrak{H}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 1{,}17 \cdot c}{2g} \cdot C \cdot (M - m)$$

und

$$497.)\quad c = \left(1{,}171 \cdot C - 0{,}855 \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H} + \frac{\varepsilon\mathfrak{h}}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2g \cdot Q^*}{M - m}\right) \cdot \left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H} + \frac{\varepsilon\mathfrak{h}}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

§. 559. Man soll die Schaufelflächen $= \frac{4}{3} \cdot \frac{M - m}{c}$ machen.

§. 560. Sieben Hauptregeln zur Anlage unterschlächtiger Wasserräder.

(498.) bis (504.) *Fig.* 431 und 432.

§. 561. Versuche von Herrn *Christian*. Sie bestätigen die Brauchbarkeit der bisherigen Bestimmungen. *Fig.* 433.

§. 562. Eine sehr verallgemeinerte Bestimmung giebt hier

$$505.)\quad P = \frac{2w \cdot p + \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{p}}{2w + \mathfrak{w}}$$

welche nicht nur die Wirkung des Wassers im Gerinne sondern auch im offenen Strome in sich schliefst.

w die Gröfse der Stofsfläche.

$\mathfrak{w}$ der übrige Theil vom ganzen Wasserquerschnitt.

$p = \frac{r}{R} \cdot Q^* \cdot \frac{w}{w + \mathfrak{w}}$ wo der Werth von Q^* aus No. 492 und No. 496 genommen wird.

$$\mathfrak{p} = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2+5}\right) \cdot \frac{(C-c)\,.\,C}{4g} \cdot w$$

P die Wirkung oder der Druck im Stoſspunkte.

In der Ausübung erfordert die Sicherheit, anzunehmen, daſs das Resultat der Rechnung um $\frac{1}{8}$ des Ganzen von der Wahrheit abweichen könne.

§. 563. Unrichtige Ansichten anderer Schriftsteller, besonders des Herrn *Christian*.

§. 564. Eine Bemerkung wegen unterlassener Einschaltung der Versuche von *Christian* und von *Smeaton*.

§. 565. In groſsen offenen Strömen verschwindet w und die Wirkung p, und es wird schlechthin $P = \mathfrak{p}$, und für das Maximum des Effekts

$$506.) \quad P = \left(1 + \frac{3{,}8}{(C-1)^2+5}\right) \cdot \frac{C^2}{4g} \cdot \tfrac{1}{2} w$$

Dabei $c = \frac{1}{2} C$.

Allgemeiner d. h. für jedes Verhältniſs der Gröſse w und $\mathfrak{w}$ erhält man für das Maximum des Effekts

$$507.) \quad c = \frac{\alpha\beta + \delta}{2.(\alpha+\delta)} \cdot C$$

α, β, δ sind allemal gegebene Gröſsen, oder solche, die sich aus den gegebenen leicht ableiten lassen. S. den Text.

§. 566, Anwendung der bisherigen Lehren auf den Fall, wann in *einem* Gerinne mehrere Räder hinter einander angebracht werden sollen, wie *Fig.* 434.

508.) Für das obere Rad wird $\mathfrak{h} = o$, $\mathfrak{H} =$ Höhe lm

» » untere » » $\mathfrak{h} =$ Höhe no; $\mathfrak{H} = \frac{c^2}{4g}$

$$509.) \quad \mathfrak{H} = k \cdot \left(\mathfrak{h} + \frac{c^2}{4g}\right); \quad \mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{k} - \frac{c^2}{4g}$$

510.) Für das obere Rad $C = 2.\sqrt{g} \cdot \dfrac{0{,}66 \,.\, \mathfrak{H}}{1 + 0{,}02 \,.\, \lambda}$

» » untere » $V = 2.\sqrt{g} \cdot \dfrac{0{,}66 \,.\, \mathfrak{h} + \frac{c^2}{4g}}{1 + 0{,}02 \,.\, \lambda}$

$$511.) \quad \mathfrak{h} = \frac{H - \frac{kc^2}{4g}}{1+k}; \quad 512.) \quad \mathfrak{H} = \frac{k}{1+k} \cdot \left(H - \frac{c^2}{4g}\right)$$

$$513.) \quad \mathfrak{H} = \frac{k}{1+k} \cdot \left(H - \frac{0{,}165 \,.\, \mathfrak{H}}{1+0{,}02\,.\,\lambda}\right); \quad 514.) \quad \mathfrak{H} = \frac{H}{\frac{1+k}{k} + \frac{0{,}165}{1+0{,}02\,.\,\lambda}}$$

Die Bedeutung der Buchstaben s. im Text.

§. 567. Dergleichen hinter einander liegende Räder, wovon das eine so viel möglich in beständigem Gange erhalten werden müſste, das andere aber nur periodisch gebraucht werden dürfte.

Nunmehr von eigentlichen horizontalen oder lothrechten Stossrädern.

§. 568. Wie ein Wasserstrahl, dessen centrische Linie mit der Axe des Rades in einerlei lothrechten Ebene liegt, dieses Rad in Umlaufsbewegung setzen kann. *Fig.* 435.

§. 569. Eine durch die Mittelpunkte aller Schaufeln laufende Kreislinie bildet die Ebene des Rades, deren lothrechter Halbmesser hier *c e* ist. *Fig.* 436. Die *de* denke man sich als horizontal und auf die Radebene senkrecht; so gedacht sey die Richtung des Strahls, der gegen die schief gestellte Schaufel, deren horizontale Stoſslinie durch *op* angedeutet ist, hervorspringt, wie durch *Fig.* 435 noch mehr erläutert wird; ist nun *qen* in *e* eine Tangente an der Radebene, so wird die Schaufel durch einen hinlänglich starken Strahl seitwärts nach *en* auszuweichen genöthigt, was dann mit der Umdrehung des Rades verbunden ist. Hier erhält man nun

515.) P oder hier die Wirkung nech $en = \frac{C - c}{2g} \cdot M \cdot Sin.\alpha \cdot Cos.\alpha$

c die Geschwindigkeit, mit welcher der Strahlfaden de vorwärts von e nach p hin fortgleitet, oder, was dasselbe ist, mit welcher die Schaufel den anstossenden Wassertheilchen in der Richtung ihrer Bewegung augweicht.

C die Geschwindigkeit des Wassers nach de (*Fig.* 436).

M die in 1 Sekunde gegen die Schaufel strömende Wassermenge.

α der spitze Winkel deo, unter welchem der horizontale Strahl de die Schaufelfläche trifft.

Auch 516.) $P = \frac{C - v \cdot Cot.\alpha}{2g} \cdot M \cdot Sin.\alpha \cdot Cos.\alpha$

v die Umlaufsgeschwindigkeit in e.

517.) $Q = \frac{R}{r} \cdot \frac{C - v \cdot Cot.\alpha}{2g} \cdot M \cdot Sin.\alpha \cdot Cos.\alpha - q$

Q die Nutzlast in der Entfernung r von der Axe.

q die Nebenlast auf die Entfernung r gebracht.

R der Halbmesser $c\,e$.

§. 570. Der mechanische Effekt dieses Wasserrades (der Totaleffekt) ist

518.) $P \cdot v = \frac{M \cdot Sin.\alpha \cdot Cos.\alpha}{2g} \cdot v \cdot (C - v \cdot Cot.\alpha)$

und 519.) $\text{Nutzeffekt} = \left(A \cdot C - \frac{r}{R} \cdot q\right) \cdot v - A \cdot Cot.\alpha \cdot v^2$

Dabei $A = \frac{M \cdot Sin.\alpha \cdot Cos.\alpha}{2g}$

Für den *gröſsten* Nutzeffekt ist $v = \frac{C - \frac{r}{A \cdot R} \cdot q}{2 \cdot Cot.\alpha}$, und für einen bestimmten Werth von α.

520.) $\text{Der gröſste Nutzeffekt} = \frac{M}{2g} \cdot \left(\frac{C \cdot Sin.\alpha}{2} - \frac{r \cdot g \cdot q}{R \cdot M \cdot Cos.\alpha}\right)^2$

Um aber zugleich den vortheiltesten Werth von α zu wählen, dient

521.) $tang.\alpha^3 + tang.\alpha = \frac{C \cdot R \cdot M}{2rgq}$

Durch einige Proberechnungen findet man $tang.\alpha$ also auch α, und hieraus die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit

522.) $v = \frac{1}{2} C \cdot tang.\alpha - \frac{rgq}{R \cdot M \cdot Cos.\alpha^2}$

Auch erhält man

523.) $v = C \cdot tang.\alpha - \frac{r \cdot 2g \cdot (Q + q)}{R \cdot M \cdot Cos.\alpha^2}$

524.) $Q + q$ oder $Q^* = \frac{(C \cdot tang. \alpha - v) \cdot R \cdot M \cdot Cos. \alpha^2}{2gr}$

Die Buchstaben wie im vorigen §.

§. 571. Der Nutzeffekt dieses Stofsrades beträgt nie über $\frac{1}{2}$ vom absolut gröfsten Effekt.

§. 572. Einrichtung dieses Rades. *Fig.* 437ᵃ — 437ᶜ. Hierzu noch zwei Formeln

No. (525.) (526.)

§. 573. Vergleichung des Stofsrades mit dem Rade im Gerinne.

§. 573. *Horizontales* Wasserrad.

527.) Gröfster Totaleffekt $= \frac{1}{2} H \cdot M \cdot Sin. \alpha^2$ gilt auch vom lothrechten Stofsrad.

Für $\alpha = 90^0$ wird hiernach

528.) Gröfter Effekt $= \frac{1}{2} HM$; auch $v = \infty$

Hierzu gehörige Erörterungen; auch noch einige Bemerkungen zur vortheilhafteren Einrichtung. *Fig.* 438, 439.

§. 575. Urtheile der beiden Herren *Euler* und Herrn *Karsten's* in Bezug auf die verschiedenen Arten von Stofs- und andern unterschlächtigen Rädern.

§. 576. Ein lothrecht stehendes Stofsrad, bei welchem der Strahl senkrecht auf die Schaufelfläche geleitet wird, wie im Grundrisse *Fig.* 440.

529.) Der mechanische Effekt $P \cdot v = \frac{C - v \cdot Sin. \mu}{2g} \cdot M \cdot v \cdot Sin. \mu$

530.) Nutzeffekt $\left(P - \frac{r}{R} \cdot q\right) \cdot v = \left(\frac{C - v \cdot Sin. \mu}{2g} \cdot M \cdot Sin. \mu - \frac{r}{R} \cdot q\right) \cdot v$

Für das Maximum des Nutzeffekts bei einem bestimmten Werthe von v wird

531.) $Sin. \mu = \frac{C}{2v}$ oder auch $v = \frac{C}{2 \cdot Sin. \mu}$

Für $v = C$ wird der Nutzeffekt allemal

532.) $= \frac{C^2}{4g} \cdot \frac{1}{2} M - \frac{r}{R} \cdot q \cdot v = \frac{1}{2} HM - \frac{r}{R} \cdot q \cdot v$

Für ebendiesen Fall ist der gröfste Werth vom Maximum des Nutzeffekts

533.) $= \frac{1}{2} \cdot \left(H \cdot M - \frac{r}{R} \cdot q \cdot C\right)$

Diese Bestimmung leidet aber in der Ausübung keine Anwendung. Für diese erhält man den gröfstmöglichen Nutzeffekt eines solchen Stofsrades

534.) $= \frac{1}{2} HM - 0{,}707 \cdot \frac{r}{R} \cdot q \cdot C = \frac{1}{2} HM - 1{,}414 \cdot \frac{r}{R} \cdot q \cdot \sqrt{gH}$

μ der spitze Winkel oef, wo ef mit der auf die Radebene senkrechten de einen rechten Winkel macht. *Fig.* 440.

Die übrigen Buchstaben wie §. 569 und 570.

§. 577. Man erhält dasselbe bei solcher Leitung des Strahls auf die Schaufeln eines horizontalen Wasserrades aus Bodenöffnungen eines möglichst nahe darüber gebauten Wasserbehältnisses. Noch zur Zeit bleibe man bei unterschlächtigen Wasserrädern, wie *Fig.* 430, was auch Hr. *Leonhard Euler* verlangt. Doch verdient das horizontale Strofsrad sehr unsere Aufmerksamkeit, wenn die Centrifugalkraft dabei mit benutzt wird. Es fehlen uns hierüber zur völligen Entscheidung noch Versuche im Grofsen.

§. 578. Allgemeine Anmerkung über die Forderung, auf die es bei einem vollkommenen Wasserrade eigentlich ankommt.

XXXIII. Kapitel.

FORTSETZUNG MIT BESONDERER ANWENDUNG AUF DAS SEGNERSCHE WASSERRAD (RUECKWIRKUNGSRAD).

§. 579. Die Wirkung des horizontalen Stofsrades wird bedeutend vergröfsert, wenn die Einrichtnng so gemacht wird, dafs die Wassertromme zugleich mit dem Rade um dieselbe Axe herumlaufen mufs. Blofse Vorbereitung zum nachfolgenden Vortrage. *Fig.* 441, 442. Hier die Formeln

(535.) bis (540.)

§. 580. Worin die Rückwürkung des Wassers besteht. *Fig.* 443.

§. 581. Verschiedenheit der Bestimmung dieser Rückwirkung.

§. 582. Soll aus der Bodenöffnung $m\,o$ das Wasser blos vermöge der Schwere mit der zur Höhe h.

§. 583. gehörigen Geschwindigkeit $(2 . \sqrt{gh})$ ausfliefsen, so mufs das Gefäfs auf eine gewisse Höhe $\mathfrak{H}$ angefüllt erhalten werden, so dafs

$$543.)\ \text{und}\ 544.)\quad \mathfrak{H} = \frac{W^2 - w^2}{W^2} . h, \text{ also auch } h = \frac{W^2}{W^2 - w^2} . \mathfrak{H}$$

werde. *Fig.* 444.
W die Oberfläche des Wassers in $\alpha\beta$.
w die Gröfse der Oeffnung in $m\,o$.

§. 584. Um die Geschwindigkeit $\frac{w}{W} . C$ (in $\alpha\beta$ *Fig.* 444) in die C (in der Oeffnung $m\,o$) zu verwandeln, mufs von $\alpha\beta$ bis in mo nach es eine bewegende Kraft $= 2w . \left(1 - \frac{w}{W}\right) . h$ verwendet werden. Hier ist die Zusammenziehung des Strahls schon mit in Rechnung gebracht worden, daher in Bezug auf diese $0{,}62 . \alpha$ oder $0{,}81 . \alpha$ oder allgemein $\gamma . \alpha$ statt w geschrieben werden mufs, wenn α die Gröfse der Oeffnung bezeichnet und w den Querschnitt des Strahls andeutet.

§. 585. Die Rückwirkung von dem in $c\,d$ ausfliefsenden Wasser (*Fig.* 443) kann in Bezug auf das ganze Gefäfs nur $= h . w$ gesetzt werden.

§. 586, Das *Segnersche* Wasserrad in höchst einfacher Form. *Fig.* 445.

§. 587. Hierher gehörige vorläufige Bestimmung

(545.)

Daraus werden abgeleitet

$$546.)\quad H - \mathfrak{H} + \frac{l^2 - 2r^2}{l^2} . h; \qquad h = \frac{l^2}{l^2 - 2r^2} . (H - \mathfrak{H}).$$

$$547.)\quad P = \frac{C - \frac{l^2 - r^2}{l^2} . c}{2g} . M = \frac{\sqrt{H - \frac{l^2 - r^2}{l^2} . \sqrt{h}}}{\sqrt{g}} . M$$

$\frac{l^2 - r^2}{l^2}$ sey zur Abkürzung $= n$

so wird $$548.)\quad \frac{l^2 - 2r^2}{l^2} = 2n - 1; \qquad 549.)\quad H = \mathfrak{H} + (2n - 1) . h$$

Bezeiahnet E den Totaleffekt, so wird

$$550.)\quad \begin{cases} E = 2 \cdot (\sqrt{Hh} - nh) \cdot M \\ \text{oder auch} \\ = 2 \cdot [\sqrt{(\mathfrak{H}h + (2n-1) \cdot h^2)} - nh] \cdot M \end{cases}$$

Für E^{max} (das Maximum von E) wird

$$551.)\quad h = \frac{l^2}{2r^2} \cdot \mathfrak{H}; \qquad \mathfrak{H} = \frac{2r^2}{l^2} \cdot h$$

$$552.)\quad H = h = \frac{l^2}{2r^2} \cdot \mathfrak{H}$$

$$553.)\quad E^{max} = 2 \cdot (1-n) \cdot H \cdot M = \frac{2r^2}{l^2} \cdot H \cdot M$$

$$\text{auch} = \frac{2r^2}{l^2} \cdot h \cdot M = \mathfrak{H} \cdot M$$

C die horizontale Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus der Oeffnung α hervorspringt. *Fig.* 445.

H die zugehörige Höhe $\left(\frac{C^2}{4g}\right)$.

α die Gröfse der Oeffnung.

w der Querschnitt des Strahls $(\gamma \cdot \alpha)$.

r der Halbmesser der Tromme $(m\,b)$ oder die Entfernung des Mittelpunkts der *Einflufsöffnung* b von der Umdrehungsaxe.

l der Halbmesser von der Trommenaxe bis in die Mitte der *Ausflusöffnung* α $(m\,\alpha)$.

c die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt der Oeffnung α herumlauft.

h die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe $\left(\frac{c^2}{4g}\right)$

W die Oberfläche des Wassers im Behältnisse oder der Tromme $(\delta\,\varepsilon)$.

$\mathfrak{H}$ die wirkliche Höhe dieser Oberfläche über dem Mittelpunkte von α.

P die vom Ausströmen entstehende Rückwirkung in der Entfernung $m\alpha = l$.

E der Totaleffekt.

§. 588. Nothwendige Bemerkungen für die Ausübung in Bezug auf wirkliche Anlagen. *Fig.* 446 — 449. Hier nur Zwischenformeln

(554.) bis (557.)

§. 589. Die Höhe von der Oberfläche des Wassers in der Tromme bis zur Oberfläche im Wasserkasten kommt für die Wirkung nicht in Rechnung.

§. 590. *Eulers* Einrichtung. Sie kann nicht angenommen werden. *Fig.* 450.

§. 590ª. Zweifel gegen No. 547. Sie werden hier gehoben. *Fig.* 451.

§. 590ᵇ. *Christian's* Darstellung des Rückwirkungsrades und des hydraulischen Schwungrohres. *Fig.* 451ª, 452.

Dahin gehörige Formeln

(558.) (559.)

§. 591. Hier die Formeln

$$560.)\quad m = \frac{19{,}1 \cdot \sqrt{g \cdot \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}}}{r}$$

$$561.)\quad P = \left(\frac{r}{l}\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{2g}}\right) \cdot M; \qquad 562.)\quad Q = \frac{r \cdot M}{\delta} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{2g}}$$

$$563.)\quad Q = \frac{\mathfrak{K} \cdot r \cdot M}{\mathfrak{T} \cdot \delta} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{2g}}; \qquad 564.)\quad \mu = \frac{19 \cdot \mathfrak{T} \cdot \sqrt{g \cdot \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}}}{\mathfrak{K} \cdot r}$$

m die Anzahl Umläufe der Tromme in einer Minute.
P (No. 561.) die Gröſse der Rückwirkung in der Entfernung l von der Umlaufsaxe,
Q (No. 562) der gesammte Widerstand auf die Entfernung δ von derselben Axe gebracht, für den *gröſsten* Totaleffekt.
Alle übrige Buchstaben (No. 560 — 562) wie §. 587.

No. 563 und 564 beziehen sich auf die Voraussetzung eines einfachen Vorgeleges, wobei an der Trommenwelle ein Trilling angebracht wird, der in ein Stirnrad eingreift, an dessen Welle die Last angebracht ist. Für diese Einrichtung ist
$\mathfrak{T}$ die Anzahl der Triebstöcke.
$\mathfrak{K}$ die Anzahl der Kämme.
Q der gesammte Widerstand auf die Entfernung δ von der Stirnradaxe gebracht, für den *gröſsten* Effekt.
μ die Anzahl Umläufe des Lastpunktes in 1 Minute.

§. 592. Der wichtigste Gebrauch dieses Rades zeigt sich bei Mühl-, Stampf- und Hammerwerken. Dabei nimmt man $l = r$, und erhält für den gröſsten Effekt

565.) $h\,(= H) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{H}$. Für andere Fälle, wo nicht $l = r$ ist, s. unten §. 596.

§. 593. Wenn ein Rückwirkungsrad auf den gröſsten Effekt für den Widerstand Q eingerichtet ist, dann aber statt des Widerstandes Q ein anderer $\mathfrak{Q} < Q$ angebracht wird, so erhält man

$$566.)\quad h' = \frac{l^2}{l^2 - r^2} \cdot \left(\sqrt{H} - \frac{\mathfrak{T} \cdot \delta \cdot \mathfrak{Q}}{\mathfrak{K} \cdot r \cdot M} \cdot \sqrt{g}\right)^2$$

Auch

$$567.)\quad h' = \frac{l^2}{l^2 - r^2} \cdot \left(\sqrt{H} - \frac{\mathfrak{Q}}{Q} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}}\right)^2$$

und

$$568.)\quad \mathfrak{H}' = H - \frac{l^2 - 2r^2}{l^2} \cdot h$$

Für $r = l$ wird

$$569.)\quad \mathfrak{H} - h' = \frac{\mathfrak{Q}}{Q} \cdot (\mathfrak{H} - h); \qquad 570.)\quad h' = \mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{Q}}{Q} \cdot (\mathfrak{H} - h)$$

$$571.)\quad h' = \left(2 - \frac{\mathfrak{Q}}{Q}\right) \cdot h; \qquad 572.)\quad M' = 2w \cdot \sqrt{\left(\mathfrak{H} - \left(2 - \frac{\mathfrak{Q}}{Q}\right) \cdot h\right)}$$

$$573.)\quad E' = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}\left(\sqrt{\left(2 - \frac{\mathfrak{Q}}{Q}\right)}\right) \cdot E.$$

Dabei muſs dann ein Theil der beiflieſsenden Wassermenge, nämlich $M - M'$ unbenutzt überlaufen.

Die Buchstaben mit Accenten bedeuten jetzt, bei dem Widerstande $\mathfrak{Q}$, dasselbe was sie vorhin bei dem Widerstande Q ohne Accente bedeuteten.

Am Ende des §. ist eine berechnete Tafel für berechnete Werthe von E beigefügt.

§. 594. Die Ausfluſsöffnung α läſst sich hier abändern, so daſs aus dem Querschnitte w ein anderer w' wird, aus der Höhe H die H', und aus der h die h', wenn statt des Widerstandes Q, für den die Maschine bei der Oeffnung α und der Wassermenge M eingerichtet ist, die kleinere $\mathfrak{Q}$ angebracht und zugleich bewirkt werden soll, daſs jetzt die Tromme auf die Höhe $\mathfrak{H}$ angefüllt bleibe ohne über zu laufen. Jetzt erhält man

$$574.)\quad h' = \left(\frac{nk + \sqrt{[(n^2 + m) \cdot (\mathfrak{H} - k^2 + n^2 k^2)]}}{n^2 + m}\right)^2$$

Für $r = l$ oder lothrechte Wände der Tromme wird nun (*Fig.* 449, 450.)

$$575.)\quad h' = \mathfrak{H} - \left(\frac{\mathfrak{T} \cdot \delta \cdot \mathfrak{Q}}{\mathfrak{K} \cdot r \cdot M}\right)^2 \cdot g$$

$$576.)\quad H' = \left(\frac{\mathfrak{T} \cdot \delta \cdot \mathfrak{Q}}{\mathfrak{K} \cdot r \cdot M}\right)^2 \cdot g$$

Auch 577.) $h' = \left(1 - \frac{\mathfrak{Q}^2}{2Q^2}\right) \cdot \mathfrak{H} = \left(2 - \frac{\mathfrak{Q}^2}{Q^2}\right) \cdot h$

und 578.) $H' = \frac{\mathfrak{Q}^2}{Q^2} \cdot \frac{1}{2}\mathfrak{H}$

m steht statt $\frac{l^2 - 2r^2}{l^2}$; n statt $\frac{l^2 - r^2}{l^2}$; k statt $\frac{\mathfrak{T}.\delta.\mathfrak{Q}}{\mathfrak{K}.r.M} \cdot \sqrt{g}$

Ferner 579.) $w' = \frac{Q}{\mathfrak{Q}} \cdot w$; 580.) $E' = \frac{\mathfrak{Q}}{Q} \cdot \left(\sqrt{\left(2 - \frac{\mathfrak{Q}^2}{Q^2}\right)}\right) \cdot E$

Die accentuirten Buchstaben sind in Bezug auf $\mathfrak{Q}$, was die nicht accentuirten in Bezug auf Q sind. Am Ende des §. eine berechnete Tafel.

§. 595. Bestimmungen für ein Rückwirkungsrad, das für die vortheilhafteste Last Q eingerichtet ist, bei dem man aber nachher eine Last $\mathfrak{Q} > Q$ anbringt. Jetzt wird

581.) $h' = \left(2 - \frac{\mathfrak{Q}^2}{Q^2}\right) \cdot h$; 582.) $w' = \frac{Q}{\mathfrak{Q}} \cdot w$

582ᵃ.) $E' = \frac{\mathfrak{Q}}{Q} \cdot \left(\sqrt{\left(2 - \frac{\mathfrak{Q}^2}{Q^2}\right)}\right) \cdot E$

Dabei mufs, wenn die Maschine nicht zum Stillstande kommen soll,

582ᵇ.) $\mathfrak{Q} < 1{,}41 \,.\, Q$

seyn. Am Ende des §. eine berechnete Tafel.

§. 596. Erinnerung wegen solcher Fälle, wo r nicht $= l$ ist.

§. 597 — 602. Rekapitulation der Hauptsätze von §. 579 — 596.

XXXIV. Kapitel.

UEBER WASSERSAEULEN - MASCHINEN.

§. 603. Unter allen Maschinen, die das Wasser als Bewegungskraft zu benutzen dienen, ist bei sehr bedeutendem Gefälle die (von *Höll* erfundene) *Wassersäulenmaschine* die vortheilhafteste. *Fig.* 452ᵃ.

§. 604. Beschreibung der Schemnitzer Maschine. *Fig.* 452ᵇ — 455.

§. 605. Einzelne Abmessungen und Effekt der Schemnitzer Maschine.

§. 606. Einige Mängel der ersten Erfindung.

§. 607. Ihre Verbesserung durch Vorrichtung eines Kessels. *Fig.* 456.

§. 608. Beschreibung einer Wassersäulenmaschine bei Freiberg. *Fig.* 457 — 457ᶜ.

§. 609. Doppelt wirkende Wassersäulenmaschinen mittelst einer *Pippe* (einem grofsen Hahnen). *Fig.* 448 — 461.

§. 610. Angabe einer Kolbensteuerung von *Baldauf;* eine vollkommnere vom *Ritter v. Reichenbach.*

§. 611 — 613. Ausführliche Beschreibung der v. Reichenbachschen Maschinenanlage. *Fig.* 462 - 466ᵈ.

Dieser grofse Mechaniker hat nunmehr auch das höchst wichtige Problem aufgelöst: Wassersäulenmaschinen mit *Umlaufsbewegung* (ohne Rückkehrbewegung eines Treibkolbens) zu bauen. Er hat dem Verfasser diese Versicherung erst im Okt. 1825 mündlich mitgetheilt.

§. 614. Beschreibung einer Wassersäulenmaschine zu *Bleiberg* in *Kärnthen.* *Fig.* 467ᵃ — 467ᶠ.

§. 615. Umstände, von welchen der Effekt der Wassersäulenmaschine abhängt.
§. 616. Vorläufige Erinnerung in Bezug auf hierher gehörige Berechnungen.
§. 617. Hier die Formeln

583.) $\mathfrak{H} = H - \frac{\lambda . h . W}{t^2 g w}$ oder auch $Q = H . w - \frac{\lambda h}{t^2 g} . W$

584.) $\begin{cases} \mathfrak{H} = H - \frac{\lambda h W}{t^2 g w} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{c^2}{4g}, \text{ oder auch} \\ Q = H . w - \frac{\lambda h W}{t^2 g} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{c^2}{4g} . w \end{cases}$

585.) $\begin{cases} \mathfrak{H} = H - \frac{\lambda h W}{t^2 g w} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{M'^2}{4 g w^2} \\ Q = H w - \frac{\lambda h W}{t^2 g} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{M'^2}{4 g w} \end{cases}$

586.) $\begin{cases} \mathfrak{h} = H - \frac{\lambda . h . \mathfrak{W}}{\tau^2 . g . w} \\ \mathfrak{Q} = \mathfrak{h} . w = H . w - \frac{\lambda^2 h \mathfrak{W}}{\tau^2 g} \end{cases}$

587.) $\begin{cases} \mathfrak{h} - H - \frac{\lambda h \mathfrak{W}}{\tau^2 g w} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{\mathfrak{M}^2}{4 g w^2} \\ \mathfrak{Q} = H w - \frac{\lambda h \mathfrak{W}}{\tau^2 g} - \frac{\lambda - 46 . d}{60 . d} . \frac{\mathfrak{M}^2}{4 g w} \end{cases}$

588.) $S = t . M' + \tau . \mathfrak{M}$

589.) $M = \frac{t . M' + \tau . \mathfrak{M}}{t + \tau}$

W die Weite des Cylinders; D sein Durchmesser.
w die Weite der Fallröhre; d ihr Durchmesser.
$\mathfrak{W}$ die Weite des Cylinders *nach Abzug der Dicke der Kolbenstange*, weil beim Niedergange des Kolbens bei der doppelt wirkenden Maschine dieser Raum für das Wasser verlohren geht.
C die Geschwindigkeit des Kolbens (Treibkolbens).
h die Höhe des Kolbenhubs im Cylinder.
t die Anzahl Sekunden, in welchen der Kolben beim Hube den Raum h durchläuft.
τ die Zeit des *Niedergangs*.
c die Geschwindigkeit des Kolbens am Ende der Zeit t.
λ die Länge der Fallröhre.
H ihre lothrechte Höhe über dem mittleren Kolbenstande.
M' die bei dem *Hube* des Treibkolbens in 1 Sekunde in die Fallröhre einströmende Wassermenge.
$\mathfrak{M}$ die beim *Niedergange* des Kolbens in die Fallröhre in 1 Sekunde einströmende Wassermenge.
Q der Widerstand, welcher der Wassersäule in der Fallröhre so entgegenwirkt, dafs dieser Wassersäule noch eine bewegende Kraft übrig bleibt, die den Kolben in der Zeit t durch den Raum h zu betreiben vermag.
$\mathfrak{H}$ die Höhe einer Wassersäule, welche $\mathfrak{H} . w = Q$ macht.
$\mathfrak{Q}$ dasselbe beim Niedergange des Kolbens, was Q beim Hube ist.
$\mathfrak{h}$ die Höhe einer Wassersäule, welche $\mathfrak{h} . w = \mathfrak{Q}$ giebt.
S die in der Zeit eines Kolbenspiels $(t + \tau)$ erforderliche Wassermenge.
M die Wassermenge, welche im Durchschnitte (im Mittel) genommen in jeder Sekunde nöthig ist, um in der Zeit $t + \tau$ ein Kolbenspiel zu bewirken.

Die Berechnungen gründen sich durchaus auf die Voraussetzung, daſs die Bewegung des Wassers in der Fallröhre nach jedem Hube so wie nach jedem Niedergange wieder zur Ruhe komme.

§. 618. Hat der Treibkolben im Hube die Last Q, im Niedergange die $\mathfrak{Q}$ zu betreiben, so hat man für die doppelt wirkende Maschine

$$590.)\quad S = h \,.\, (W + \mathfrak{W})$$

$$591.)\quad M = \frac{h \,.\, (W + \mathfrak{W})}{t + \tau};\quad M' = \frac{hW}{t};\quad \mathfrak{M} = \frac{h\mathfrak{W}}{\tau}$$

$$592.)\quad \begin{cases} \mathfrak{H} = H - \dfrac{\lambda h W}{t^2 g w} - \dfrac{\lambda - 46 . d}{60 . d} \cdot \dfrac{h^2 W^2}{4 g w^2 t^2} \cdot \left(= \dfrac{Q}{w}\right). \\ \mathfrak{h} = H - \dfrac{\lambda h \mathfrak{W}}{\tau^2 g w} - \dfrac{\lambda - 46 . d}{60 . d} \cdot \dfrac{h^2 \mathfrak{W}^2}{4 g w^2 \tau^2} \cdot \left(= \dfrac{\mathfrak{Q}}{w}\right). \end{cases}$$

$$593.)\quad t = \sqrt{\frac{\lambda h W + \dfrac{(\lambda - 46 \,.\, d) \,.\, h^2 W^2}{4 w}}{(H - \mathfrak{H}) \,.\, g w}} \text{ für } Q.$$

$$594.)\quad \tau = \sqrt{\frac{\lambda h \mathfrak{W} - \dfrac{(\lambda - 46 \,.\, d) \,.\, h^2 W^2}{4 w}}{(H - \mathfrak{h}) \,.\, g w}} \text{ für } \mathfrak{Q}.$$

Die Buchstaben wie vorher.

§. 619. Der Effekt einer Wassersäulenmaschine in Bezug auf das, was eine bestimmte Wassermenge $\mathfrak{M}$ bei bestimmten Werthen von Q und $\mathfrak{Q}$ leistet, steht keineswegs im Verhältnisse der Geschwindigkeit des Treibkolbens, weil mit vergröſserter Geschwindigkeit des Kolbens auch die Wasserkonsumtion vergröſsert wird.

§. 620. Der Effekt kann aber durch Vergröſserung des Zuflusses vergröſsert werden.

§. 621. Bei ungeändertem Werthe von $\mathfrak{M}$ wird durch die Wirkung eines perennirenden Abflusses der Effekt nur dadurch vergröſsert, daſs man die Nutzlast vergröſsert, die Geschwindkeit des Kolbens aber, bei welcher die Fallröhre ganz angefüllt bleibt, ungeändert läſst. Der perennirende Abfluſs erfordert aber einen Windkessel. Die erforderlichen Werthe von W und $\mathfrak{W}$ erhält man durch die Formeln

No. (595.) und (596.)

XXXV. Kapitel.

DER HERONSBRUNNEN UND HOELLS LUFTMASCHINE.

§. 622. Der *Heronsbrunnen.* *Fig.* 468.

§. 623. *Höll's* Luftmaschine. *Fig.* 469.

§. 624. Abmessungen und Effekt der Luftmaschine zu *Schemnitz.*

§. 625. Ihr Nutzeffekt ist nach der Angabe bedeutend, aber sie hat keine Steuerung und ist blos auf

Wasserförderung beschränkt. Sie ist nach Erfindung der Wassersäulenmaschine ganz ausser Gebrauch gekommen.

§. 626. Hierher gehörige Bestimmungen.

No. (597.) und (498.)

§. 627. Anwendung auf bestimmte Abmessungen.

§. 628. Noch einige hierher gehörige Bestimmungen.

No. (599.) und (600.)

§. 629. Weiter hierher gehörige Bestimmungen.

No. (601.) bis (604.)

§. 630. Weitere Ausführung der Rechnung §. 627.

§. 631. Vergleichung der Berechnung mit der Erfahrung.

Ende des ersten Bandes des Repertorium.

ANMERKUNG.

Zur Ergänzung der Beschreibung von den Krahnen im XX. Kapitel §. 286[a] bis 286[g] wird noch einiges in dem zu mehreren Ergänzungen bestimmten Anhange am Ende des zweiten Bandes nachgetragen werden.

REPERTORIUM

FUER DIE KUPFER.

Nummern der			Nummern der			Nummern der			Nummern der		
Fig.	Tab.	§§	Fig.	Tab	§§	Fig.	Tab.	§§	Fig.	Tab.	§§.
1	I	14*	51	II	108	88	V	223	110^{x}	XXIV	260^{q}
2	–	21	52	–	114	89	–	225	110.A		260^{l}
3	–	23	53	–	115	90	–	—	bis		bis
4	–	24	54	–	119	91	–	226	110.O	VIII	260^{o}
5	–	25	54^{a}	–	——	92	–	—	111	VI	264
6–12	–	26	54^{b}	–	——	93	–	—	112	–	265
13	–	28	55	–	121	94	–	227	112^{a}		265^{α}
14	–	29	56	–	——	95	–	229	bis		bis
15	–	30	57	III	122	96	–	230	112^{n}	L	
16	–	32	58	–	——	97	–	—	112^{o}	LI	265^{g}
17	–	—	59	–	——	98	–	—	113	–	266
18	–	34	60	–	124	99	–	231	114	–	267
19	–	—	61	–	126	100	III	232	115	IX	268
20	–	36	62	–	127	101	V	234	116	–	269
21	–	37	63	–	130	102	VI	235	117	–	—
22	–	38	64	–	132	103	–	—	118^{a}	–	—
23	–	39	65	–	134	104	–	—	118^{b}	–	—
24	–	40	66	–	140	105	–	238	118^{c}	--	—
25	–	41	67	–	163	106	–	239	119	–	271
26	–	42	68	–	——	107	–	—	120	VI	274
27	–	43	69	–	177	108	–	241	121	–	—
28	–	44	69*	XLIX	178*	109	–	244	122	–	273
29	–	45	70	III	179	110^{a}	–	246	123	–	—
30	–	46	71	XXIV	184	110^{α}	XXV	247^{b}	124	–	—
31	II	—	71*	IV	——	110^{b}	VI	247^{f}	125	IX	275
32	–	48	71**	–	——	110^{c}	–	$247^{f'}$	126	–	—
33	–	49	72	–	185	110^{d}	–		127	–	276
34	–	49*	72*	–	——	110^{e}	–	259	128	–	—
35	–	—	72**	–	——	110^{f}	–	—	129	–	—
36	–	50	72***	–	185*	110^{g}	–	260^{a}	130	–	277
37	–	51	73	III	186	110^{h}	–	261	131	X	278
38^{a} bis			74	–	187	110^{i}	–	—	132	–	—
38^{d}	–	53	75	–	192	110^{k}	–	—	133	–	279
39	–	57	76	–	196	110^{l}	–	—	134	–	280
40	–	59	77	–	199	110^{m}	–	—	135	–	—
41	–	60	78	–	200	110^{n}	VII	260^{d}	136	–	285
42	–	61	79	–	200*	110^{o}	–	260^{h}	136^{a}	XLVIII	286^{a}
43	–	64	80	–	203	110^{p}	–	—	bis	–	
44	–	98	81	V	207	110^{q}	–	260^{i}	136^{i}	–	bis
45	–	99	82	–	212	110^{r}	–	260^{k}	136^{k}		
46	–	102	83	–	218	110^{s}	XXIII	260^{p}	bis		
47	–	—	84	–	219	110^{t}	–	—	136^{m}	XLIX	286^{f}
48	–	103	85	–	221	110^{u}	–	—	136^{n}	L	286^{g}
49	–	107	86	–	222	110^{v}	–	—	137	X	287
50	–	—	87	–	——	110^{w}	XXIV	260^{q}	138	–	—

Nummern der			Nummern der			Nummern den			Nummern der		
Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.
139	X	288	166	XI	323	203	XIII	341	bis		
140	–	289	167	XII	322	204^{a}	XIV	—	249^{o}	XVIII	—
141	–	291	168	–	—	204^{b}	–	—	249^{p}	–	355^{b}
142	–	—	169	–	325^{a}	204^{c}	–	—	249^{q}	–	—
143	–	—	170	–	325^{c}	204^{d}	–	—	249^{r}	–	—
144^{a}	–	293	171	–	—	204^{e}	–	—	249^{s}	–	—
144^{b}	–	—	172	–	—	204^{d}	–	—	249^{t}	–	—
145	–	299	173^{a}	–	—	204^{e}	–	—	249^{u}	–	—
146	–	301	173^{b}	–	—	205	XIII	—	249^{v}	–	355^{c}
147^{a}	–	301*	173^{c}	–	—	206	XIV	—	249^{w}	LI	355^{a}
147^{b}	–	—	173^{d}	–	—	206*	L	341*	250^{a}	XV	356
147^{c}	–	—	174	–	—	207	XIV	342	250^{b}	XIV	357
147^{d}	{ X	—	175	–	325^{d}	208	–	—	250^{c}	XV	—
	XI }		176	–	—	209	–	—	251^{a}	XIV	355^{c}
147^{e}	–	—	177	–	325^{e}	209^{a}			251^{b}	–	358*
147^{f}	–	—	178	–	—	bis			251^{c}	–	—
147^{h}	–	—	179	–	—	209^{L}	L	342*	251^{d}	{ XIV	—
147^{i}			180	XIII	326^{a}	210	XIV	343		XIX }	358**
bis			181	–	—	210*	LI	—	251^{e}	{ XIV	358**
147^{l}	L	301**	182	–	—	211	XIV	—		XIX }	358**
148^{a}	X	302	183	–	—	212			251^{f}	XIV	358
148^{b}	–	—	184	–	—	bis			252	XIX	359
149	XI	—	185^{a}	–	—	216	–	344	253	–	360
150	–	303	185^{b}	–	326^{b}	217	–	346	254^{a}	–	—
151	–	—	186	–	329	218	–	—	254^{b}	–	—
152^{a}	–	—	187	–	—	218*	L	—	254^{c}	XX	361
152^{b}	–	—	188	–	—	219^{a}			255^{a}	XIX	360
153	–	304	189	–	331*	bis			255^{b}	–	—
154	–	—	190	–	333*	219^{f}	XV	—	256	–	—
a, b, c,			191	–	—	220^{a}	–	347	257	–	363
			192	–	—	220^{b}	–	—	258	–	364
155	–	—	193	–	331*	220^{c}	–	—	259	XX	—
156	–	307	194	–	334	221			260	–	—
157	–	309	195	–	—	bis			261	–	—
158	–	310	196^{a}	–	335	228	XVI	351	262	–	365
159	–	313	196^{b}	–	—	229			263	–	366
160^{a}	–	—	197^{a}	–	337	bis			264	–	368
160^{b}	–	—	197^{b}	–	—	234	–	352	265	–	—
161^{a}	–	—	198^{a}	–	—	244	XV	353	266^{a}	–	371
161^{b}	–	—	198^{b}	–	—	245	–	354	266^{b}	XXI	—
162	–	314	198^{c}	–	—	246	–	—	267	XX	—
$163^{a\,b}$	–	320	198^{d}	–	—	247	–	—	268	–	373
163^{c}	–	—	199	–	338	248	–	—	268	–	376
163^{d}	–	—	200	–	—	248^{a}	–	354	270	–	—
163^{e}	XII	321	201	–	341	249^{a}			271	–	377
163^{f}	–	—	202^{a}	–	—	bis			272^{a}	–	—
164	XI	322	202^{b}	–	—	249^{k}	XVII	345^{a}	272^{b}	XXI	378
165	–	323	202^{c}	–	—	249^{l}			273	XX	—

Nummern der			Nummern der			Nummern der			Nummern der		
Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.
274^{a}	XXI	380	308	XXV	422	343	XXX	437	384	XXXIV	470
274^{b}	–	—	309	XXVI	423	344	–	—	385	XXXV	—
275	–	—	310	–	—	345	–	439	386	–	—
276	XX	383	311	–	—	346	–	—	387	–	483
277	XXI	384	312	–	—	347	XXXI	—	388	–	486
278	XX	—	313	–	—	348	–	—	389	–	—
279	XXI	389	314	–	—	349	–	—	390	–	—
280	–	390	315	–	—	350	–	442	391	–	—
281	–	—	316	–	—	351	–	444	392	–	—
282	–	—	317	–	—	252	–	—	293	–	—
283	–	391	318	–	—	353	–	—	394	–	—
284	–	393	319	–	—	354	–	446	395	–	—
285	–	—	320	XXV	—	355	–	—	396	–	—
286	XXII	379	321	XXVI	424	356	–	—	397	–	487
287	XXI	396	322	–	—	357	XXXII	447	398	–	488
288	–	—	323	–	425	358	–	450	399	–	489
289	–	404	324	–	426	359	–	—	400	–	—
290^{a}	–	406	325	XXVII	427	360	–	—	401^{a}	XXXVI	491
290^{b}	XXII	—	326	–	427^{a}	361	XXXIII	—	401^{b}	–	—
290^{c}	–	—	327	–	427^{b}	362	XXXII	452	401^{c}	–	—
290^{d}	–	—	328	–	427^{c}	363^{a}	XXXIII	453	402^{a}		
291	–	—	329	XXVIII	427^{d}	363^{b}	XXXII	—	bis		
292^{a}	–	417*	330	–	—	364	–	454	*404*^{b}	XXXVII	—
292^{b}	–	417	331	XXVII	427^{e}	365	XXXIII	455	405	XXXVIII	—
292^{c}	XLVIII	417*	332^{a}	–	427^{f}	366	–	—	406	XXXIX	—
293^{a}	XXII		332^{b}	XXVIII	427^{g}	367	–	—	407	XL	—
bis			332^{c}	–	—	368	–	456	408	XLI	503
293^{e}	–	408	332^{d}	–	—	369	–	—	409	–	—
293^{ee}	XXIX	—	332^{e}	–	427^{h}	370	–	—	410	–	504
293^{f}	–	409	332^{f}	XXVII	—	371	XXXIV	458	411^{a}	–	507
293^{g}	–	—	333	XXIX	—	372	–	—	411^{b}	–	508
293^{h}	–	—	334	–	427^{i}	373^{a}	–	460	412	–	514
293^{ii}	XXIV	414^{b}	335	s. Fig. 326	427^{k}	373^{b}	–	—	413	–	517
293^{k}	–	—	336	XXVIII	—	374	–	461	414	–	—
294	XXII	417	337	XXIX	428	375	–	462	415	–	—
295	–	—	338	–	—	376	–	464	416	–	—
296	–	418	339	–	—	377	–	—	417	XLII	—
297	–	—	340	–	—	378	–	—	418	–	—
298	XXIII	420	341^{a}	XXX	436^{a}	379^{a}	–	467	419	–	—
299	–	—	341^{b}	–	—	379^{b}	–	—	420	–	518
300	–	—	341^{c}	–	—	379^{c}	–	—	421	–	521
301	–	—	341^{d}	–	—	380^{a}	–	468^{a}	422	–	—
302	–	—	341^{e}	–	—	380^{b}	–	—	423	–	527
303	–	—	341^{f}	–	—	380^{c}	–	468^{b}	424	–	—
304	–	—	341^{g}	–	—	380^{d}	–	—	425	XLIII	—
305	–	—	341^{h}	–	—	381	–	469	426	–	—
306	XXIV	—	341^{i}	–	—	382	–	—	427	–	—
307	–	421	342	–	437	383	–	470	428	–	—

Nummern der			Nummern der			Nummern der			Nummern der		
Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.	Fig.	Tab.	§§.
419^{a}	XLIII	527	439	XLIV	574	451^{a}	XLIV	590^{b}	464	XLVI	611
429^{b}	–	—	440	–	576	452^{a}	–	—	465^{a}	–	—
430	–	556	441	–	579	452^{b}	XLV	603	465^{b}	XLVII	—
431	–	560	442	–	—	453	–	604	465^{c}	–	—
432	–	—	443	–	580	454	–	—	466^{a}	XLV	612
433	XLIV	561	444	–	582	455	–	—	466^{b}	XLVIII	—
434	–	566	445	–	586	456	–	607	466^{c}	–	—
435	–	568	446^{a}	–	588	457	–	609	466^{d}	XLV	—
436	–	569	446^{b}	–	—	458	–	—	467^{a}		
437	–	—	447	–	—	459	–	—	bis		
437^{a}	–	572	448	–	—	460	–	—	467^{f}	XLIX	614
437^{b}	–	—	449	–	—	461	–	—	468	XLVIII	622
437^{c}	–	—	450	–	589	462	XLVII	611	469	–	623
438	–	574	451	–	590^{a}	463	XLVI	—			

VERBESSERUNGEN
die Kupfer betreffend.

Fig. 64, Tab. III, fehlt rechts unter F ein A.

Fig. 110 A bis 110 O, Tab. VIII, ist 110 an den Kupfern nicht bemerkt.

Fig. 163°, Tab. XI soll seyn 163^{c}.

Fig. 204^{b}, Tab. XIV, zweimal, zusammen gehörig und auf der Tafel untereinanderstehend.

Sollten wider Vermuthen noch einige Verbesserungen nöthig seyn, so werden solche am Ende des Repertorium für die Kupfer des zweiten Bandes beigefügt werden.

MANNHEIM, 1825.

BUCHDRUCKEREI DES KATHOLISCHEN BÜRGERHOSPITALS.

p 8.9.

D. Kn

p 8.9.

D. Kn

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Ausführliches System der Maschinen-Kunde mit speciellen Anwendungen bei mannichfaltigen Gegenständen der Industrie

Bd.: 1,1 : mit einem vollständigen Repertorium zum ganzen ersten Bande

Heidelberg ; Leipzig 1826

4 Math.a. 177 b-1,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10052965-5